普通高等教育"十一五"国家级规划教材

结构力学 I

——基本教程

第2版

龙驭球　包世华　主编

龙驭球　包世华　匡文起　袁　驷　编著



高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

结构力学Ⅰ
——基本教程

第2版

龙驭球　包世华　主编
龙驭球　包世华　匡文起　袁　驷　编著

高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

本书属普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是“高等教育百门精品课程教材建设计划”的研究成果，是根据教育部力学教学指导委员会非力学类专业力学基础课程教学指导分委员会制定的《结构力学课程教学基本要求》，在第1版的基础上修订而成的。第1版[《结构力学教程(Ⅰ)》、《结构力学教程(Ⅱ)》]是面向21世纪课程教材，获2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖，以本套书为基础的教学实践获2001年国家级教学成果一等奖，并被评为2003年度国家精品课程。第2版采用了新的编排方式：首先把全书内容明确地区分为基本内容与增选、专题内容，然后将这两部分内容分别编成《结构力学Ⅰ——基本教程》(简称卷Ⅰ)和《结构力学Ⅱ——专题教程》(简称卷Ⅱ)。基本教程着眼于为课程打好基础，落实课程的基本要求；专题教程着眼于扩大和提高，各校可根据实际情况选择其中不同层次的增选和专题内容，不拘一格地提升教学水平。

全书共17章，分为卷Ⅰ和卷Ⅱ。本书为《结构力学Ⅰ——基本教程》，共10章，主要内容包括静定结构分析、超静定结构分析、矩阵位移法、动力计算基础等。

本书(卷Ⅰ)后附有《结构力学求解器》光盘1张，其中包括结构力学求解器、平面刚架程序的框图设计和源程序。另外，与本书配套的有《结构力学网络课程》、《结构力学学习指导》和《结构力学电子教案》(中、英文版)。配套的教学软件充分发挥多媒体的先进表现手段，营造一种良好的学习环境，既可使工科学生在网络环境下自主、完整、系统地学习结构力学课程，也可作为从事土建、水利、力学等领域工程技术人员知识更新的自学环境。

本书可作为高等学校土建、水利、力学等专业结构力学课程的教材，也可供有关工程技术人员参考。

第 2 版序

本书第2版是第1版的传承和发展。具有以下特点：

一、传承原有编写风格

继续保持"打好基础，脉络清晰，理论联系实际，符合认识规律"的编写方针。继续发扬纸质教材与电子教材的互补作用，以《结构力学求解器》为工具，提高学生利用计算机分析结构的能力。继续加强能量原理与方法论等方面的教学内容，提高学生的理论水平和科学素质。

二、采用新的编排方针

第2版采用新的编排方针：首先把全书内容明确地分为基本内容与增选、专题内容两部分，然后将基本内容编成结构力学Ⅰ——基本教程；将增选、专题内容编成结构力学Ⅱ——专题教程。

在第2版里，卷Ⅰ与卷Ⅱ的分工是非常明确的。卷Ⅰ只包括课程教学的基本要求。对全国各校来说，课程教学的基本要求应当是统一的，是"死"的。其目的是保证课程的基本教学质量，或者说是"保底"。卷Ⅱ包含一些各具特色的增选、专题内容，在"保底"的基础上，各校可根据各自情况自行选用。对全国高校来说，这些增选、专题内容应当是不拘一格的，是"活"的。这种在"保底"基础上不拘一格的增选和提升，可以比喻为"开花"。概括地说，"卷Ⅰ保底，卷Ⅱ开花"，这就是新版采用的新的编排方针。

要"开花"，必先"保底"。"保底"是硬任务，"开花"是活功夫。一硬一活，才会形成既有扎实功底而又充满活力的学习景象。我们希望，体现"保底—开花"精神的第2版教材将会更好地适应我国技术基础课程教学发展的需求，适应不同高校对教材类型的多样性需求。

继第1版之后，第2版书稿又得到西安建筑科技大学刘铮教授的审阅和指点，谨致谢意。

欣逢青藏铁路全线通车，特以拉萨河特大铁路桥的倩影作为封面，以志喜庆。

本书封面照片由拉萨指挥部宣传部于章林先生提供，在此表示感谢。

恳请批评和指正。

作　者

2006年夏于清华园

第 1 版序

教材建设是一项需要长期积累而又不断翻新的工作，既要锲而不舍、精益求精，又要善于探索、有所创新。本书是在清华大学四十多年结构力学教材建设和近几年教学改革实践的基础上编写的，主要想在以下几个方面作些新的尝试和安排：

一、由一本书扩充为三书鼎立。由于结构力学计算机化的进程日新月异，以及在计算机化的形势下结构定性分析的能力培养日益显得更为重要，因此除编写一本《结构力学教程》侧重于经典结构力学的基本理论和基本方法外，还拟编写两本配套教材，即《程序结构力学》及“定性结构力学”，分别侧重于计算机方法和定性分析方法。三书鼎立，相互呼应，以期适应新世纪、新形势的新要求。

二、为计算机化提供新的基础知识和新工具。在为矩阵位移法配置的计算机程序方面，有 FORTRAN 77 程序，Fortran 90 程序。此外，还引入作者教学和科研成果《结构力学求解器》作为新工具，提高解算大型结构、复杂结构的例题、习题的能力，开拓教学内容的广度和深度，利用动画显示，提高对结构性能的感性认识。

三、将虚功－能量方法贯通全书，提高理论水平。以前的结构力学教材也讲一点虚功－能量方法，但讲得太晚，太集中，学与用离得太远。针对这种情况，本书改为“提前讲、分段讲、就近用”的作法，以便收到“由浅入深、分散难点、学了就用、便于生根”的效果，从而进一步提高理论水平。计算机化不仅不排斥力学理论，而是更加需要力学理论的指导，呼唤力学理论的深化。

四、注意培养思维能力和科学素质。为了把力学方法上升到方法论的高度，在书中专门写了四节：

● 方法论(1)——学习方法(第 1 章)。

● 方法论(2)——静定结构部分(第 6 章)。

● 方法论(3)——超静定结构部分(第 12 章)。

● 方法论(4)——结构力学之道(最后一章)。

为了指导学习和启发思考，专门写了两章“总论”，分别对静定结构和超静定结构两大部分内容进行融会贯通的梳理和开阔视野的指点；几乎每一章都专门写了“小结”和“思考与讨论”两节，引导读者跨进更广的思考空间。

五、适当更新内容。除了删去和压缩比较陈旧的内容外，还注意扩大专业

覆盖面，新加悬索、空间结构等内容，适当介绍一些科研成果，包括作者新近的部分学术成果。

总的来说，“守本翻新”是本书的编写方针。守本，是指继续保持“打好基础，脉络清晰，理论联系实际，符合认识规律”的编写风格。翻新，是指进行一些经过初步实践的新尝试，包括上面提到的五点。

本书内容各校可根据具体教学要求选用，带 * 号者为选学、提高内容。

本书稿请西安建筑科技大学刘铮教授和东南大学单建教授审阅，在审阅中提了不少宝贵意见。清华大学雷钟和教授提供了本书部分思考题及习题，张玉良副教授提供了 FORTRAN 77 程序的初稿。作者谨向他们表示衷心的感谢。

欢迎批评，恳请指正。

作　者

1999年冬于清华园

主要符号表说明

在实施国家标准(GB 3100～3102—93)《量和单位》的过程中，为保证国家标准和现有惯例的衔接，本书作如下说明，请读者注意。

1. 国家标准规范的物理量、名称和符号，按国家标准使用，注重量的物理属性。如，以前称剪应变(剪切角)γ，现改称切应变；又如，各种力(包括荷载、反力和内力)都用 F 作为主符号，而将其特性以下标(上标)表示；等等。

2. 对于在结构力学中广泛使用的广义力(包括力与力偶矩、力矩)和广义位移(包括线位移与角位移)，为了体现其广义性(有时还有未知性)，考虑到全书叙述的统一和表达的简洁、完整，本书仍沿用 X(多余力未知力)、Δ 和 δ(位移)、c(支座位移)等广义物理量。至于它们在具体问题中对应的量和相应单位，则视具体问题而定。

3. 在结构力学中经常应用“单位量”的概念，如单位力 $X=1$，单位荷载 $F_P=1$，单位位移 $\Delta=1$ 等。现以单位力 $X=1$ 为例加以说明。单位力 $X=1$ 是一种简称，详细地说，是指数值为 1 而其量纲指数都为零(量纲并不为零，量纲为一)的特定广义力 $\overline{X}=1$(这里，$\overline{X}$ 与 X 在数值上相等，但量纲不同。$\overline{X}$ 是一个量纲一的量，以前称为无量纲量)。单位量的概念主要用于求比例系数(或称影响系数)。仍以力 X 引起某量 M 的情况为例，二者的比例系数为 $\overline{M}=\dfrac{M}{X}$。在线性问题中，比例系数是一个重要的概念。

4. 本教材中某些符号及有关公式运算中的单位表示，考虑以往教材的习惯和结合工程实际运算的方便，作了必要的处理。具体情况在本教材的相应处已有说明。

主要符号表

符号	含义
A	面积
a	振幅
c	支座广义位移、粘滞阻尼系数
C	弯矩传递系数
c_{cr}	临界阻尼系数
d	结间距离
E	弹性模量
E_{p}	势能
E_{C}	余能
f	拱高、矢高、工程频率
F_{P}	集中荷载
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$	荷载向量
F_{H}	水平推力
F_x、F_y	水平(x)、垂直(y)方向的分力
F_{N}	轴力
$F_{\mathrm{N}x}$、$F_{\mathrm{N}y}$	轴力在水平(x)、垂直(y)方向的分力
F_{Q}	剪力
$F_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{L}}$、$F_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{R}}$	截面左、右的剪力
$F_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{F}}$	固端剪力
F_{Pe}	欧拉临界荷载
F_{Pcr}	临界荷载
F_{Pu}	极限荷载
F_{P}^{+}	可破坏荷载
F_{P}	可接受荷载
F_{e}	弹性力
F_{I}	惯性力
F_{c}	阻尼力

F_R	广义反力、反力合力
$\overline{\boldsymbol{F}}^e$	局部坐标系下单元杆端力向量
$\boldsymbol{F}^e$	整体坐标系下单元杆端力向量
$\overline{\boldsymbol{F}}^{Fe}$	局部坐标系下单元固端力向量
$\boldsymbol{F}^{Fe}$	整体坐标系下单元固端力向量
G	切变模量
i	线刚度
I	惯性矩
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
k	刚度系数、切应力分布不均匀系数
$\overline{\boldsymbol{k}}^e$	局部坐标系下单元刚度矩阵
$\boldsymbol{k}^e$	整体坐标系下单元刚度矩阵
$\boldsymbol{K}$	结构刚度矩阵
m	质量
$\overline{m}$	线分布质量
$\boldsymbol{M}$	质量矩阵
M	力矩、力偶矩、弯矩
M^F	固端弯矩
M_u	极限弯矩
M_e	弹性极限弯矩
$\boldsymbol{N}$	形函数矩阵
p	均布荷载集度
P	广义荷载、广义力
$\boldsymbol{P}^e$	单元结点荷载向量
$\boldsymbol{P}$	结构结点荷载向量
q	均布荷载集度
R	半径
r	半径、反力影响系数
S	转动刚度
t	时间
T	周期、动能
$\boldsymbol{T}$	坐标转换矩阵
V_ε	应变能
V_P	荷载势能

u	水平位移
v	竖向位移、挠度、速度
v_ε	应变能密度
v_C	应变余能密度
V_C	应变余能
$\mathbf{W}$	功、计算自由度、弯曲截面系数
X	广义未知力、广义多余未知力
$\mathbf{Y}$	位移幅值向量、主振型向量、主振型矩阵
y	位移
$\dot{y}=\frac{dy}{dt}$	速度
$\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}$	加速度
Z	影响线量值
α	线膨胀系数、初相角
β	动力系数
Δ	广义未知位移
$\boldsymbol{\Delta}$	位移向量
$\boldsymbol{\Delta}^e$	单元杆端位移向量
δ	柔度系数、位移影响系数
ε	线应变
μ	力矩分配系数
κ	曲率
φ	弦转角
γ_0	平均切应变
θ	截面的转角、干扰力频率
ξ	阻尼比
σ_b	强度极限
σ_s	屈服应力
σ_u	极限应力
ω	圆频率

目　录

第1章
绪　　论

§1-1　结构力学的学科内容和教学要求

1. 结构

建筑物和工程设施中承受、传递荷载而起骨架作用的部分称为工程结构，简称为结构。房屋中的梁柱体系，水工建筑物中的闸门和水坝，公路和铁路上的桥梁和隧洞等，都是工程结构的典型例子。

从几何角度来看，结构可分为三类：

(1) 杆件结构—这类结构是由杆件所组成。杆件的几何特征是横截面尺寸要比长度小得多。梁、拱、桁架、刚架是杆件结构的典型形式。

(2) 板壳结构—这类结构也称为薄壁结构。它的厚度要比长度和宽度小得多。房屋中的楼板和壳体屋盖、水工结构中的拱坝都是板壳结构。

(3) 实体结构—这类结构的长、宽、厚三个尺度大小相仿。水工结构中的重力坝属于实体结构。

狭义的结构往往指的就是杆件结构，而通常所说的结构力学就是指杆件结构力学。

2. 结构力学的研究对象

结构力学与理论力学、材料力学、弹塑性力学有密切的关系。理论力学着重讨论物体机械运动的基本规律，其余三门力学着重讨论结构及其构件的强度、刚度、稳定性和动力反应等问题，其中材料力学以单个杆件为主要研究对象，结构力学以杆件结构为主要研究对象，弹塑性力学以实体结构和板壳结构为主要研究对象。

结构力学的任务是根据力学原理研究在外力和其他外界因素作用下结构的内力和变形，结构的强度、刚度、稳定性和动力反应，以及结构的组成规律。具体地说，包括以下几个方面：

(1) 讨论结构的组成规律和合理形式，以及结构计算简图的合理选择。

(2) 讨论结构内力和变形的计算方法，进行结构的强度和刚度的验算。

(3) 讨论结构的稳定性以及在动力荷载作用下的结构反应。

结构力学问题的研究手段包含理论分析、实验研究和数值计算三个方面。实验研究方法的内容在实验力学和结构检验课程中讨论，理论分析和数值计算方面的内容在结构力学课程中讨论。

在结构分析中，首先把实际结构简化成计算模型，称为结构计算简图；然后再对计算简图进行计算。结构力学中介绍的计算方法是多种多样的，但所有各种方法都要考虑下列三方面的条件：

(1) 力系的平衡条件或运动条件。

(2) 变形的几何连续条件。

(3) 应力与变形间的物理条件(或称为本构方程)。

结构力学的基本解法是直接运用上述三方面条件进行解算的，可称为"平衡-几何"解法。这些解法如果采用虚功和能量形式来表述，则称为"虚功-能量"解法。

电子计算机的出现，对结构力学学科产生了巨大的影响。过去由于缺乏现代化的计算手段，结构分析都是靠"手算"。现在情况不同了，过去无法解算的许多大型结构计算问题，现在已经成为"电算"中的常规问题。"电算"提高了结构力学解决问题的能力，同时也对结构力学提出了新的要求，即"电算"方法必须适应"电算"的特点。因此，一些与"电算"关系密切的内容，例如能量原理、结构矩阵分析、有限元法、半解析法、结构分析软件、结构优化设计等，已经在结构力学中占据愈来愈重要的地位，在结构力学学科领域里形成了一个新的分支学科——计算结构力学。这就是借助计算机采用数值方法解决结构力学问题的一个分支学科。

3. 课程教学中的能力培养

在《结构力学课程教学基本要求》中提出了关于分析能力、计算能力、自学能力和表达能力的培养要求。其要点如下：

(1) 分析能力

在结构力学课程中要培养多方面的分析能力，例如：

选择结构计算简图的能力——如何对实际结构进行"删繁就简"，确定其计算简图，这是进行结构力学计算的第一步。在结构力学课程中要初步培养这方面的能力。

进行力系平衡分析和变形几何分析的能力——对结构的受力状态要进行平衡分析，对结构的变形和位移状态要进行几何分析。这两方面的分析能力是结构分析中的两个看家本领，要在反复运用中加以融会贯通，逐步提高，力求达到能正确、熟练、灵活运用的水平。

选择计算方法的能力——结构力学中的计算方法很多，要了解各种方法的特点和最适用的场合，具有根据具体问题选择恰当计算方法的能力。

(2) 计算能力

在结构力学课程中培养计算方面的能力包含三个方面:具有对各种结构进行计算或确定计算步骤的能力;具有对计算结果进行定量校核或定性判断的能力;初步具有使用结构计算程序的能力。在此三项中,计算能力是基础——不会计算,也就不会校核。不会手算,则电算是盲目的。校核和判断能力可以说比计算能力要更高一层——校核并不是重复计算一遍,而是要求用另一方法来核算。这里要求校核者能掌握多种算法并能灵活地运用。判断则要求能用简略的办法确定计算结果的合理范围,这里要求评判者通晓结构的力学性能和各种近似算法。使用计算程序的能力日益显得更加重要——不会电算就无法计算大型问题,也无法提高计算效率。

作题练习,是学习结构力学的重要环节。不作一定数量的习题,就很难对基本概念和方法有深入的理解,也很难培养较好的计算能力。但是,作题也要避免各种盲目性。

(3) 自学能力

自学就是把别人的知识变成自己的。自学包含两个方面,一是消化已学的知识,二是摄取新的知识。如果把知识比作一个"笔记本",也就是说,一是要由厚变薄,二是要由薄变厚。

消化,就是要把书本上的结论用自己的话来表述,把黑板上的论证按照自己的思路来整理,把分章分节学来的知识融成整体,把整章的丰富内容提炼概括成简短的几句话,在自己演算的习题本里穿插几行札记。总之,要把笔记本由厚变薄,把收集到的珍珠用线串起来,使知识得到升华,便于储存,便于驾驭。

摄取,就是逐步扩大自己的知识领域,把笔记本由薄变厚。摄取要有选择,扩大要围绕一个中心。首先要把中心内容扎扎实实地牢固掌握,把主要教科书精读钻研,然后有选择地阅读参考书籍和资料,这样,新知识才能在原来的知识结构上生根。

(4) 表达能力

作业要整洁、清晰、严谨。

计算书要书写整洁,因为是要给人看的。书写整洁,与其说是一种能力,毋宁说是一种习惯,一种郑重和负责任的习惯。

既要有形式上的整洁,更要有内容上的清晰。作题要步骤分明,思路清楚,图形简明,数据准确。

整洁和清晰,体现了一种严谨作风。科学是严谨的,从事科学的人要注意培养严谨作风。

§1-2 结构的计算简图及简化要点

实际结构是很复杂的,完全按照结构的实际情况进行力学分析是不可能的,也是不必要的。因此,对实际结构进行力学计算以前,必须加以简化,略去不重要的细节,显示其基本特点,用一个简化的图形来代替实际结构,这种图形称为结构的计算简图。

选择计算简图的原则是:

(1) 从实际出发—计算简图要反映实际结构的主要性能。

(2) 分清主次,略去细节—计算简图要便于计算。

计算简图的选择是力学计算的基础,极为重要。在下面几章讨论各种结构时,将说明从实际结构到计算简图的简化过程。在第12章里,还要对计算简图作补充讨论。

选取计算简图时,需要在多方面进行简化,下面简要地说明杆件结构计算简图的简化要点:

1. 结构体系的简化

一般结构实际上都是空间结构,各部分相互连接成为一个空间整体,以承受各个方向可能出现的荷载。但在多数情况下,常可以忽略一些次要的空间约束而将实际结构分解为平面结构,使计算得以简化。本书主要讨论平面结构的计算问题。当然,也有一些结构具有明显的空间特征而不宜简化成平面结构,在本书卷Ⅱ中将涉及这方面的内容。

2. 杆件的简化

杆件的截面尺寸(宽度、厚度)通常比杆件长度小得多,截面上的应力可根据截面的内力(弯矩、轴力、剪力)来确定。因此,在计算简图中,杆件用其轴线表示,杆件之间的连接区用结点表示,杆长用结点间的距离表示,而荷载的作用点也转移到轴线上。当截面尺寸增大时$\left(\text{例如超过长度的}\frac{1}{4}\right)$,杆件用其轴线表示的简化,将引起较大的误差。

3. 杆件间连接的简化

杆件间的连接区简化为结点。结点通常简化为以下两种理想情形:

(1) 铰结点 被连接的杆件在连接处不能相对移动,但可相对转动,即可以传递力,但不能传递力矩。这种理想情况,实际上很难遇到。木屋架的结点比较接近于铰结点(图1-1a、b)。

(2) 刚结点 被连接的杆件在连接处既不能相对移动,又不能相对转动;既

可以传递力，也可以传递力矩。现浇钢筋混凝土结点通常属于这类情形（图1－2a、b）。

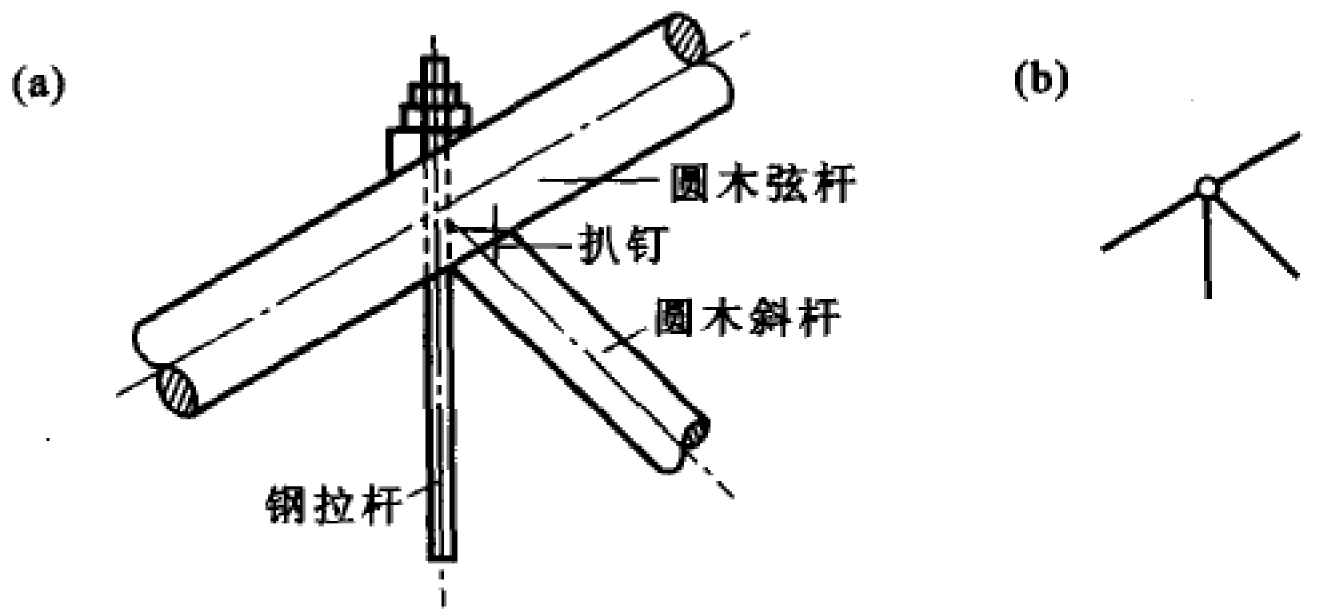


图　1－1

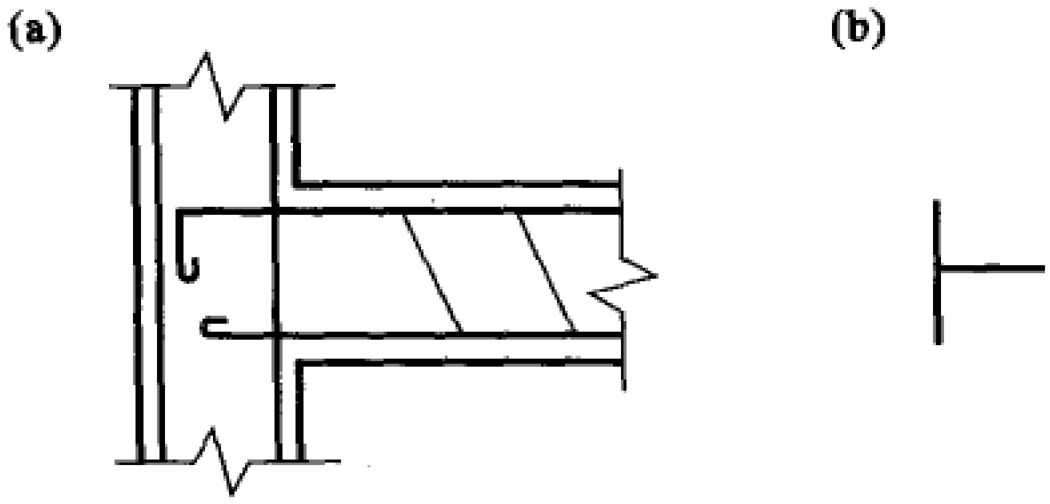


图　1－2

4．结构与基础间连接的简化

结构与基础的连接区简化为支座。按其受力特征，一般简化为以下四种情形：

（1）滚轴支座　被支承的部分可以转动和水平移动，不能竖向移动（图1－3a），能提供的反力只有竖向反力 F_y。在计算简图中用一根支杆表示（图1－3b）。

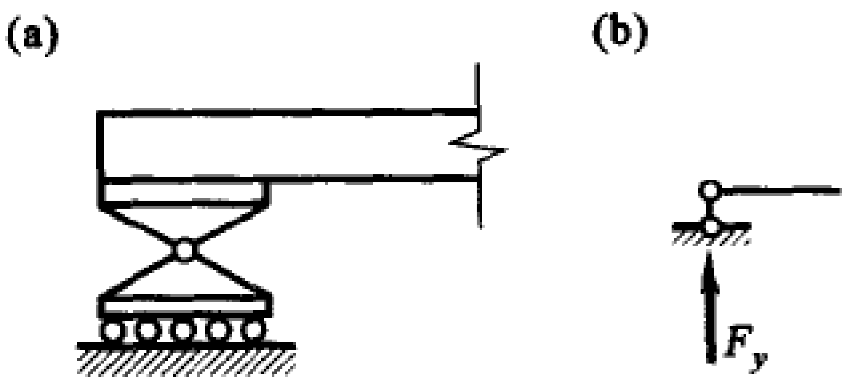


图　1－3

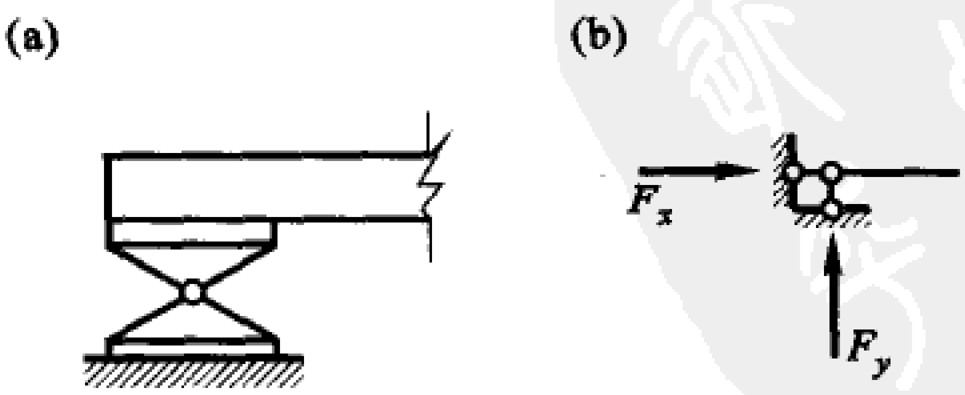


图　1－4

（2）铰支座　被支承的部分可以转动，不能移动（图1－4a），能提供两个反力 F_x、F_y。在计算简图中用两根相交的支杆表示（图1－4b）。

(3) 定向支座 被支承的部分不能转动,但可沿一个方向平行滑动(图 1－5a),能提供反力矩 M 和一个反力 F_y。在计算简图中用两根平行支杆表示(图 1－5b)。

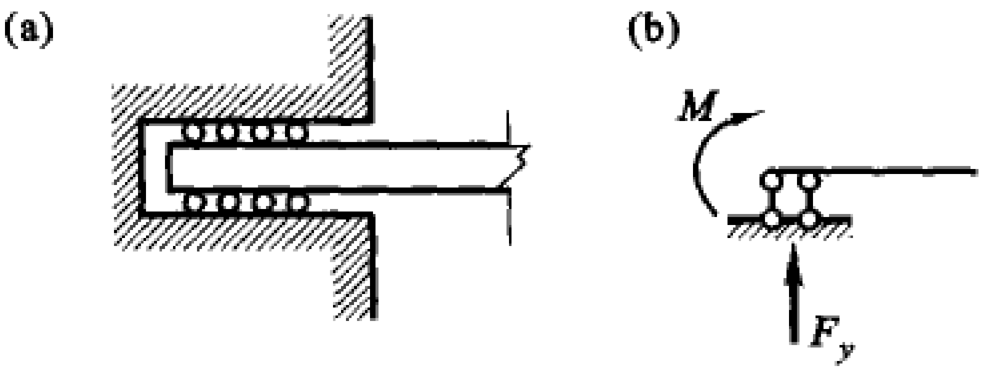


图 1－5

(4) 固定支座 被支承的部分完全被固定(图 1－6a),能提供三个反力 F_x、F_y、M。在计算简图中可按图 1－6b 表示。

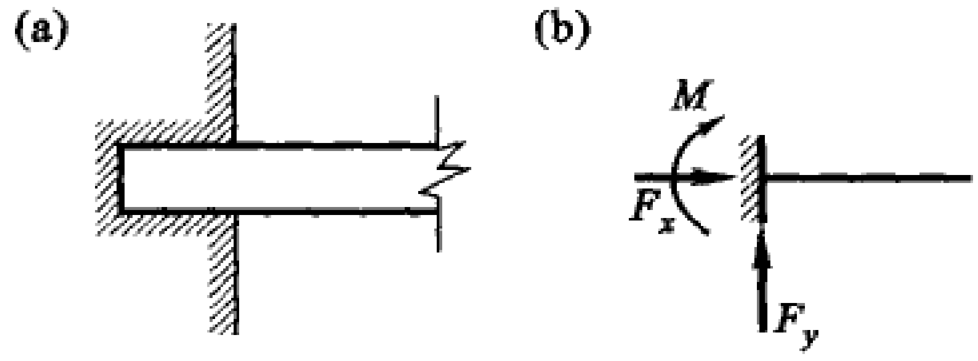


图 1－6

5. 材料性质的简化

在土木、水利工程中结构所用的建筑材料通常为钢、混凝土、砖、石、木料等。在结构计算中,为了简化,对组成各构件的材料一般都假设为连续的、均匀的、各向同性的、完全弹性或弹塑性的。

上述假设对于金属材料在一定受力范围内是符合实际情况的。对于混凝土、钢筋混凝土、砖、石等材料则带有一定程度的近似性。至于木材,因其顺纹与横纹方向的物理性质不同,故应用这些假设时须予注意。

6. 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力指的是结构的自重或惯性力等;表面力则是由其他物体通过接触面而传给结构的作用力,如土压力、车辆的轮压力等。在杆件结构中把杆件简化为轴线,因此不管是体积力还是表面力都可以简化为作用在杆件轴线上的力。荷载按其分布情况可简化为集中荷载和分布荷载。荷载的简化与确定比较复杂,下面还要专门讨论。

下面给出几个选取结构计算简图的例子。

(1) 图 1－7a 所示一钢筋混凝土厂房结构,梁和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内,然后用细石混凝土填实。梁与柱的连接是通过将梁端和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。在横向平面内柱与梁组成排架(图1－7b),各个排架之间,在梁上有屋面板连接,在柱的牛腿上有吊车梁连接。

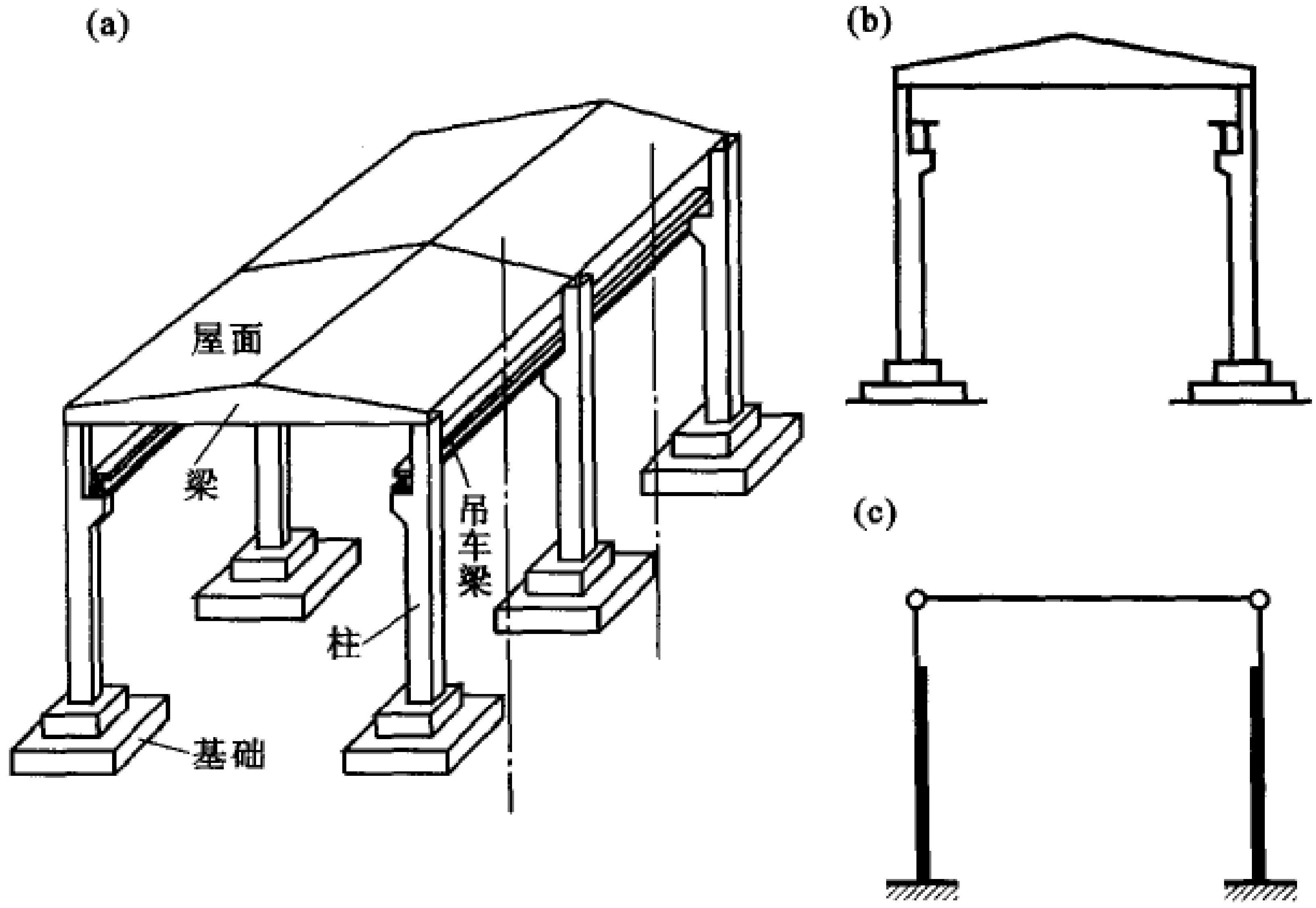


图　1－7

计算上述的厂房结构时，可采用图 1－7c 所示的计算简图。

首先，厂房结构虽然是由许多排架用屋面板和吊车梁连接起来的空间结构，但各排架在纵向以一定的间距有规律地排列着。作用于厂房上的荷载，如恒载、雪载和风载等一般是沿纵向均匀分布的，通常可把这些荷载分配给每个排架，而将每一排架看作一个独立的体系，于是实际的空间结构便简化成平面结构(图 1－7b)。

其次，梁和柱都用它们的几何轴线来代表。由于梁和柱的截面尺寸比长度小得多，轴线都可近似地看作直线。

梁和柱的连接只依靠预埋钢板的焊接，梁端和柱顶之间虽不能发生相对移动，但仍有发生微小相对转动的可能，因此可取为铰结点。柱底和基础之间可以认为不能发生相对移动和相对转动，因此柱底可取为固定端。

(2) 图 1－8a 所示为水电站的高压水管，水管支承在一系列支托上，从整体看是一个连续梁。固定台很重，可看作梁的固定端，而支托可看作支杆。在水管自重和管内水重作用下，水管可按均布荷载作用下的连续梁来计算，计算简图如图 1－8b 所示。

以上是计算水管纵向应力所取的计算简图。当计算环向应力时，由于水管很长，且每一截面所受的水压力也是一样的，因而可以截取一单位宽度的圆环进行计算，计算简图示于图 1－8c。当水管突然放空而形成真空时，由于外压的存在，有丧失稳定的可能，原先的圆环在失稳后变为椭圆形，故还须验算圆环在均匀外压作用下的稳定性(图 1－8d)。

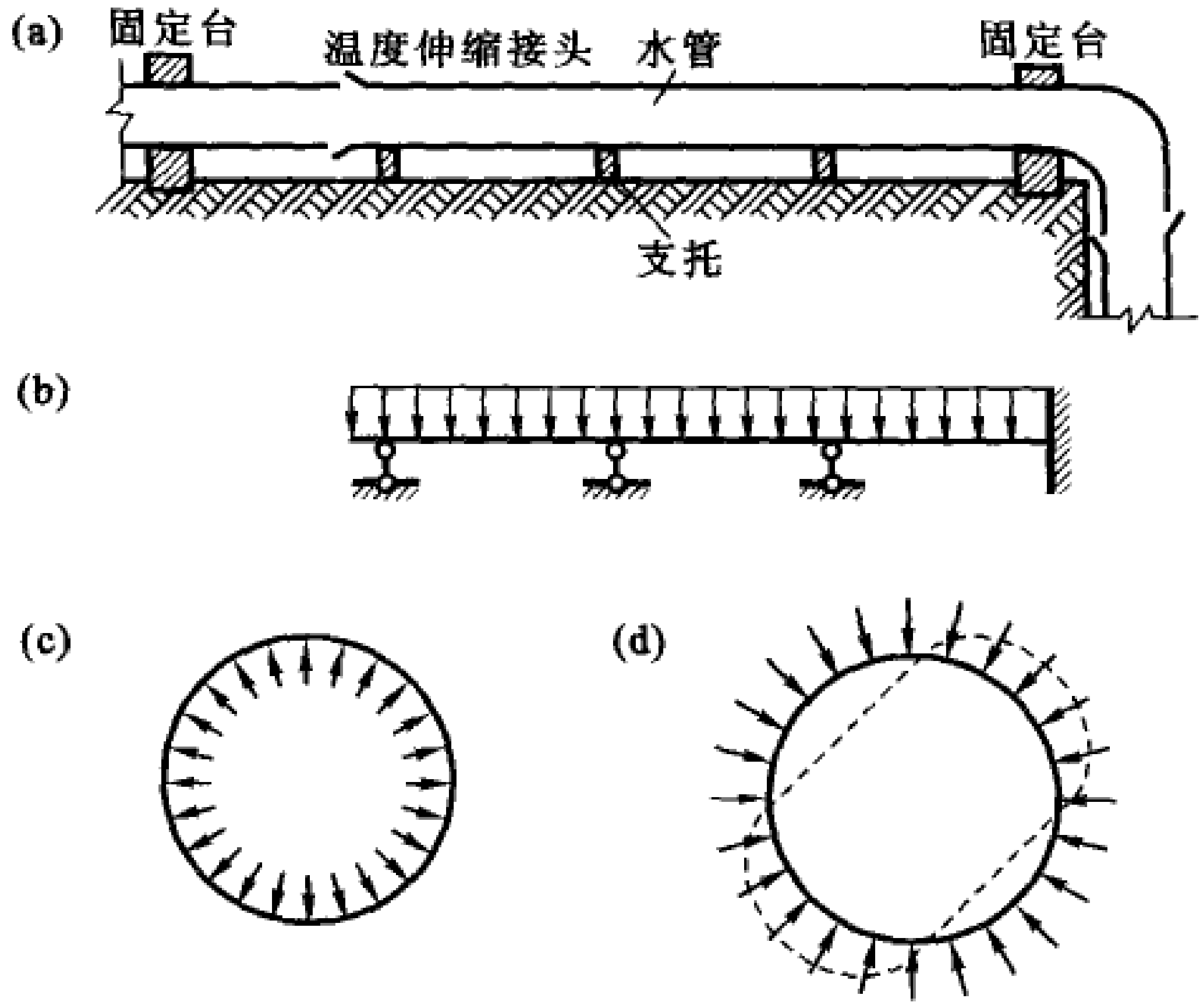


图 1-8

§1-3 杆件结构的分类

结构的分类实际上是指结构计算简图的分类。

杆件结构通常可分为下列几类:

(1) 梁 梁(图 1-9a)是一种受弯构件,其轴线通常为直线。梁可以是单跨的或多跨的。

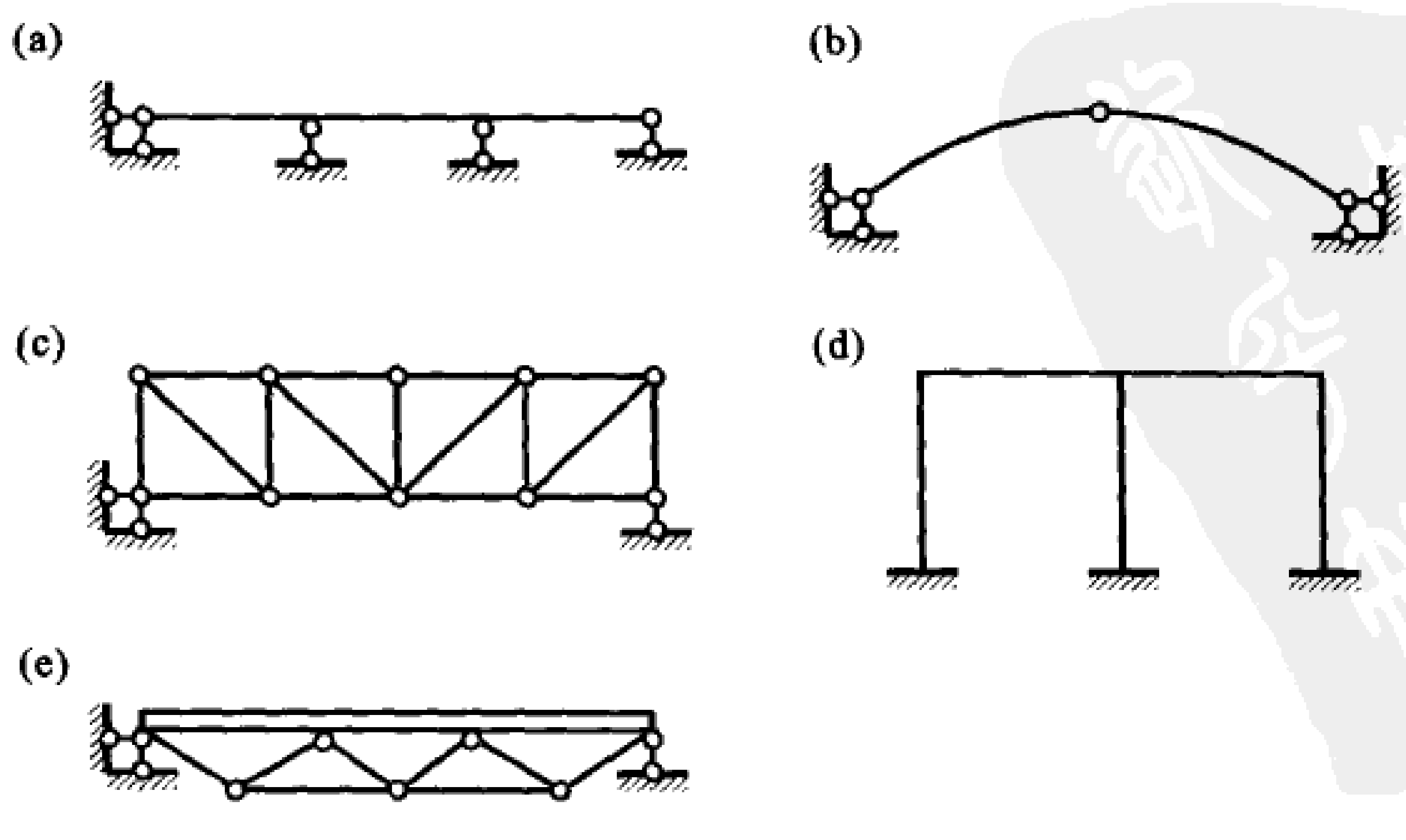


图 1-9

(2) 拱 拱(图 1－9b)的轴线为曲线,其力学特点是在竖向荷载作用下有水平支座反力(推力)。

(3) 桁架 桁架(图 1－9c)由直杆组成,所有结点都为铰结点。

(4) 刚架 刚架(图 1－9d)也由直杆组成,其结点通常为刚结点。

(5) 组合结构 组合结构(图 1－9e)是桁架和梁或刚架组合在一起形成的结构,其中含有组合结点。

杆件结构可分为平面结构和空间结构两类。在平面结构中,各杆的轴线和外力的作用线都在同一平面内,如图 1－10 所示为一平面结构的桁架。空间结构则不满足上述条件,图 1－11 所示为一空间刚架,各杆的轴线不在同一平面内。大多数结构在设计中通常是按平面结构进行计算的。在有些情况下,必须考虑结构的空间作用。

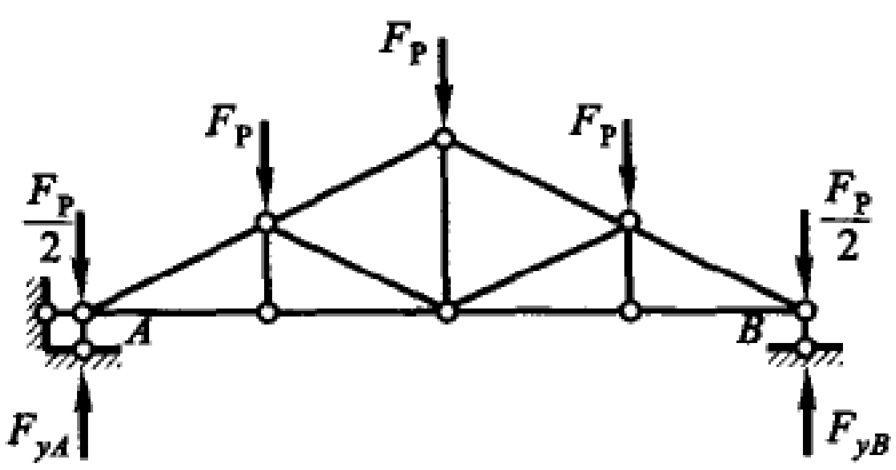


图 1－10

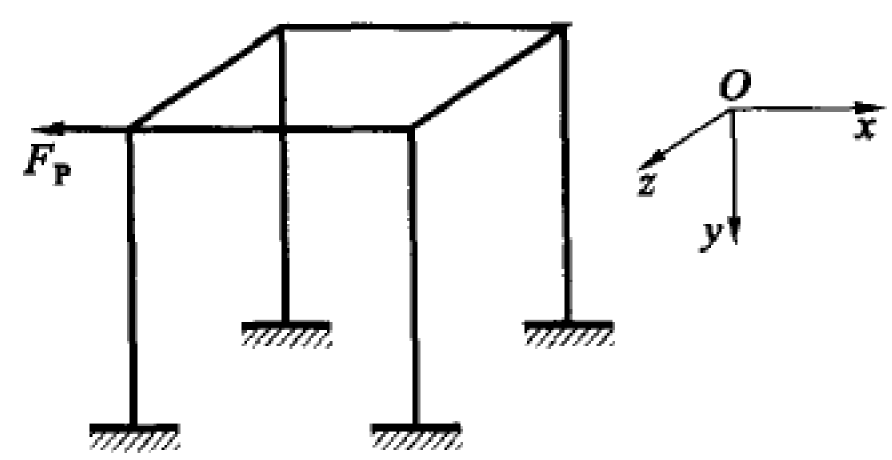


图 1－11

除上述分类外,按计算特性,结构又可分为静定结构和超静定结构。如果结构的杆件内力(包括反力)可由平衡条件唯一确定,则此结构称为静定结构。如果杆件内力由平衡条件还不能唯一确定,而必须同时考虑变形条件才能唯一确定,则此结构称为超静定结构。

§1－4 荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力,例如结构的自重,加于结构的水压力和土压力。除外力以外,还有其他因素可以使结构产生内力或变形,如温度变化、基础沉陷、材料收缩等。从广义上来说,这些因素也可以称为荷载。

对结构进行计算以前,须先确定结构所受的荷载。荷载的确定是结构设计中极为重要的工作。荷载如估计过大,则设计的结构会过于笨重,造成浪费;荷载如估计过低,则设计的结构将不够安全。确定荷载需要周密的考虑和谨慎的工作。

荷载可以根据不同特征进行分类：

根据荷载作用时间的久暂，可以分为恒载和活载两类。恒载是长期作用在结构上的不变荷载，如结构的自重或土压力。活载是在建筑物施工和使用期间可能存在的可变荷载，如楼面荷载、屋面荷载、吊车荷载、雪载和风载等。

对结构进行计算时，恒载和大部分活载（如雪载、风载）在结构上作用的位置可以认为是固定的，这种荷载称为固定荷载。有些活载如吊车梁上的吊车荷载、公路桥梁上的汽车荷载，在结构上的位置是移动的，这种荷载称为移动荷载。

根据荷载作用的性质，可以分为静力荷载和动力荷载两类。静力荷载的数量、方向和位置不随时间变化或变化极为缓慢，不使结构产生显著的加速度，因而惯性力的影响可以忽略。动力荷载是随时间迅速变化或在短暂时段内突然作用或消失的荷载，使结构产生显著的加速度，因而惯性力的影响不能忽略。结构的自重和其他恒载是静力荷载。动力机械运转时产生的荷载或冲击波的压力是动力荷载的例子。车辆荷载、风载和地震荷载通常在设计中简化为静力荷载，但在特殊情况下要按动力荷载考虑。

荷载的确定，常常是比较复杂的。荷载规范总结了设计经验和科学研究的成果，供设计时应用。但在不少情况下，设计者需要深入现场，结合实际情况进行调查研究，才能对荷载作出合理的确定。

§1-5 学习方法

“爱学”和“会学”是有效学习的两块基石：

爱学——让学习成为一种乐趣和牵挂，让“阅读”成为“悦读”，因为“热爱是最好的老师”。

会学——学习要讲究方法。

关于学习方法，首先想起的是华罗庚院士的形象比喻：由薄到厚，再由厚到薄。

由薄到厚是指知识的摄取和积累过程，是加法。由厚到薄是指知识的提炼和提升过程，是减法。在学习中，要会加会减，减法似乎比加法更难、更重要。

在学习中，还要善问、会用、注意创新。作学问，要既学又问，问是学习的一把钥匙。学和用要结合，在学中用，在用中学，用是学的继续、检验和深化。在学习中要有创新意识，有所创新。

下面先对加、减、问、用和创新五个方面展开些议论，然后作两点归纳与补充。

1. 加法

(1) 勤于积累

摄取和积累知识是培养能力的基础，也是研究创新的基础。

日积月累，集腋成裘，学习要勤奋，要有韧性。

“一分神来，九分汗下”(郭沫若)，学习要舍得流汗，肯下笨功夫。“凡是有大成功的人，都是绝顶聪明而肯作笨功夫的人”(胡适)。

(2) 善于积累——寻脉结网

积累的知识要用心梳理，寻出脉络，使之条理化；要左右联系，前后呼应，使之融会贯通，连缀成网。这样精心积累的知识才会成为一个脉络清晰、有主有次、有目有纲的知识网。才便于储存，便于提取，便于驾驭。

顺便指出，在数学语言和力学语言之间要会翻译：把抽象的数学公式翻译成具体生动的物理概念；把直观的力学思路翻译成严密的数学程序。翻译，实际上是在两点之间连一根线，是结网的基本环节。

“读书似水知寻脉。”深山的小溪知道去寻找水脉，形成水网，奔流到海。水的积累是这样，知识的积累也有点相似。

(3) 善于积累——落地生根

把别人的、书本上的知识变成自己的，化他为己，这样的知识才是牢靠的，生了根的。牛吃草，变成奶，也就是化他为己。把新学来的知识融化在自己已有的知识结构上，把“故”作为“新”的基地，使“新”在“故”上生根发芽成长。

学习新知识，不是去“另起炉灶”，不是去“插上翅膀”，应当是长出自己的翅膀。要“不断根脉，融合新机。”

2. 减法

加法是基础，减法是提升。加减加减，螺旋上升。

会减法，就是指具有“由博返约”的能力，或者说，有把厚书读薄的能力。回想在小学上算术课，六年读了十二本书，摞在一起，也是很厚的了。经过消化，现在留在脑子里的精华，也就是简单的几条，这就称为由博返约，把厚书读薄了。

有人说：“学问，就是学习后大部分都忘了而剩下的东西。”《老子》还说：“为学日益，为道日损。”指的是：积累知识用加法，提炼规律用减法。由博返约的能力包含下列几个方面：

(1) 概括的能力

把一章内容概括成三言两语，对一门课理出它的主要脉络，描写人物能勾出特征，画龙会点睛。

会概括，会减法，是值得炫耀的。“我用十句话说清楚了人家一本书的内容以及人家一本书没有说清的内容”(尼采的自炫)。

会健忘才会真不忘。“一种健康的健忘，千头万绪简化为二三事，留在记忆里，节省了不少心力”(钱钟书)。

(2) 简化的能力

盲目简化——不分主次，乱剪乱砍。

合理简化——分清主次，剪枝留干。

选取结构计算简图是结构力学的基本功。不会简略估算、定性判断，是很危险的。

郑板桥写过一副对联，上联是“删繁就简三秋树”。树也会简化。会简化，才会过冬，才会立于不败之地。

(3) 提纲挈领的能力

学习积累的知识，要形成一个知识系统，要培养提纲挈领、统帅全局的能力，达到纲举目张、灵活驾驭的目的。

一本书中有许多章、节、知识点，这些都是“目”。要能够抓住指导全书的基本思路，统率全书的核心策略，贯穿全书的那根主线，这就是“纲”。举一纲而万目张。

有目有纲，纲举目张。这样才能放得开，提得起。才能进得去，出得来，还能深入浅出。

(4) 弃形取神的能力

“余画小鸡二十年，十年得形似，十年得神似”(齐白石)。画家讲究形似，更推崇神似。讲究弃形取神。

在学习和科学研究中同样要培养由表入里，弃形取神的能力：

个别到一般。舍弃千差万别的个性和特殊性，摘取其中的共性和普遍性。

具体到抽象。舍弃不同问题的具体性，提炼为一般原理的抽象性。

现象到规律。舍弃现象的表面形态，洞察出深藏的本质和内在的规律。

温故到创新。拆除旧观念的篱笆，标新立异，另辟新路，开拓新途径和新领域。

3. 善问

(1) 多问出智慧

学习中要多问，多打几个问号。“?”像一把钥匙，一把开启心扉和科学迷宫的钥匙。

学习中提不出问题是学习中最大的问题。从学生提出的问题可以了解他学习的深浅。发现了问题是好事，抓住了隐藏的问题是学习深化的表现。知惑才能解惑。学习和研究就是困惑和解惑的过程。正确敏锐地提出科学问题，是创新的开端。希耳伯特(D. Hilbert)1900年向数学界提出了23个有待解决的问题(称为Hilbert问题)，一百年来吸引了无数数学家的目光，为数学学科开疆辟土，缔造了20世纪数学的辉煌。

(2) 追问与问自己

重要的问题要抓住不放，要层层剥笋，穷追紧逼，把深藏的核心问题解决了，才能达到“柳暗花明”的境界。这就是提问中的减法。溯河到源，剥笋至心。追

到核心处，豁然得贯通。

问老师、问别人，更要问自己。

好老师注意启发性，引导思考，为学生留出思考的空间。学习时更要勤于思考，善于思考，为自己开辟思考的空间。

(3) 提问题与解问题

“提出一个问题往往比解决一个问题更为重要”(爱因斯坦)。

“老师出题目比学生解答要高明一步。希望我们中国的数学家出题目给外国人做，而不是跟着外国人走”(吴文俊)。

(4) 学问与学答

应试型教育，只强调“学答”(对已有答案的问题，背诵并重述其答案)。创新型教育，要学更要问(包括尚无答案的问题)。

“做学问，需学、问。只学答，非学问”(李政道)。

4. 会用

学而时习之(论语)。学习＝学＋习。

什么是“习”，通常把“习”理解为复习，更准确些，应把“习”理解为用，理解为实践。练习、实习、演习、习题、习作等都是“习”，也就是用：应用和实践。

“用”是“学”的继续、深化和检验。与“学”相比，“用”有更丰富的内涵。

多面性：把知识应用于解决各式各样的问题，把单面的知识化为多面的知识。

综合性：处理问题时，要综合应用多种方法和知识。分门别类地学，综合优选地用。

反思性：正面学，反面用。计算时由因到果，校核时由果到因。

跳跃性：循规蹈矩地学，跳跃式地用。

灵活性：初学未用的知识往往是呆板的，多方应用过的知识就变活了，用能生巧。

牢固性：反复应用过的知识是牢固的，经久难忘。

悟性：学习可以获得言传的知识，应用可以体验难以言传的悟性。

检验性：学来的知识是真懂、半懂还是不懂，考几道题就分辨出来了。

“理论是灰色的，生命之树常青。”这句话也可以用来比喻学和用的区别。

针对涉及工程计算的一些学科的情况，还要对“习题”和“校核”两个具体问题作些议论。

(1) 习题

做题练习，是学习工程计算学科的重要环节。不做一定数量的习题，就很难对基本概念和方法有深入的理解，也很难培养较好的计算能力。但是做题也要避免各种盲目性。例如：

不看书,不复习,埋头做题,这是一种盲目性。应当在理解的基础上做题,通过做题来巩固和加深理解。

贪多求快,不求甚解,这是另一种盲目性。有的习题要精做。1道题用3种方法做,往往比用1种方法做3道题更有收获。

只会对答数,不会自己校核和判断,这也是一种盲目性。要养成校核习惯,学会自行校核的本领。在实际工作中,计算人员要对自己交出来的计算结果负责。这种负责精神应当及早培养。

做错了题不改正,不会从中吸取教训,这又是一种盲目性。做错了题不改正,就是轻率地扔掉了一个良好的学习机会。特别不要放过一个似是而非的模糊概念,因为认识真理的主要障碍不是明显的谬误,而是似是而非的"真理"。错了,也要错个明白。

(2) 校核

计算的结果要经过校核。"校核"是"计算"中应有之义。没有校核过的计算书是未完成的计算书。

出错是难免的。重要的是要会判断、抓错和改错。判断是对计算结果的真伪性和合理性作出鉴定。抓错是分析错误根源,指明错在何处,"鬼"在哪里。把"鬼"抓出来。改错是提出改正对策,得出正确结果。改错不易,判断、抓错更难。

关于判断和校核,还可分为三个层次:细校、粗算和定性。

另法细校:细校是指详细的定量的校核。细校不是重算一遍,而是提倡用另外的方法来核算。这就要求校核者了解多种方法,掌握十八般武器,并能灵活地运用,选用最优的方法。

毛估粗算:粗算是指采用简略的算法对计算结果进行毛估,确定其合理范围。这就要求粗算者能分清主次,抓大放小,对大事不糊涂。毛估粗算有多种做法:选取简化计算模型,在公式中忽略次要的项,检查典型特例,考虑问题的极限情况等。

定性判断:定性判断是根据基本概念来判断结果的合理性,而不进行定量计算。试举力学中常用的几个例子:

采用量纲分析,判断所列方程是否有误。

根据物理概念,看答案的数量级和正负号是否正确。

根据误差理论,估计误差的范围。

根据互等定理,看计算结果是否合理。

根据上下限定理,看计算结果是否出格。

在渐近法和迭代法中,判断结果是否收敛。

在对称结构中,检查结果的对称性。

当参数变化时,看结果的相应变化是否合理。

在近似算法中，判断所得结果是偏于安全还是偏于不安全，并采用“前者宽，后者严”的不同标准。

不细算而能断是非，断案如神，既快又准，这是总工程师应具备的看家本领，也是每个工程师和有心人应及早学会的本领。这个“神”不是来自天上，而是来源于扎实的理论和积累的经验。

计算机引入结构力学后，增强了进行大型计算，分析大型结构的能力。在大型计算中，如果不会定性判断，不会抓错、改错，那是很危险的。计算机并不排斥力学理论，而是要求我们更深更活地掌握力学理论。

5. 创新

科学精神的精髓是求实创新。创新是学习的高境界。

(1) 创新与破旧

学习既要钻进去，洞察深藏的本质；还要走出来，发现新的天地。“以最大的精力打进去，以最大的勇气打出来”(李可染)。破茧化蝶，破茧是要有勇气的。

学习不能止于记诵和模仿。“学我者生，似我者死”(齐白石)。“似我”，就是从我这里走不出来。

会读书的人会把书读破，把书中的破绽揭示出来。“读书破万卷，下笔如有神”(杜甫)。只有读破了，才能读出新意，才会有神来之笔。

(2) 创新与求实

创新不能违反客观规律。在求实中创新，“出新意于法度之中”(苏轼)。在客观规律的容许之下，创造力有充分的自由活动空间。

(3) 创新意识

创新意识要贯穿在整个学习过程中，在加、减、问、用各个方面都要着眼于创新，有心于创新。

加：在继承中创新。每项创新成果都吸取了前人的成果。像牛顿那样站在巨人肩上才能看得更远。广采厚积是创新的基础。

减：在“去粗取精，弃形取神”的减法过程中要注意“去”和“弃”。在“推陈出新、破旧立新”的创新过程中要注意“推”和“破”。二者是相通的。

问：在已有知识中发现疑点，感到困惑，是走向解惑和创新的起点。创新是善问巧思的回报。

用：在应用和实践中对已有知识进行检验，发现其中的不足而加以改进，这就是创新。实践为创新提供了机遇。

6. 小结

把上面的议论梳理一下，归结为五句话：

加——广采厚积，织网生根(博学)。

减——去粗取精，弃形取神(学识)。

问——知惑解惑，开启迷宫（学问）。

用——实践检验，多用巧生（学习）。

创新——觅真理立巨人肩上，出新意于法度之中（读破）。

7．"三境界"与"两不足"

（1）学习的"三境界"

第一是读博——对应于"加法"，是学习的基础。

第二是读薄和读活——对应于"减法"、"善问"、"会用"，是学习的提炼和提升。

第三是读破——对应于"创新"（读出新意），是学习的升华和超越。

（2）《老子》论博

"博者不知，知者不博"（老子）。

注解：博是基础，很重要，但不是高境界。有真知灼见的是不会停留在博的低境界的。

（3）《西游记》的读薄和读破

读薄——把全书归结为八个字："八十一劫，一部残经"。（注：最后一劫的情节是：水怪翻船，经书下河，江岸晒书，经书残破。）

读破（超出作者原意，读出新意）——书，包括经书，本来就是残破的。这样才能发展，才有创新。（将小说《西游记》引申为《学习方法论》的形象化教材，想必是作者原先也没有想到的。）

（4）学而后知"两不足"

经过学习，才悟到"两不足"：一是自己已有的知识还不足；二是人类已有的知识还不足。一不足，需读博而读薄；二不足，需读破以创新。

*§1－6 结构力学求解器简介①

把繁琐交给求解器，我们留下创造力！

本书所附的《结构力学求解器》（SM Solver for Windows，简称求解器）是一个方便好用的计算机辅助分析计算软件（见所附光盘），其求解内容涵盖了本教材中所涉及的几乎所有问题，包括二维平面结构（体系）的几何组成、静定结构、超静定结构、位移、内力、影响线、自由振动、弹性稳定、极限荷载等。对所有这些问题，求解器全部采用精确算法给出精确解答。

---

① 由于用结构力学求解器求解结构力学问题不属于结构力学的教学基本内容，因此在本书（卷1）中有关此内容用加星号＊表示，以供各校选用。

有关求解器的安装和使用简介可以参见软件光盘上的相关文档和联机帮助，这里不作详细讲解。本书很多章节中会出现如何使用求解器的内容，供读者酌情选学或自学。由于本书主要将求解器当作工具来用，因此只在目录中列出其相关内容的标题（以便为读者提供一个循序渐进的向导），而具体内容则放到了光盘上，同时其内在的原理和算法将在其他教材（参见袁驷编著，《程序结构力学》）中介绍。

在结构力学的学习中，求解器可以提供多种功用和帮助，有待于读者去熟悉和发现，这里只列举几点。

1. 结构计算求解的利器

求解器首先是一个计算求解的强有效的工具。犹如计算器的功能是做数值计算，求解器的功能是做结构计算。任意平面结构输进求解器，鼠标一点，变形图和内力图即出。

2. 体验大结构的受力性能

求解器并非专为课堂上小问题的求解而设计的。有了求解器，即便是结构力学的初学者，也可以用求解器来方便地求解大结构的各类问题，以增强对大结构受力特性的直观感受和切实体验。

3. 求解传统方法难以求解的问题

本书中的传统方法并非都适用于精确求解大型实际结构，例如，几何构造分析的三角形法则只适用于符合该法则的体系，超静定结构分析方法大都假定结构无轴向变形等；而求解器则全无这些限制。

4. 演示和作图的工具

求解器可以用静态图形显示结构简图、变形图、内力图，还可以用动画显示机构模态、振型等动态图形。利用复制到剪贴板的功能，可以将结构简图、变形图、内力图以点阵图或矢量图的形式粘贴到 MS Word 或 MS PowerPoint 中，并可以方便地进行再编辑。

5. 让求解器当教师答疑

几何组成分析选不出刚片吗？静定桁架的截面法剖不出截面单杆？静定组合结构分析不知道从哪里开始下手？求解器的智能求解功能可以将求解步骤一步步地演示出来。

6. 定性分析的数值试验平台

将桁架的结点都设为刚结点，看看弯曲应力是不是次应力？对于多层刚架，强梁弱柱和强柱弱梁的受力特点有什么不同？梁的剪切变形是否小到可以忽略？这些都可以用求解器来做具体的试验和验证。

第2章 结构的几何构造分析

本章从几何构造的角度来讨论结构。

一个结构要能够承受各种可能的荷载，首先它的几何构造应当合理，它本身应是几何稳固的，要能够使其几何形状保持不变。反之，如果一个杆件体系本身为几何不稳固，不能使其几何形状保持不变，则它是不能承受任意荷载的。因此，从几何构造的角度看，一个结构应是一个几何形状不变的体系，简称几何不变体系。

进行结构的几何构造分析的一个目的，就是把杆件结构看成一个杆件体系，检查它是不是一个几何不变体系。为此，需要研究几何不变体系的组成规律。

本章讨论结构的几何构造分析时，只对平面杆件体系进行讨论，空间杆件体系的情况将在本书卷Ⅱ中讨论。

在平面体系的几何构造分析中，最基本的规律是三角形规律。规律本身是简单浅显的，但规律的运用则变化无穷。因此，学习本章时遇到的困难不在于学懂，而在于运用。

本章在全书中只是一个短小的前奏，只是从几何构造的角度讨论结构力学中的一个侧面，根本不牵涉到内力和应变。但是构造分析与内力分析之间又是密切相关的，本章内容将在后面许多章节中得到应用。

§2-1　几何构造分析的几个概念

1. 几何不变体系和几何可变体系

图2-1a所示为由两根竖杆和一根横杆绑扎组成的平面支架。结点A和B可取为铰结点；假定竖杆在地基内埋得很浅，支点C和D可取为铰支座。显然，这个支架是几何不稳固的，容易倾倒，如图中虚线所示。如果加上一根斜撑AD，就得到图2-1b所示的支架，这个支架是一个几何稳固的平面体系。

结构受荷载作用时，截面上产生应力，材料因而产生应变，结构发生变形。这种变形一般是微小的。在几何构造分析中，不考虑这种由于材料的应变所产生的变形。这样，杆件体系可以分为两类：

几何不变体系（图2-1b）——在不考虑材料应变的条件下，体系的位置和

形状是不能改变的；

几何可变体系（图 2-1a）——在不考虑材料应变的条件下，体系的位置和形状是可以改变的。

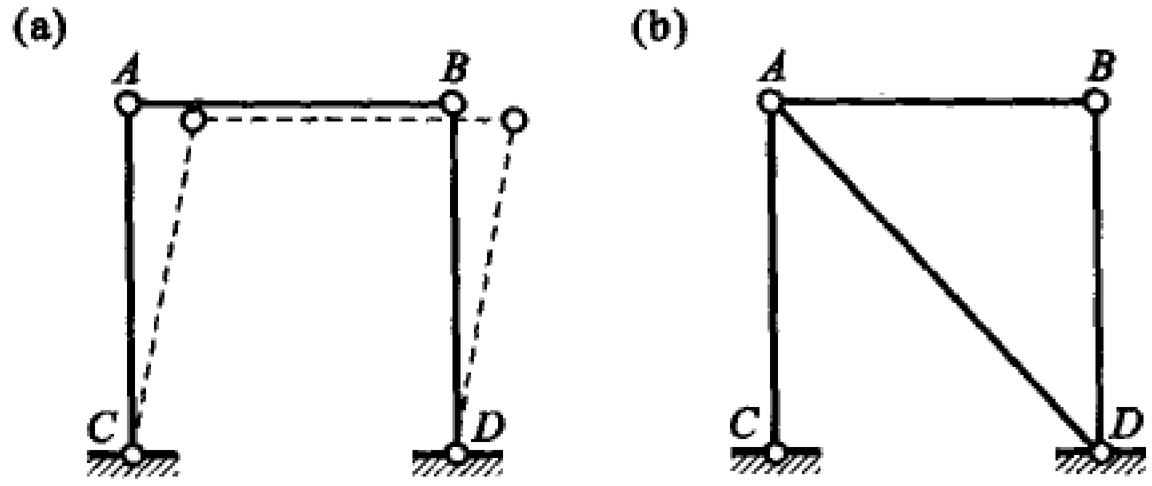


图　2-1

一般结构都必须是几何不变体系，而不能采用几何可变体系。几何构造分析的一个主要目的就是要检查并设法保证结构的几何不变性。

2. 自由度

图 2-2 所示为平面内一点 A 的运动情况。一点在平面内可以沿水平方向（x 轴方向）移动，又可以沿竖直方向（y 轴方向）移动。换句话说，平面内一点有两种独立运动方式（两个坐标 x、y 可以独立地改变）。因此，一点在平面内有两个自由度。

图 2-3 所示为平面内一个刚片（即平面刚体）由原来的位置 AB 改变到后来的位置 $A'B'$。这个刚片可以有 x 轴方向的移动 Δx，y 轴方向的移动 Δy，还可以有转动 $\Delta\theta$。由于一个刚片在平面内有三种独立的运动方式（三个坐标 x、y、θ 可以独立地改变），因此一个刚片在平面内有三个自由度。

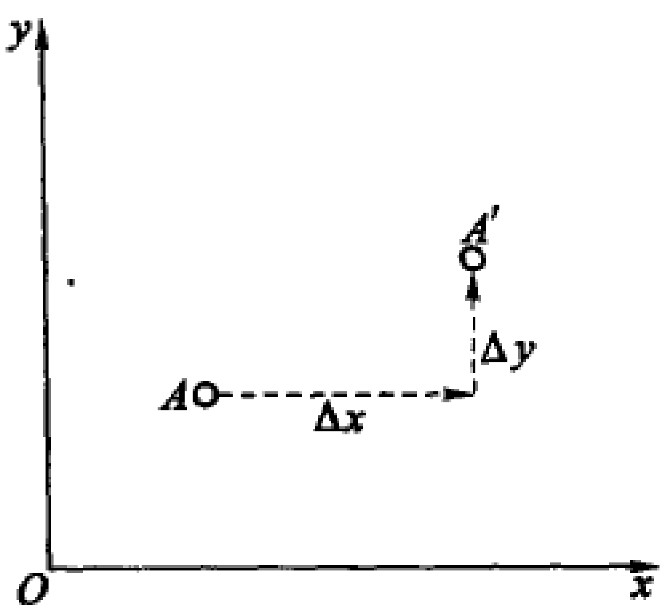


图　2-2

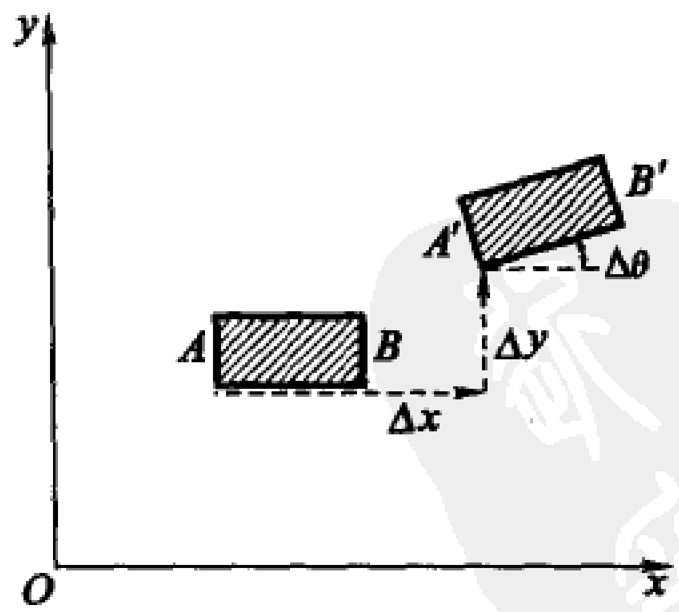


图　2-3

一般说来，如果一个体系有 n 个独立的运动方式，则这个体系有 n 个自由度。换句话说，一个体系自由度的个数，等于这个体系运动时可以独立改变的坐标的数目。

普通机械中使用的机构有一个自由度，即只有一种独立运动方式。一般工

程结构都是几何不变体系，其自由度的个数为零。凡是自由度的个数大于零的体系都是几何可变体系。

3．约束

在图 2－4a 中，梁 AB 用支杆 AC 与基础相连。没有支杆时，这个梁在平面内有三个自由度。加上支杆 AC 以后，梁 AB 只有两种运动方式：A 点沿以 C 为圆心、以 AC 为半径画的圆弧移动；梁绕 A 点转动。由此可见，支杆 AC 使梁的自由度由 3 减为 2，即支杆使梁的自由度减少一个。因此，一个支杆相当于一个约束。

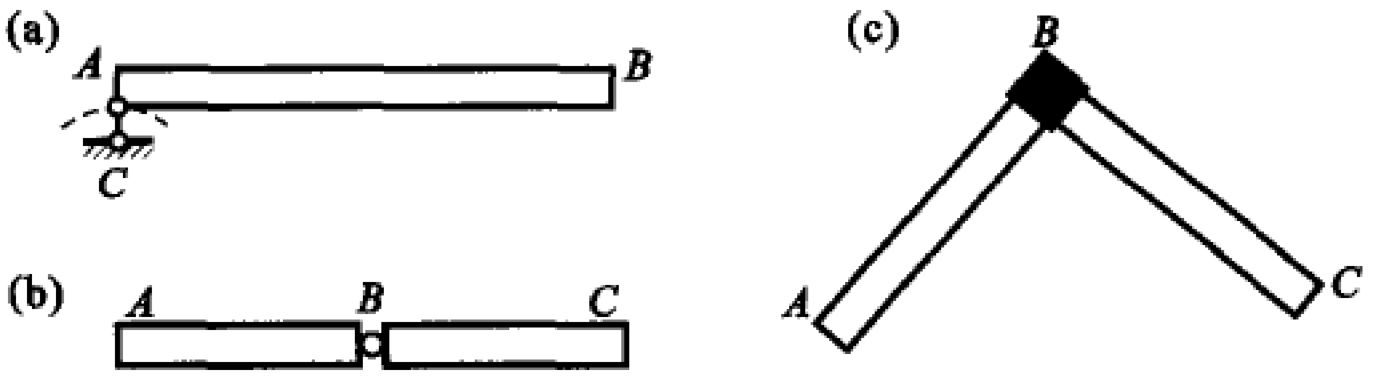


图 2－4

在图 2－4b 中，两个梁 AB 和 BC 用铰 B 连接在一起。两个孤立的梁在平面内共有 6 个自由度。用铰连接以后，自由度便由 6 减为 4：因为用三个坐标便可以确定梁 AB 的位置，然后梁 BC 只能绕 B 点转动，只需再用一个转角就可以确定梁 BC 的位置。由此可见，一个连接两个物体的铰使自由度减少两个，所以一个铰相当于两个约束。

图 2－4c 所示为两根杆件 AB 和 BC 在 B 点连接成一个整体，其中的结点 B 为刚结点。原来的两根杆件在平面内共有六个自由度，刚性连接成整体后，只有三个自由度，所以一个刚性结合相当于三个约束。

4．多余约束

如果在一个体系中增加一个约束，而体系的自由度并不因而减少，则此约束称为多余约束。

例如，平面内一个自由点 A 原来有两个自由度。如果用两根不共线的链杆 1、2 把 A 点与基础相连（图 2－5a），则 A 点即被固定，因此减少两个自由度。可见，链杆 1 或 2 都是非多余约束。

如果用三根不共线的链杆把 A 点与基础相连（图 2－5b），实际上仍只减少两个自由度。因此，这三根链杆中只有两根是非多余约束，而有一根是多余约束（可把三根链杆中的任何一根视为多余约束）。

由上述可知，一个体系中如果有多个约束存在，那么，应当分清楚：哪些约束是多余的，哪些约束是非多余的。只有非多余约束才对体系的自由度有影响，而多余约束则对体系的自由度没有影响。

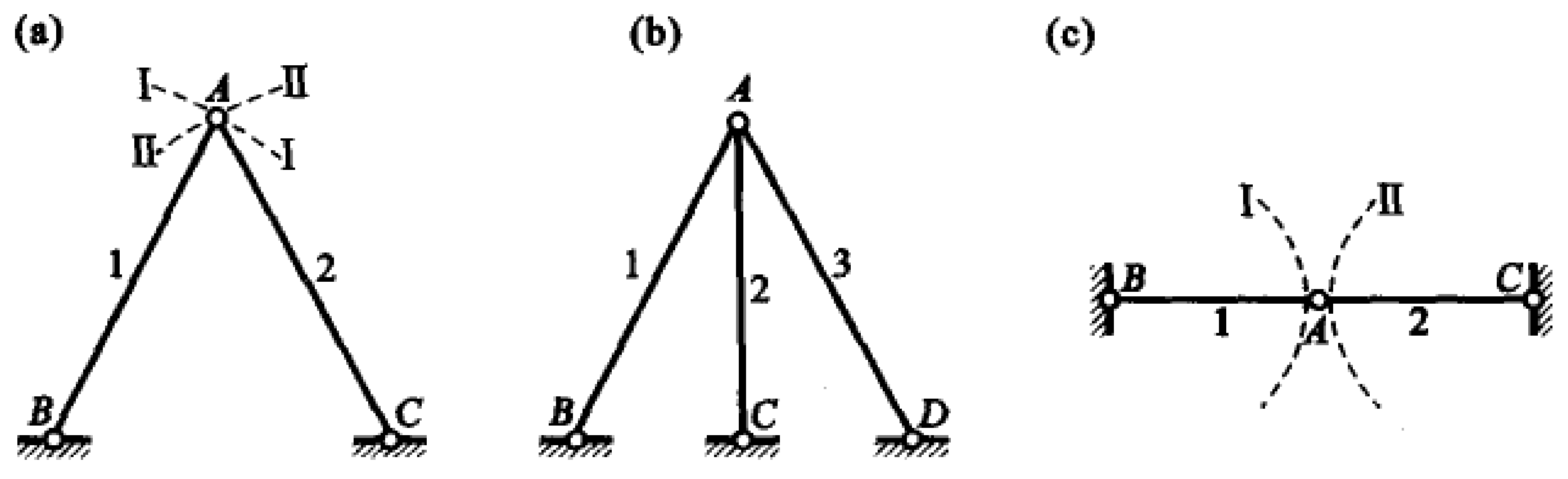


图　2－5

5. 瞬变体系

如图2－5a所示，用两根不共线的链杆可以把平面上的 A 点完全固定起来。但是，要特别注意图2－5c所示两根链杆彼此共线的情况。这种体系具有如下一些特点：

第一，从微小运动的角度来看，这是一个可变体系。为了说明这个特点，可将图2－5a与c中的体系作如下的对比。首先，设想在 A 点把链杆1与2分开，这时，链杆1上的 A 点可绕 B 点沿圆弧Ⅰ运动，链杆2上的 A 点可绕 C 点沿圆弧Ⅱ运动。然后，再将两个链杆在 A 点铰结在一起。在图2－5c中，由于两个圆弧在 A 点相切，故 A 点仍可沿公切线方向作微小的运动。与此相反，在图2－5a中，由于两个圆弧在 A 点不是相切而是相交，因此 A 点既不能沿圆弧Ⅰ运动，也不能沿圆弧Ⅱ运动。这样，A 点就被完全固定了。

第二，在图2－5c中，当 A 点沿公切线发生微小位移以后，两根链杆就不再彼此共线，因而体系就不再是可变体系。这种本来是几何可变、经微小位移后又成为几何不变的体系可称为瞬变体系。瞬变体系是可变体系的一种特殊情况。为了明确起见，可变体系还可进一步分为瞬变体系和常变体系两种情况。如果一个几何可变体系可以发生大位移，则称为常变体系，图2－1a为常变体系的例子。

第三，在图2－5c中，自由点 A 在平面内有两个自由度，增加两根共线链杆1、2把 A 点与基础相连接以后，A 点仍然具有一个自由度。可见，在链杆1、2这两个约束中有一个是多余约束。一般说来，在任一瞬变体系中必然存在多余约束。

6. 瞬铰

如图2－6a所示刚片Ⅰ在平面内本来有三个自由度，如果用两根不平行的链杆1、2把它与基础相连接，则此体系仍有一个自由度。现在对它的运动特点加以分析。由于链杆的约束作用，A 点的微小位移应与链杆1垂直，C 点的微小位移应与链杆2垂直。以 O 表示两根链杆轴线的交点。显然，刚片Ⅰ可以发生以 O 为中心的微小转动，O 点称为瞬时转动中心。这时，刚片Ⅰ的瞬时运动

情况与刚片Ⅰ在 O 点用铰与基础相连接时的运动情况完全相同。因此,从瞬时微小运动来看,两根链杆所起的约束作用相当于在链杆交点处的一个铰所起的约束作用。这个铰可称为瞬铰。显然,在体系运动的过程中,与两根链杆相应的瞬铰位置也随着在改变。

用瞬铰替换对应的两个链杆约束,这种约束的等效变换只适用于瞬时微小运动。

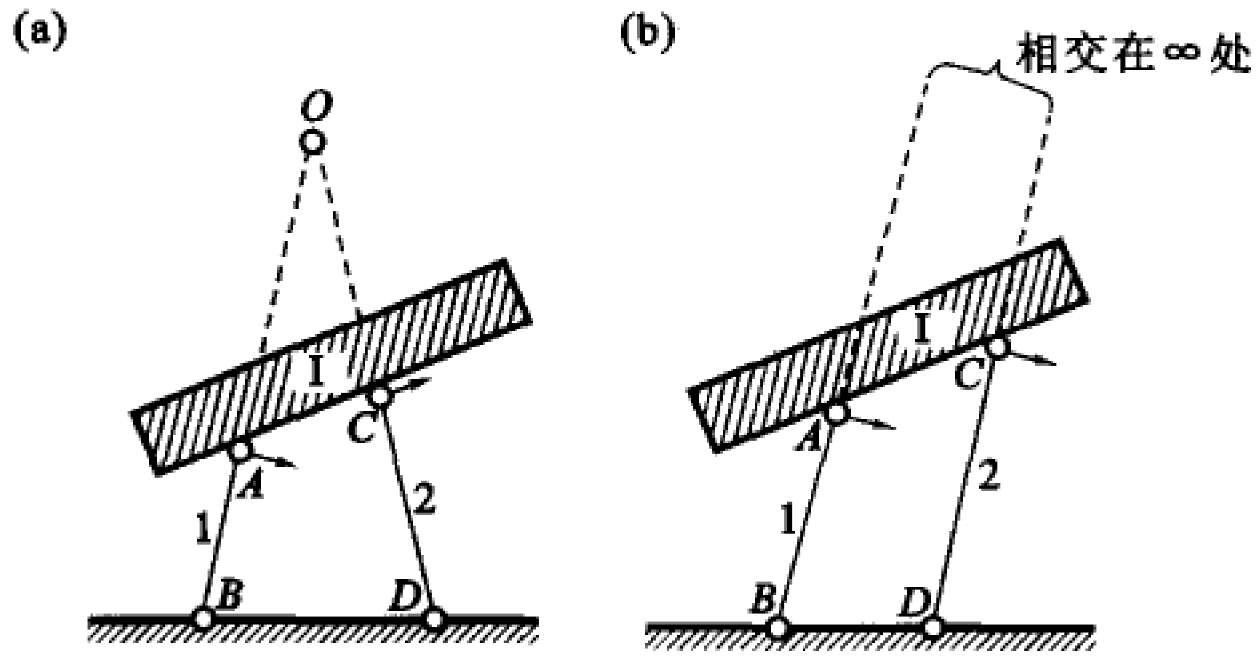


图　2-6

7. 无穷远处的瞬铰

如果用两根平行的链杆1、2把刚片Ⅰ与基础相连接(图2-6b),则两根链杆的交点在无穷远处。因此,两根链杆所起的约束作用相当于无穷远处的瞬铰所起的约束作用。由于瞬铰在无穷远处,因此绕瞬铰的微小转动就退化为平动,即沿两根链杆的正交方向产生平动(在图2-6b中,A 点和 C 点的微小位移都垂直于两根链杆)。

在几何构造分析中应用无穷远处瞬铰的概念时,可以采用射影几何中关于∞点和∞线的下列四点结论:

(1) 每个方向有一个∞点(即该方向各平行线的交点)。

(2) 不同方向有不同的∞点。

(3) 各∞点都在同一直线上,此直线称为∞线。

(4) 各有限点都不在∞线上。

关于上述四点结论的合理性,可结合几何构造分析的实例加以检验。

§2-2　平面几何不变体系的组成规律

本节讨论几何构造分析中的主要课题——无多余约束的几何不变体系的组

成规律。这里只讨论平面杆件体系最基本的组成规律(以后在§2－5和第11章中还要讨论复杂体系的几何构造分析问题)。

1. 一个点与一个刚片之间的连接方式

一个点与一个刚片(或基础)之间应当怎样连接才能组成既无多余约束又是几何不变的整体呢？图2－5a中的连接方式符合上述要求，而图2－5b和c中的连接方式则不符合(图2－5b中有多余约束，图2－5c为几何可变)。由此可得到下述规律(图2－7a)：

规律1　一个刚片与一个点用两根链杆相连，且三个铰不在一直线上，则组成几何不变的整体，且没有多余约束。

2. 两个刚片之间的连接方式

在图2－7a中，如果把链杆AB看作刚片Ⅱ，则得到图2－7b所示的体系，它表示两个刚片Ⅰ与Ⅱ之间的连接方式。这样，由规律1可得到下述规律：

规律2　两个刚片用一个铰和一根链杆相连接，且三个铰不在一直线上，则组成几何不变的整体，且没有多余约束。

3. 三个刚片之间的连接方式

在图2－7b中，如果再把链杆AC看作刚片Ⅲ，则得到图2－7c所示的体系，它表示三个刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ之间的连接方式。这样，由规律2可得到下述规律：

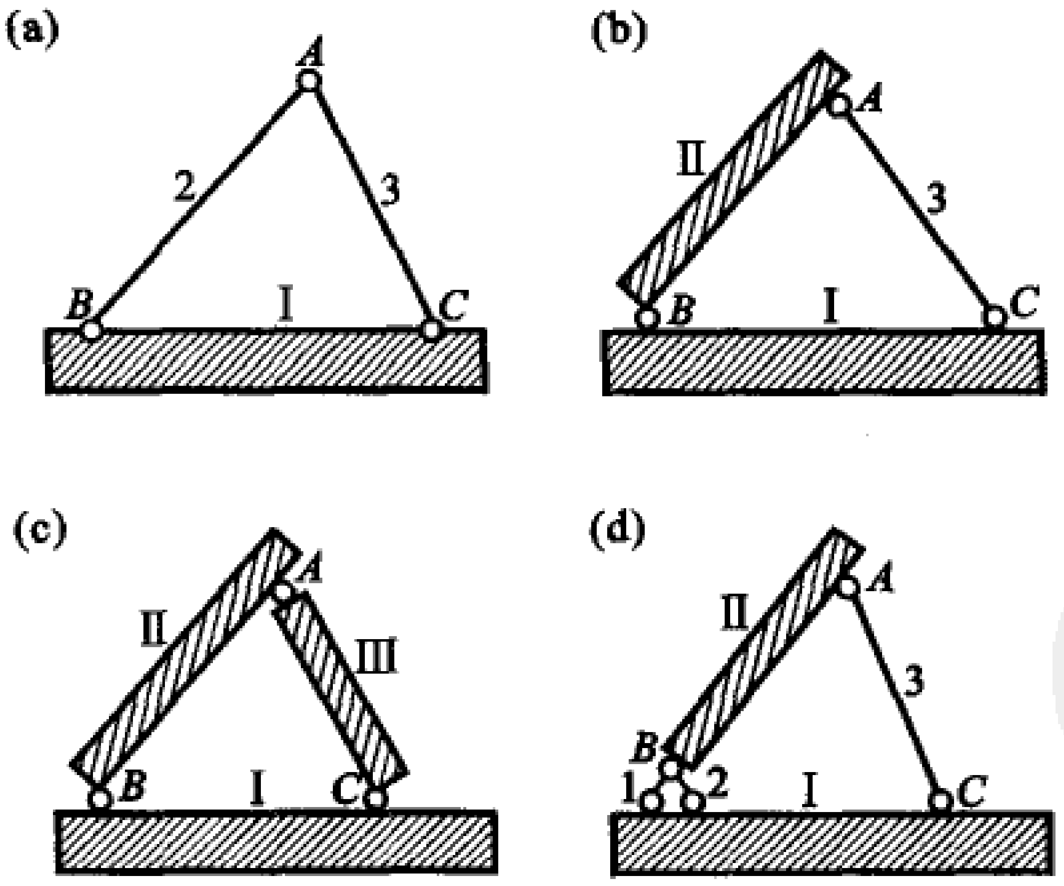


图　2－7

规律3　三个刚片用三个铰两两相连，且三个铰不在一直线上，则组成几何不变的整体，且没有多余约束。

上述三条规律虽然表述方式不同，但实际上可归纳为一个基本规律：如果三

个铰不共线，则一个铰结三角形的形状是不变的，而且没有多余约束。这个基本规律可称为三角形规律。

在上述三条规律中，如果把图2-7a、b、c中的刚片Ⅰ看作基础，则规律1说明一个点的固定方式，规律2说明一个刚片的固定方式，规律3说明两个刚片的固定方式。

前已指出，两根链杆的约束作用相当于一个瞬铰的约束作用。因此，三角形规律中的每一个铰，都可用相应的两根链杆来替换。这样，三角形规律还可用别的方式来表述。举例来说，如果把图2-7b中的铰B换成两根链杆1和2，即得到图2-7d所示的体系(链杆1与2相交于B点)。这样，由规律2可得到下述规律：

规律4 两个刚片用三根链杆相连，且三链杆不交于同一点，则组成几何不变的整体，且没有多余约束。

注意，规律4中提到"三链杆不交于一点"，规律2中提到"三铰不在一直线上"，这两种提法实际上表示同一个条件。由图2-7d看出，如果三根链杆1、2、3不交于一点，则链杆3必不通过1与2的交点B，因而三个铰A、B、C即不在一条直线上。因此，"三链杆不共点"与"三铰不共线"是完全等效的。

图2-8所示的体系不符合"三链杆不共点"的条件，它们都是瞬变体系。在图2-8a中，三链杆相交于同一点O，刚片Ⅱ相对于基础1可以绕O点作瞬时转动。在图2-8b中，三链杆彼此平行(即相交于无限远的一点)，刚片Ⅱ相对于基础1可以在垂直链杆的方向作瞬时移动(即绕无限远的一点作瞬时转动)。

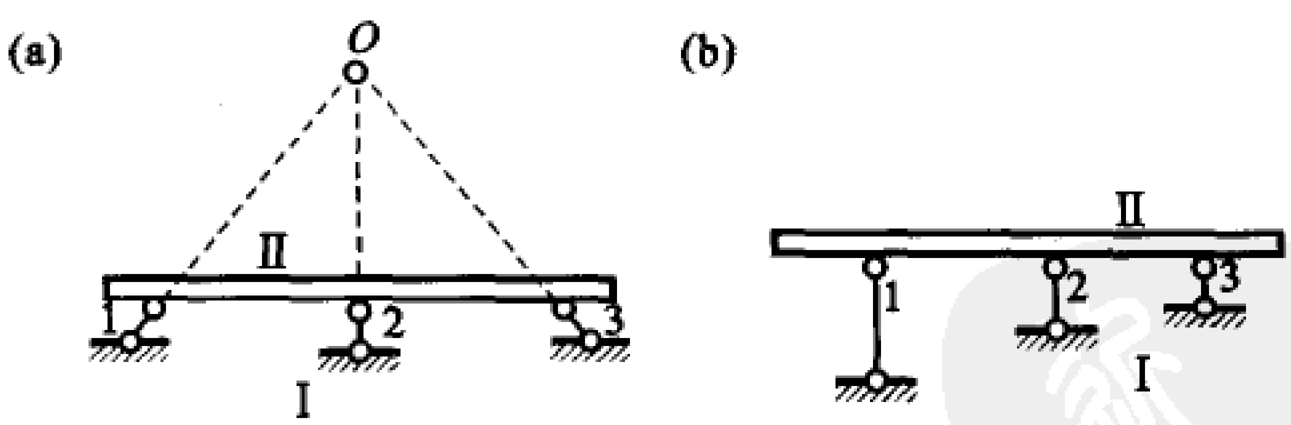


图 2-8

以上是平面杆件体系最基本的组成规律。虽然一共列了四条，但主要的是两点：三角形规律和瞬铰概念。

上述四种基本组成规律也可归结为三种基本装配格式：

(1) 固定一个结点的装配格式——在图2-7a中，用不共线的两根链杆2和3将结点A固定在基本刚片Ⅰ上，此格式简称为简单装配格式。

(2) 固定一个刚片的装配格式——在图2-7b、d中，用不共线的铰B和链杆3，或者用不共点的三个链杆1,2,3将一个刚片Ⅱ固定在基本刚片Ⅰ上，此格

式简称为联合装配格式。

(3) 固定两个刚片的装配格式——在图2-7c中,用不共线的三个铰 A、B、C 将两个刚片Ⅱ、Ⅲ固定在基本刚片Ⅰ上(三个铰将三个钢片两两相连),此格式简称为复合装配格式。

多次应用上述基本组成规律或基本装配格式,可以组成各式各样的几何不变,且无多余约束的体系。

装配的过程通常有两种:

(1) 从基础出发进行装配——先取基础作为基本刚片,将周围某个部件(一个结点,一个刚片或两个刚片)按照基本装配格式固定在基本刚片上,形成一个扩大的基本刚片。然后,由近及远地、由小到大地、逐个地按照基本装配格式进行装配,直至形成整个体系。图2-9是这种装配方式的例子。

图2-9a所示体系是从基础出发,多次应用简单装配格式所组成的,即用五对链杆(1,2)、(3,4)、(5,6)、(7,8)、(9,10)依次固定结点 A、B、C、D、E,其中每一对链杆都不共线。因此,整个体系为无多余约束的几何不变体系。

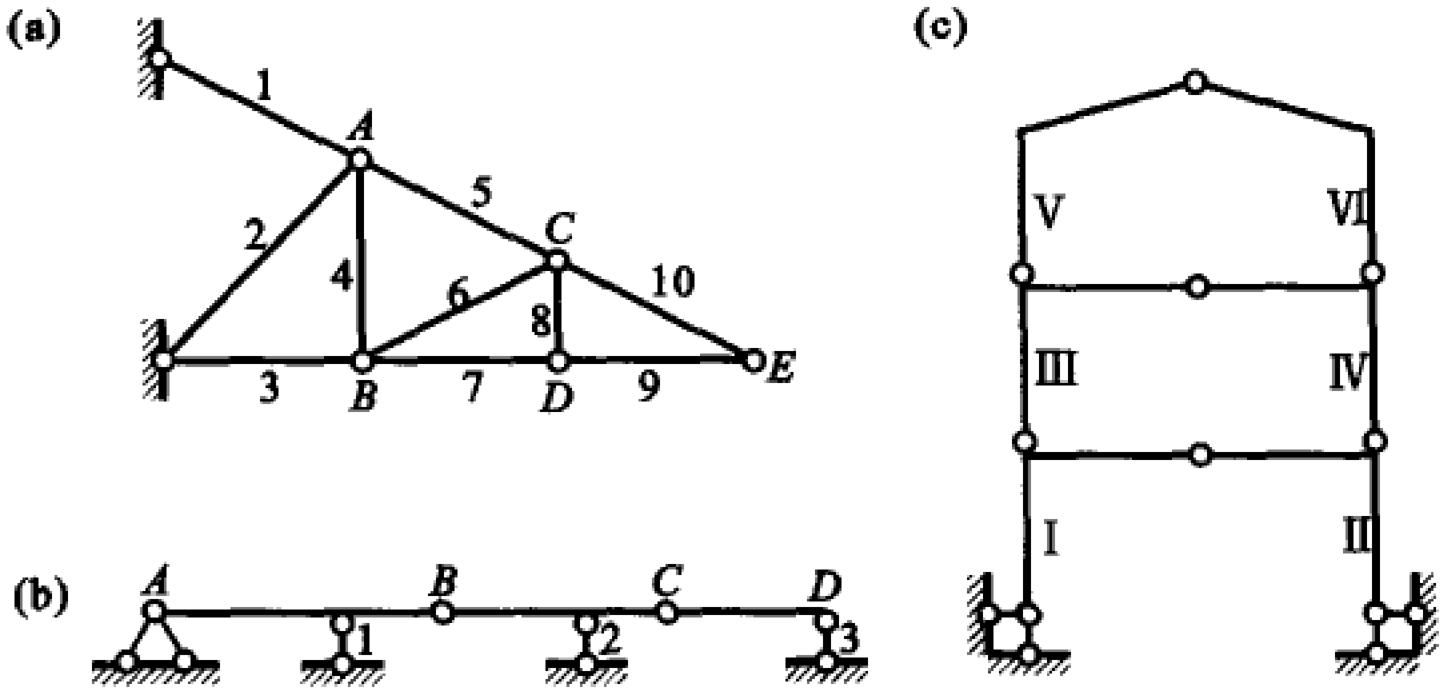


图 2-9

图2-9b所示体系是从基础出发,多次应用联合装配格式所组成的。组成的次序是先用铰 A 和链杆1将 AB 梁固定于基础,形成扩大的基本刚片。然后,再用铰 B 和链杆2将 BC 梁固定于扩大后的基本刚片。最后,用铰 C 和链杆3固定 CD 梁。在每个装配格式所用的约束中,链杆和铰都不共线。因此,整个体系为无多余约束的几何不变体系。

图2-9c所示体系是从基础出发,多次应用复合装配格式所组成的。组成的次序是先将刚片Ⅰ、Ⅱ固定于基础,由于所用的三个铰不共线,且在三个刚片间为两两相连,因此形成一个扩大的基本刚片,且无多余约束。然后,用同样格式依次固定(Ⅲ、Ⅳ)和(Ⅴ、Ⅵ)。因此,整个体系为无多余约束的几何不变体系。

(2) 从内部刚片出发进行装配——先在体系内部选取一个或几个刚片作为

基本刚片，将其周围的部件按照基本装配格式进行装配，形成一个或几个扩大的基本刚片。最后，将扩大的基本刚片再与地基装配起来，从而形成整个体系。这种装配方式的例子如图 2－10 所示。

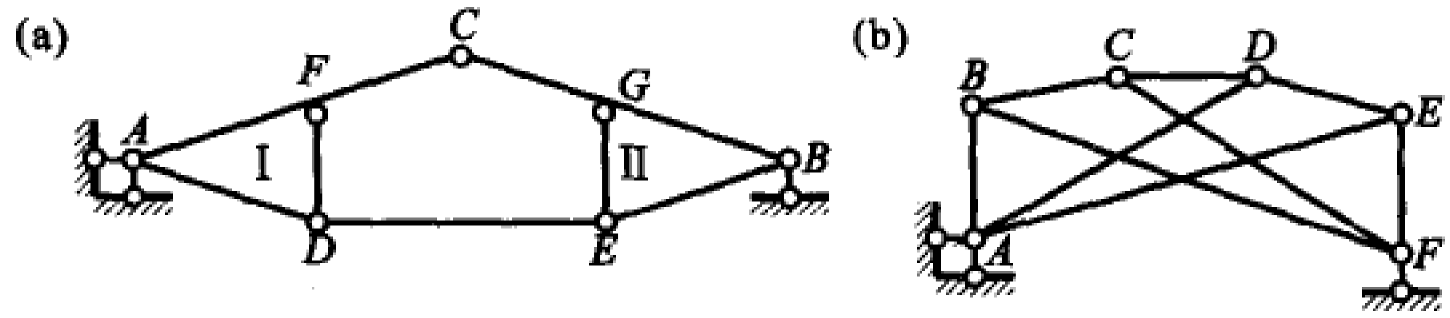


图　2－10

首先，分析图 2－10a 中的体系。左边三个刚片 AC、AD、DF 由不共线的三个铰 A、D、F 相连，组成一个无多余约束的大刚片，称为Ⅰ。同理，右边三个刚片 BC、BE、EG 组成一个大刚片，称为Ⅱ。大刚片Ⅰ与Ⅱ之间由不共线的铰 C 和链杆 DE 相连，组成一个无多余约束的更大的刚片。最后，用不共点的三根支杆固定于基础。因此，整个体系为几何不变，且无多余约束。

其次，分析图 2－10b 中的体系。三角形 BCF 和 EDA 可看作两个大刚片，它们之间由不共点的三根链杆 AB、CD、EF 相连，组成一个更大的刚片。最后，用不共点的三根支杆固定于基础。因此，整个体系为几何不变，且无多余约束。

例 2－1　试分析图 2－11 所示体系的几何构造。

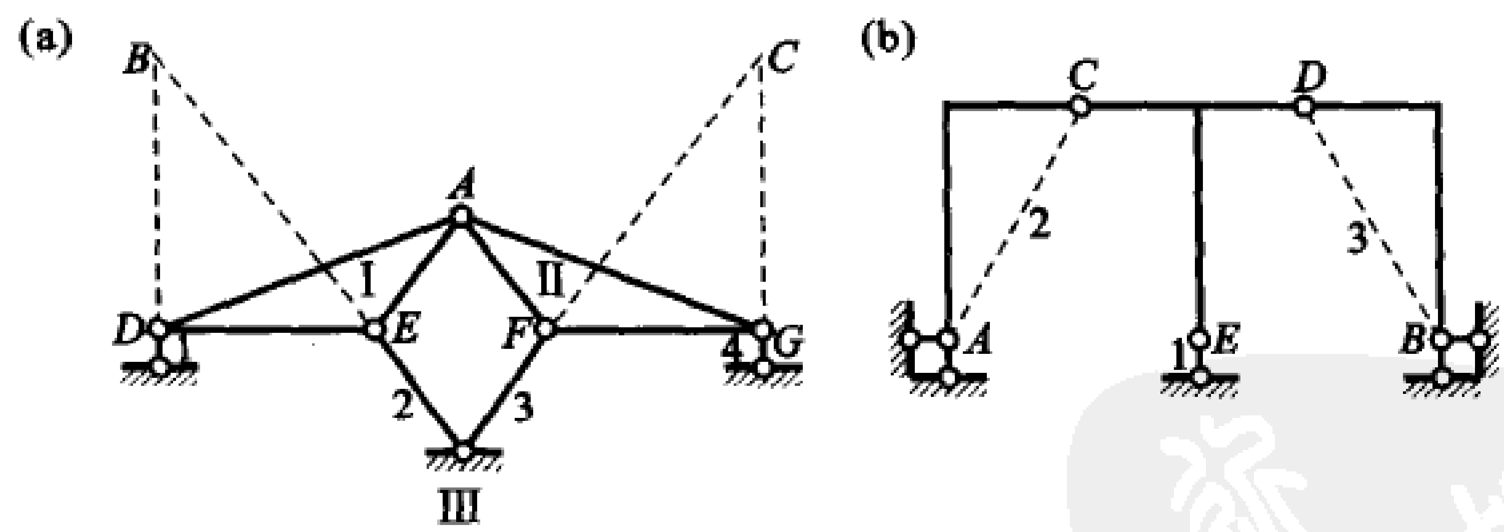


图　2－11

解　(1) 分析图 2－11a 中的体系

首先，三角形 ADE 和 AFG 是两个无多余约束的刚片，分别以Ⅰ和Ⅱ表示。Ⅰ与基础Ⅲ间的链杆 1、2 相当于瞬铰 B，Ⅱ与基础Ⅲ间的链杆 3、4 相当于瞬铰 C。如 A、B、C 三个铰不共线，则体系为无多余约束的几何不变体系。否则，体系为几何瞬变体系。

(2) 分析图 2－11b 中的体系

先把折线杆 AC 和 BD 用虚线表示的链杆 2 与 3 来替换，于是 T 形刚片

CDE 由三个链杆 1、2、3 与基础相连。如三链杆共点,则体系是瞬变的。否则,体系为无多余约束的几何不变体系。

例 2-2　试分析图 2-12 所示体系的几何构造。

解　(1) 分析图 2-12a 中的体系

把刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ看作对象。Ⅰ与Ⅱ之间由链杆 *AB* 和 *DE* 连接,相当于一个瞬铰在 $O_{\text{I,II}}$ 点。同理,Ⅱ与Ⅲ之间由瞬铰 $O_{\text{II,III}}$ 相连,Ⅰ与Ⅲ之间由瞬铰 $O_{\text{I,III}}$ 相连。由于三个瞬铰不共线,因此体系内部为几何不变,且无多余约束。作为一个整体,体系对地面有三个自由度。

(2) 分析图 2-12b 中的体系

可采用同样方法进行分析。但是,由于三个瞬铰共线,故体系内部也是瞬变的。

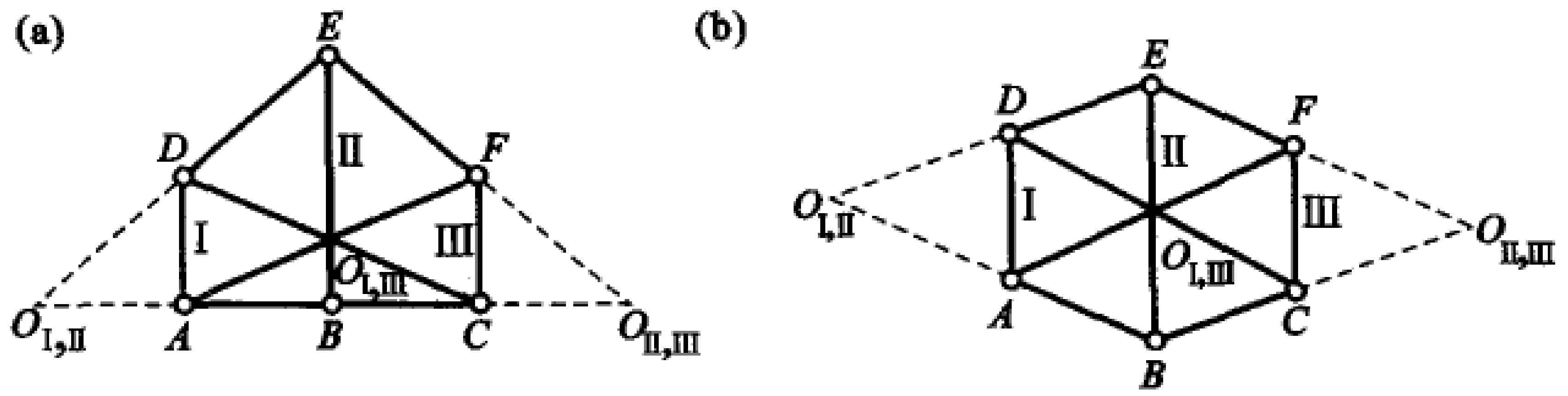


图　2-12

例 2-3　试利用无穷远瞬铰的概念,分析图 2-13 所示各三铰拱的几何不变性。

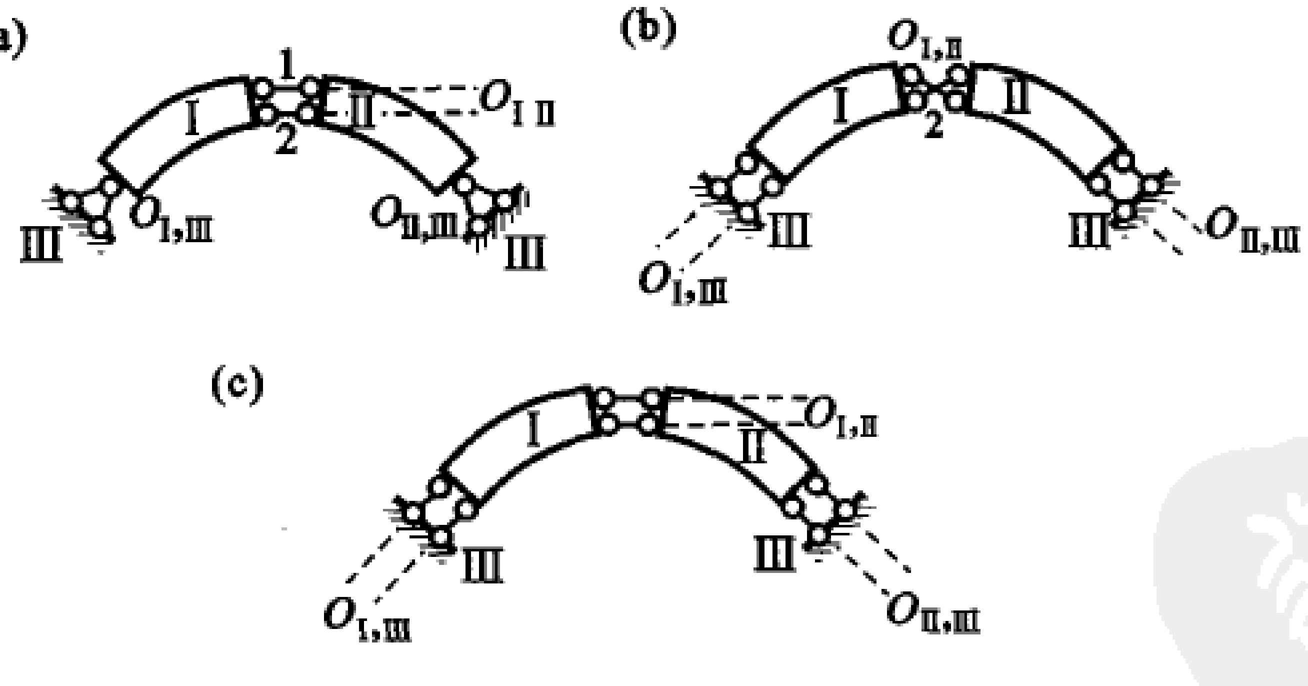


图　2-13

解　利用无穷远瞬铰分析几何构造时,可以应用射影几何中关于∞点和∞线的四点结论。

(1) 分析图 2-13a 中的体系

刚片Ⅰ、Ⅱ与基础Ⅲ之间用三个铰 $O_{\text{I,II}}$、$O_{\text{II,III}}$、$O_{\text{I,III}}$ 两两相连,其中 $O_{\text{I,II}}$ 是平行链杆 1、2 对应的无穷远瞬铰。如果铰 $O_{\text{I,III}}$ 与铰 $O_{\text{II,III}}$ 的连线与链杆 1、2 平行,则三个

铰共线，体系是瞬变的。否则，体系为几何不变，且无多余约束。

(2) 分析图 2－13b 中的体系

刚片Ⅰ、Ⅱ与基础Ⅲ之间用三个铰两两相连，其中 $O_{Ⅰ,Ⅲ}$ 和 $O_{Ⅱ,Ⅲ}$ 是两个不同方向的无穷远瞬铰，它们对应于∞线上两个不同的点。铰 $O_{Ⅰ,Ⅱ}$ 对应于有限点。由于有限点不在∞线上，因此三个铰不共线，体系为几何不变，且无多余约束。

(3) 分析图 2－13c 中的体系

刚片Ⅰ、Ⅱ与基础Ⅲ之间的三个铰都在无穷远点。由于各∞点都在同一直线上，因此体系是瞬变的。

通过以上几个例题，可以归纳出以下几点：

(1) 体系通常是由多个构造单元逐步形成的，即从第一个构造单元开始，然后按照某种顺序，把其他构造单元逐个地装配起来。在构造分析中，通常先找出一个几何不变的部分作为第一个构造单元，然后在其基础上扩大、装配，把由构造单元到体系的装配过程分析清楚。

每一个体系的装配过程都有自己的特点。在图 2－9a、b、c 中，装配过程是从地基上开始的，其中图 2－9a 的第一个构造单元是固定结点 A，图 2－9b 的第一个构造单元是将刚片 AB 固定于地基上，图 2－9c 的第一个构造单元是将刚片Ⅰ和Ⅱ固定在地基上。在图 2－10a、b 中，体系有三根不共点的支杆与地基相连，正好约束了体系对地面的三个自由度。因此，装配过程是从体系内部开始的，其中图 2－10a 的第一个构造单元是刚片Ⅰ或Ⅱ，图 2－10b 的第一个构造单元是三角形 BCF 或 EDA。

(2) 要注意约束的等效替换。例如，在图 2－11a 和 2－12a、b 中，联系两个刚片的两链杆用相应的瞬铰来替换；图 2－11b 中，复杂形状的连接杆用直线链杆来替换。

(3) 有的体系只有一种装配方式，如图 2－9b、c 所示。有的体系却可有几种装配方式，如图 2－9a 所示。又如在图 2－12a 或 b 中，还可以把 AF、BE、CD 看作具有自由度的对象，或者将 DE、AF、BC 看作具有自由度的对象，等等。还有一些体系的几何构造比较复杂，不是按图 2－7 所示的简单方式组成的(例如第 3 章中的复杂桁架)，有关这类体系的构造分析可采用其他方法(例如 §2－5 中用求解器求解的计算机方法和第 11 章中的零载法)。

§2－3 平面杆件体系的计算自由度

运用上节的三角形规律，对一些常见的体系能够进行构造分析，并对下面两个问题能够作出定量的回答：

(1) 体系是否几何可变？自由度的个数 S 是多少？

(2) 体系有无多余约束？多余约束的个数 n 是多少？

实际上有一些复杂体系并不是按照三角形规律组成的，如何对它们进行构造分析，如何求出它们的 S 和 n，需要作进一步的讨论。为此，引进计算自由度数 W 的概念，然后根据 W 来得出关于 S 和 n 的一些定性的结论。

在给出 W 的定义以前，先把自由度数 S 的算法介绍如下：体系是由部件加上约束组成的。首先设想体系中各个约束都不存在，在此情况下计算各部件的自由度数的总和 a；其次在全部约束中确定非多余约束数 c；最后将两数相减，得出体系的自由度数 S 如下：

$$S = a - c \tag{2-1}$$

式(2－1)的概念非常简单，但应用时却有困难，即事先需要分清楚：在全部约束中，究竟哪些是非多余约束，哪些是多余约束。这个问题牵涉到体系的具体构造。体系的构造愈复杂，这个问题愈难于解决。为了回避这个困难，现定义一个新参数 W 如下：

$$W = a - d \tag{2-2}$$

这里，d 是全部约束的总数。上面两个式子外表很相似，但后者要简单得多，因为在式(2－2)中只需要算出全部约束的总数 d，而在式(2－1)中却需要算出非多余约束数 c，从而需要研究哪些约束是多余约束这个难题。

由于全部约束数 d 与非多余约束数 c 的差数是多余约束数 n，因此由式(2－1)减去式(2－2)，即得

$$S - W = n \tag{2-3}$$

这就是计算自由度数 W、自由度数 S、多余约束数 n 三者之间的关系式。如果三个参数中有两个为已知，则由此式即可求出第三个参数。

由于自由度数 S 与多余约束数 n 都不是负数，即 $S \geqslant 0$，$n \geqslant 0$，因此由式(2－3)可得出下面两个不等式：

$$S \geqslant W \tag{2-4}$$

$$n \geqslant -W \tag{2-5}$$

也就是说，W 是自由度数 S 的下限，而($-W$)则是多余约束数 n 的下限。

下面由式(2－2)导出关于 W 的两种具体算法。在推导以前，还需对式(2－2)中的部件和约束这两个概念作进一步的说明。

在式(2－2)中，部件可以是点，也可以是刚片。这里，要注意刚片的内部是否有多余约束。图 2－14a 是内部没有多余约束的刚片，而图 2－14b、c、d 则内部分别有 1、2、3 个多余约束的刚片，它们可看作在图 2－14a 的刚片内部分别附加了一根链杆或一个铰结或一个刚结。在式(2－2)中，作为部件的刚片是指内部没有多余约束的刚片，如果遇到内部有多余约束的刚片，则应把它变成内部无

多余约束的刚片，而它的附加约束则在计算体系的约束总数时应当考虑进去。

约束可分为单约束和复约束。两个刚片Ⅰ、Ⅱ间的结合(图2-15a)为单结合。三个刚片间的结合(图2-15b)相当于两个单结合，即刚片Ⅰ与Ⅱ间的单结合及刚片Ⅱ与Ⅲ间的单结合。一般说来，n 个刚片间的结合相当于$(n-1)$个单结合。

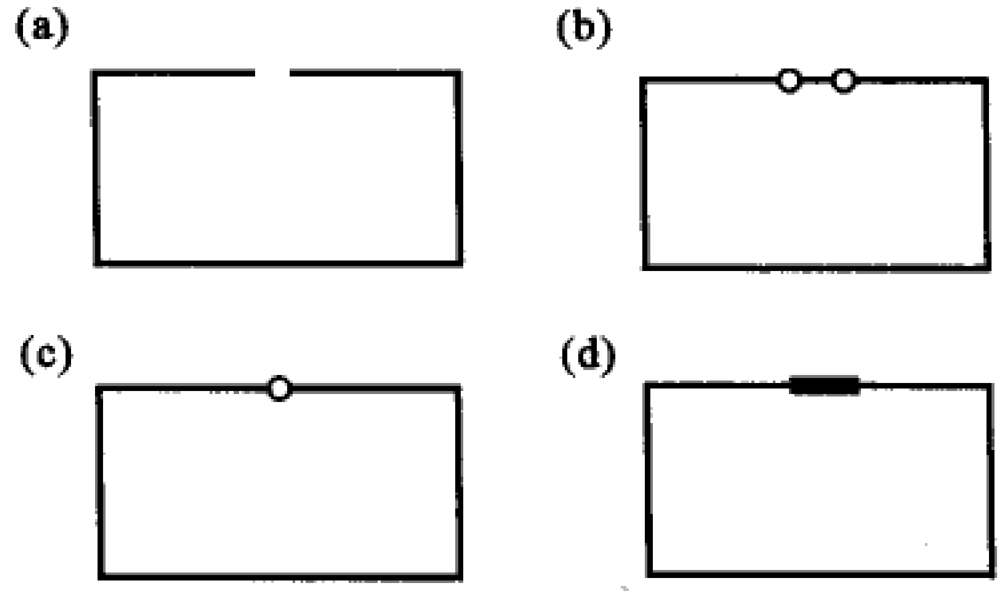


图　2-14

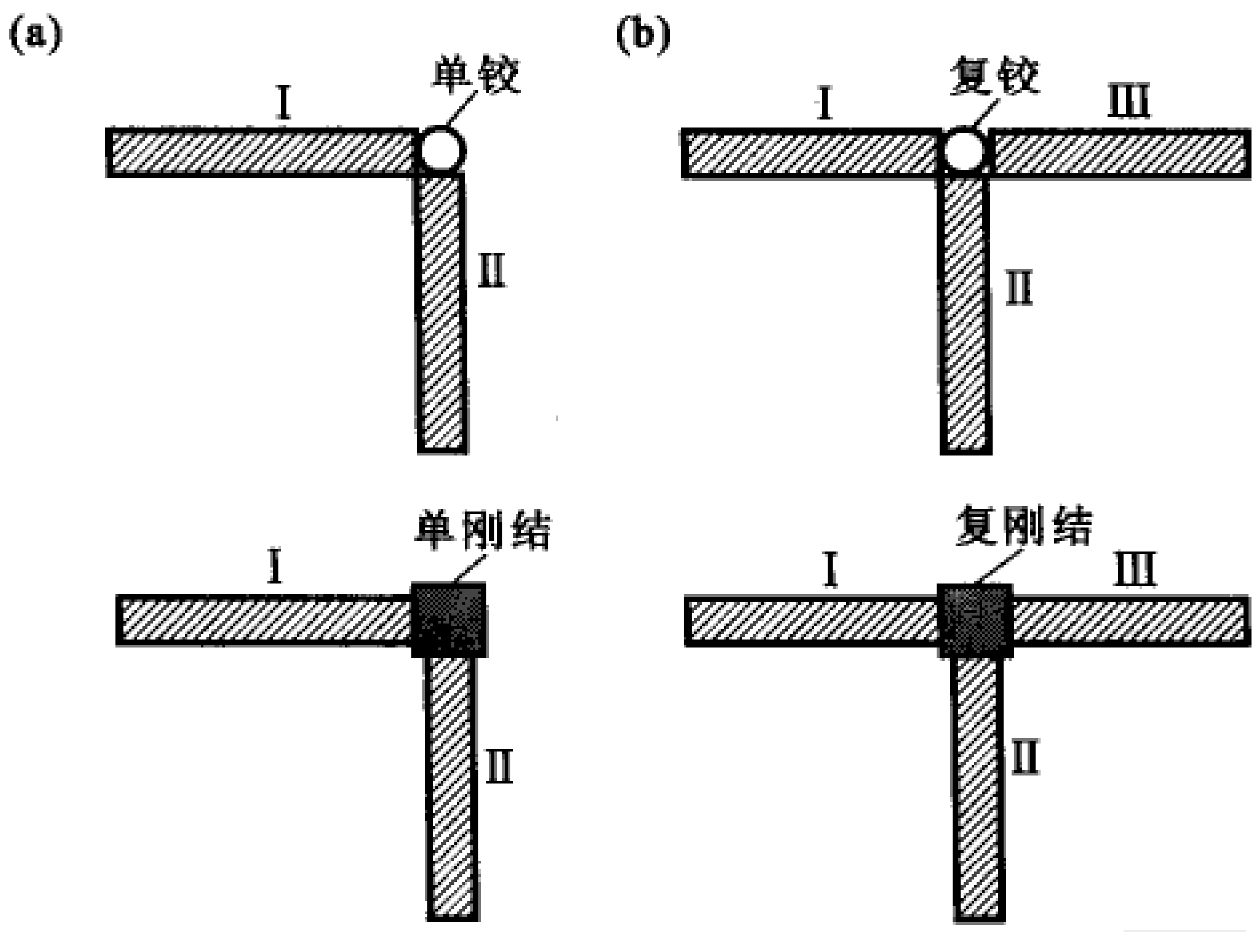


图　2-15

连接两点的链杆(图2-16a)称为单链杆，相当于一个约束。连接三点的链杆(图2-16b)将原来结点的六个自由度减少为刚片的三个自由度，相当于三个约束，即相当于三根单链杆。一般说来，连接 n 个点的复链杆相当于 $2n-3$ 个单链杆。



图　2-16

先介绍第一种算法。把体系看作由许多刚片受铰结、刚结和链杆的约束而组成的。以 m 表示体系中刚片的个数，则刚片的自由度个数总和为

$3m$。计算约束总数时，体系中如有复约束，则应事先把它折合成单约束；刚片内部如有多余约束，也应把它们计算在内。以 g 代表单刚结个数，以 h 代表单铰结个数，以 b 代表单链杆根数，则约束总数为 $3g+2h+b$。因此，体系的计算自由度数 W 可表示为

$$W=3m-(3g+2h+b) \tag{2-6}$$

再介绍另一种算法。把体系看作由许多结点受链杆的约束而组成的。体系中如有复链杆，则应事先把它们折合成单链杆。以 j 代表结点个数，以 b 代表单链杆个数，则 W 可表示为

$$W=2j-b \tag{2-7}$$

以上两式都是由式(2-2)导来的，只是在体系中选取部件的观点有所不同。在式(2-6)中，选取的部件都是刚片，在式(2-7)中，选取的部件都是结点。显然，除这两种算法外，还可以采用混合法。这时，计算公式即为

$$W=(3m+2j)-(3g+2h+b) \tag{2-8}$$

由式(2-6)、(2-7)或(2-8)算出的 W 值可能为正、为负或者为零。根据算出的 W 值，还不能得出自由度数 S 和多余约束数 n 的确切值，但可以得出它们的差值 $S-n$，也可以得出 S 和 n 的下限值，从而得出如下的定性结论：

若 $W>0$，则 $S>0$，体系是几何可变的。

若 $W=0$，则 $S=n$，如无多余约束则为几何不变，如有多余约束则为几何可变。

若 $W<0$，则 $n>0$，体系有多余约束。

例 2-4 试求图 2-10a 所示体系的 W。

解 按式(2-6)计算。刚片数 $m=7$，由于复铰 D 和 E 各相当于两个单铰，折算后全部单铰个数 $h=9$，支杆数 $b=3$，刚结个数 $g=0$，因此

$$W=3m-2h-b=3\times7-2\times9-3=0$$

再按式(2-7)计算。结点数 $j=7$，由于复链杆 AC 和 BC 各相当于 3 个单链杆，折算后全部单链杆个数 $b=14$，因此

$$W=2j-b=2\times7-14=0$$

两种算法得出的结果相同。

例 2-5 试求图 2-17a 所示体系的 W。

解 把图 2-17a 所示体系的全部支座去掉以后，剩下的是一个内部有多余约束的刚片。如果再在截面 G 处切开，这样才变为无多余约束的刚片，如图 2-17b 所示。按式(2-6)计算，刚片数 $m=1$，链杆个数 $b=4$，铰结数 $h=0$，A、B、G 三处的单刚结数 $g=3$（这里，把 A 和 B 处的固定支座看作杆件与基础间的刚结合），因此

$$W=3m-(3g+2h+b)=3\times1-(3\times3+2\times0+4)=-10$$

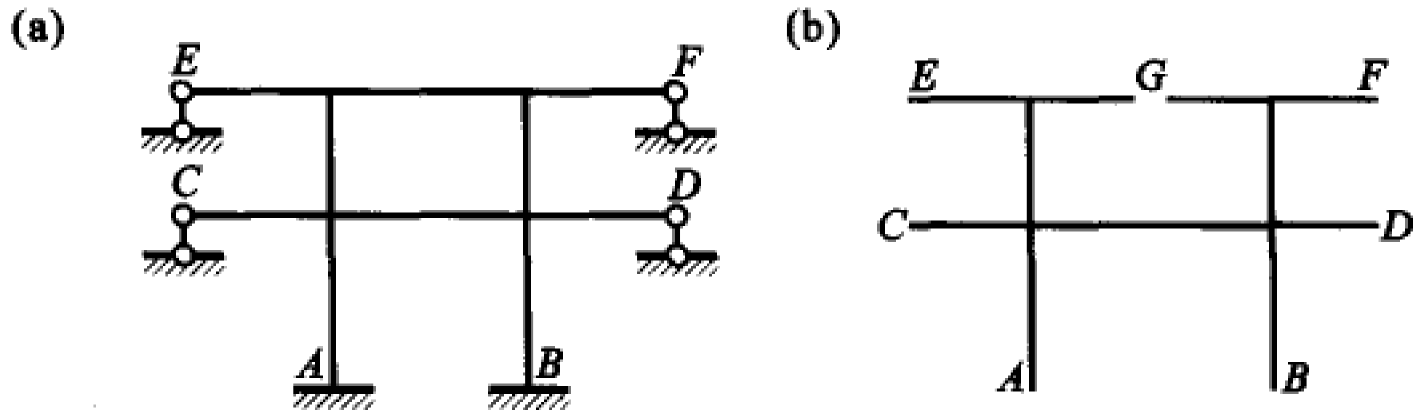


图　2-17

由于这个体系显然是几何不变的，故可知自由度数 $S=0$。因此，由式(2-3)可求出多余约束数 n 如下：

$$n=S-W=0-(-10)=10$$

这是一个具有10个多余约束的几何不变体系。

例2-6　试求图2-12a、b所示两个体系的 W。

解　这两个体系都是全部由链杆组成的铰结体系。用式(2-7)计算 W 比较方便。由这两个体系可得下列相同的数字结果：结点数 $j=6$，简单链杆数 $b=9$。因此，

$$W=2j-b=2\times6-9=3$$

这里，由于体系没有连接到地基，作为一个整体，相对于地基有三个自由度。所以，这两个体系的内部计算自由度数都是 $W-3=0$。如果希望进一步确定体系的内部自由度数 $S-3$，则还需进行几何构造分析。根据例2-2中进行的几何构造分析可知：图2-12a是一个内部几何不变的，且无多余约束的体系，故知 $S-3=0$，且 $n=0$。此外，又知图2-12b是一个内部瞬变的，且有多余约束的体系，故知 $S-3=n>0$。

*§2-4　在求解器中输入平面结构体系

本节讨论如何在求解器中输入结构体系，具体介绍了求解器中坐标系的定义、虚拟刚结点的概念，并用实际输入的例题说明了如何定义结点、单元和结点支座。

详细内容见所附光盘相应章节。

*§2-5　用求解器进行几何构造分析

本节讨论如何用求解器进行几何构造分析，具体介绍了求解器的两种求解

模式：

(1) 自动求解：直接给出完备的解答结果，适用于所有问题，也是一个方便的研究工具；

(2) 智能求解：模仿人工手算给出具体的求解步骤，为学生学习提供一位指导“教师”。

详细内容见所附光盘相应章节。

§2－6　小　　结

杆件结构是由众多杆件组成的。本章从几何构造的角度讨论杆件结构的合理组成规律，以及静定结构与超静定结构在几何构造上的区别。

结构力学主要是研究杆件结构的受力状态和变形状态，因此通常把杆件看成变形体，把杆件结构看成由变形体组成的体系。在本章中由于讨论的问题不同，因此把杆件当作刚体，把杆件体系看作刚体组成的体系，这一点应加以注意。

有的刚体体系在几何构造上不合理，不能保证体系的几何不变性，因而不能作为结构。研究杆件结构的合理组成规律，就是把结构看成一个刚体体系，并研究如何保证这个体系成为一个几何不变体系。

本章主要内容可归纳为下列四点。

1. 几何构造分析的两个主要问题

对杆件体系进行几何构造分析，主要是讨论两个问题：

(1) 判定体系是否可变，确定体系自由度的个数 S。

(2) 判定体系中有无多余约束，确定多余约束的个数 n。

对杆件结构进行几何构造分析，主要是解决两个问题：

(1) 结构应是一个几何不变体系，其自由度数 S 应等于零。

(2) 结构分为静定和超静定两类，它们的标志分别为 $n=0$ 和 $n>0$。

2. 几何构造分析中采用的方法

对平面体系进行几何构造分析，可采用两种方法：

(1) 经典方法

主要作法是多次应用三角形规律及其四种形式，由局部到整体，完成整个体系的装配过程和分析过程。这种作法的特点是：直观灵巧，便于分析常规体系，但不便于分析复杂体系，也不便于编制计算程序。

辅助作法是求出体系的计算自由度数 W，从而得到关于自由度数 S 和多余约束个数 n 的下限公式。这种作法的特点是：W 的算式很简单，但单靠这种作法不能求出 S 和 n 的确定值。如果把上述主要作法和辅助作法结合起来，互相

配合，有时会收到好的效果。

零载法是分析复杂体系的经典方法，将在第11章中介绍。

(2) 计算机方法

在求解器中采用的是一种便于编制程序的计算机方法。其主要思路是：把几何构造分析问题归结为一组齐次线性代数方程，再由解的性质得出几何构造分析的有关结论。

3. 关于三角形规律的运用问题

运用三角形规律对平面体系进行几何构造分析时，有几点值得注意：

(1) 三角形规律是组成无多余约束的几何不变体系的基本组成规律。这个规律也可归结为三种基本装配格式或三种基本构造单元。

(2) 要学会搭积木的方法。整个体系是搭起来的，是由多个构造单元依次装配而成的。这就是积零为整的方法。

首先，在整个体系中找出第一个构造单元，作为装配过程的起点。然后，从第一个构造单元出发，逐步装配新的构造单元，由小到大，由局部到整体，完成整个体系的装配过程。

(3) 装配方式通常有两种：

如果体系与地基之间只有三个约束，则从内部刚片出发进行装配，如图2-10所示的例子(图2-9a也可采用这种装配方式)。

如果体系与地基之间的约束多于三个，则从地基出发进行装配，如图2-9b、c所示的例子(图2-9a也可采用这种装配方式)。

(4) 进行等效变换。用瞬铰替代对应的两个链杆；用大刚片替代已经装配好的几何不变部分；用直线链杆替代曲形链杆；用一个刚片替代整个地基；用等效的多个单约束替代一个复约束；等等。

(5) 了解本法的应用范围。本法只适用于分析常规体系。分析某些复杂体系时应采用其他方法，如§2-5中的计算机方法和第11章中的零载法。

(6) 三角形规律是浅显的，但规律的运用却灵活多变。要由浅入深地作必要的练习，逐步提高运用能力。

4. 关于计算自由度数 W

S 和 n 都与体系的具体构造有关。但二者的差值 $S-n$(即 W)却与体系的具体构造无关，而只与体系所具有的部件和约束的个数有关。W 计算公式为式(2-6)和(2-7)。由于 $S \geqslant W$，$n \geqslant -W$，这样就得到了计算 S 和 n 的下限公式。在运用此公式时，应当注意将有多余约束的刚片变为无多余约束的刚片，将复约束换算成单约束。

根据 W 的数值，可对体系的几何构造特性得出一些结论，如下表所示。

W 的数值	几何构造特性
W>0	对象的自由度数大于约束数 体系为几何可变,不能用作结构
W=0	对象的自由度数等于约束数 如体系为几何不变,则无多余约束,体系为静定结构 如体系为几何可变,则有多余约束
W<0	对象的自由度数小于约束数 体系有多余约束 如体系为几何不变,则为超静定结构

§2-7　思考与讨论

§2-1　思考题

2-1　有的文献中把几何可变体系称为几何不稳定体系,把几何不变体系称为几何稳定体系。材料力学中把压杆屈曲问题称为弹性稳定性问题。试对几何稳定性和弹性稳定性这两个不同概念加以比较。

2-2　“多余约束”从哪个角度来看才是多余的?

(a) 从对体系的自由度是否有影响的角度看。

(b) 从对体系的计算自由度是否有影响的角度看。

(c) 从对体系的受力和变形状态是否有影响的角度看。

(d) 从区分静定与超静定两类问题的角度看。

2-3　结合图示瞬变体系,试从不同角度说明瞬变体系的特点(按照几何构造分析中的假设,各杆均为刚性杆):

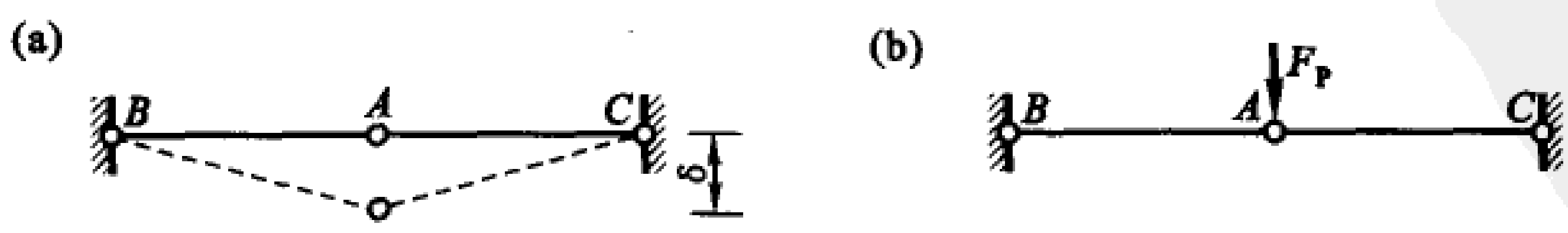
(a) 设 A 点位移 δ 为微量,位移 δ 是否有非零解(在几何方程中忽略高阶微量)?体系的几何形状是否保持不变?

(b) 设 A 点位移 δ 为有限量,位移 δ 是否有非零解?体系的几何形状是否保持不变?

(c) 在图 b 所示荷载 F_P 作用下,体系能否维持平衡?

(d) 在零荷载作用下,各杆轴力是否有非零解?是否有唯一解?

从以上讨论,归纳出瞬变体系的特点。



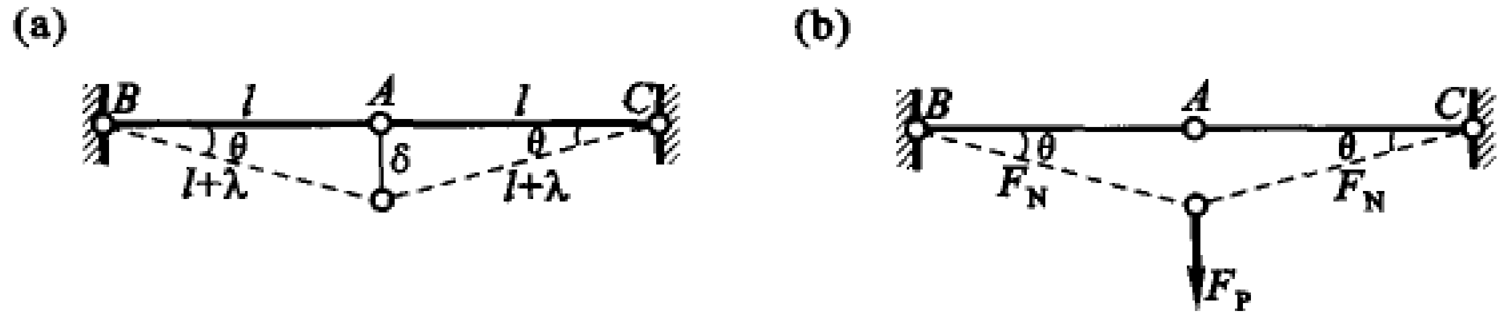
思考题 2-3 图

2-4　结合思考题 2-3 所示体系,假设体系中的各杆为弹性变形杆(杆长为 l,杆截面面积为 A,弹性模量为 E,杆的伸长量为 λ),试从不同角度说明“瞬变体系”的特点:

(a) 设 A 点位移 δ 为一阶微量，问杆件转角 θ 和杆长伸长量 λ 各是几阶微量？比值 $\frac{\delta}{\lambda}$ 是多少？杆件的微小伸长是否会引起很大的位移 δ？

(b) 在图 b 所示荷载 F_P 作用下，根据变形后结构的几何图形（虚线所示）求杆件的轴力 F_N。轴力 F_N 与荷载 F_P 之间是否仍是线性关系？

从以上讨论，归纳出"瞬变体系"的特点。



思考题 2－4 图

§2－2 思考题

2－5 分析平面体系的几何构造时，可以运用基本构造单元按照搭积木的装配方式进行。试总结自己的经验。

某些体系的装配方式只有一种，某些体系的装配方式有几种，试分别举例说明。对于图 2－9a，图 2－11b，图 2－12a、b 所示体系，你能提出几种装配方式？（在图 2－11b 中，也可把地基看作一个刚片。）

2－6 分析平面体系的几何构造时，也可以运用基本构造单元按照拆积木的方式进行。试结合图 2－9a、b、c 所示体系进行拆卸，并对原体系的几何构造特性作出结论。

2－7 在几何构造分析中可以进行哪些等效变换？如何保证变换的等效性？

2－8 利用无穷远瞬铰概念进行几何构造分析时，为什么可以采用关于∞点和∞线的四点结论（参见 §2－1 中 7. 无穷远处的瞬铰）？试结合图 2－13 所示体系用别的方法加以分析，并说明上述四点结论的合理性。

§2－3 思考题

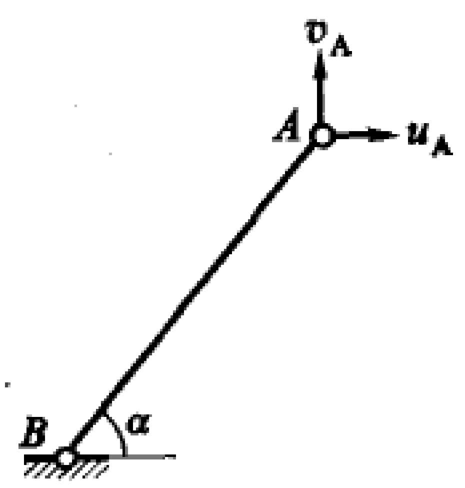
2－9 试对式（2－8）加以推导。在应用式（2－8）时应注意些什么？用式（2－8）重作例 2－4，并采用几种不同的混合方案。

2－10 如果已经算出体系的计算自由度 W，而未进行几何构造分析，则对体系的自由度 S 和多余约束数 n 能得出什么结论？如果再进一步已知体系为几何不变，则对 n 能得出什么结论？

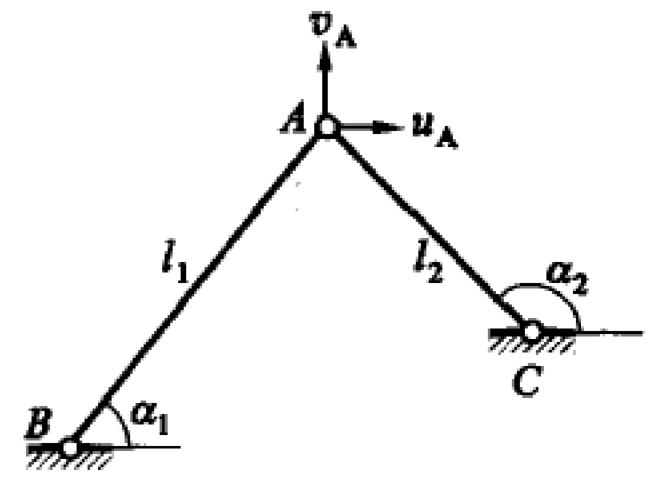
§2－6 思考题

2－11 A 点在平面内有两个位移 u_A 和 v_A。如果加上链杆 BA 与地基相连，试问在 u_A 和 v_A 之间可建立什么样的约束方程？AB 杆长为 l。

2－12 A 点在平面内有两个位移 u_A 和 v_A。如果加上两个链杆 BA 和 CA 与地基相连，试在 u_A 和 v_A 之间建立相应的两个约束方程。由这两个齐次线性代数方程求解 u_A 和 v_A 时，在什么情况下有唯一的平凡解（$u_A=0, v_A=0$）？在什么情况下，u_A 和 v_A 有非零解？从几何构造分析来看，从这两种情况可分别引出什么结论？



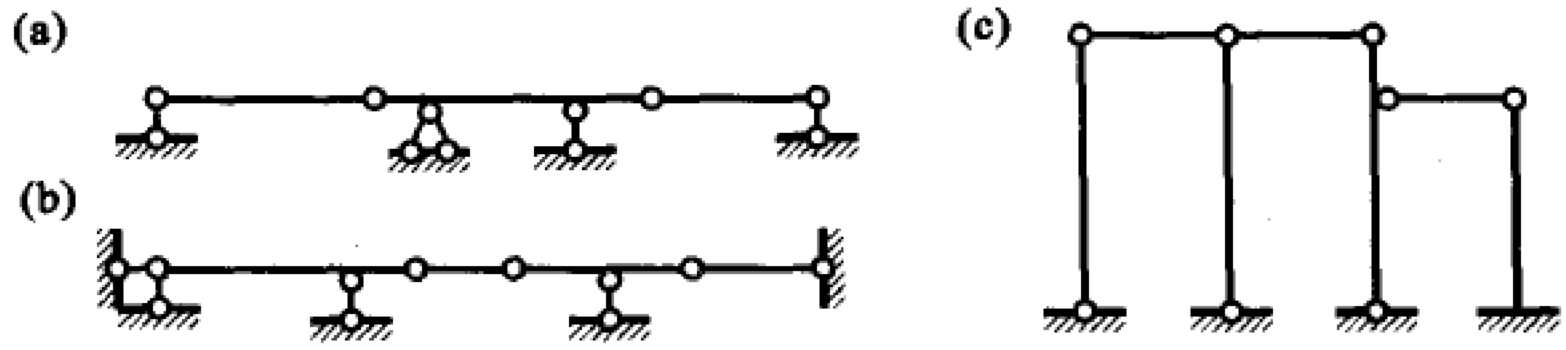
思考题 2－11 图



思考题 2－12 图

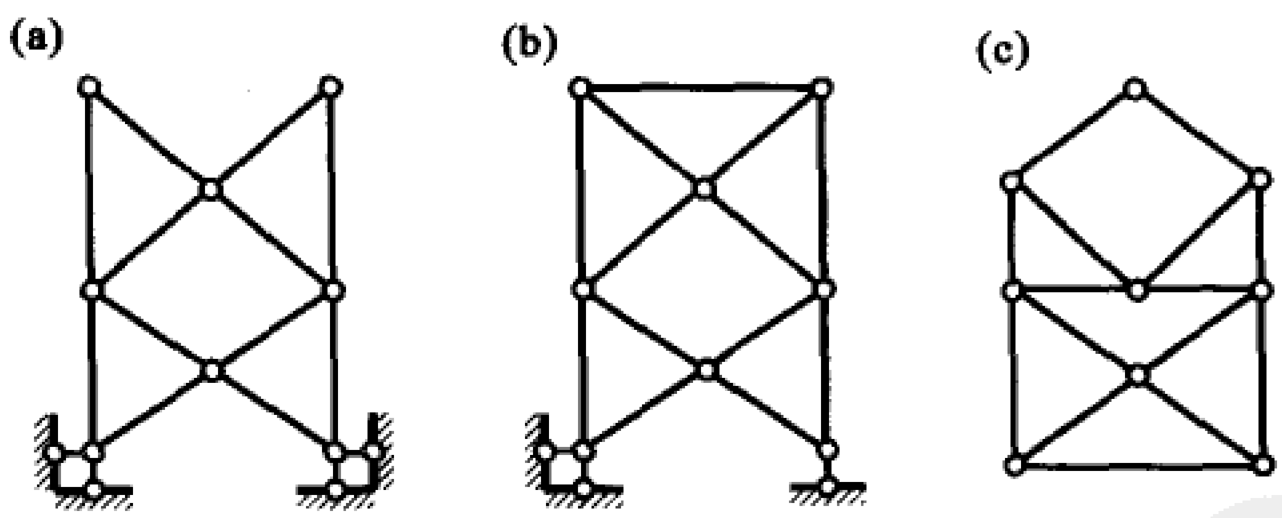
习　　题

2－1　试分析图示体系的几何构造。



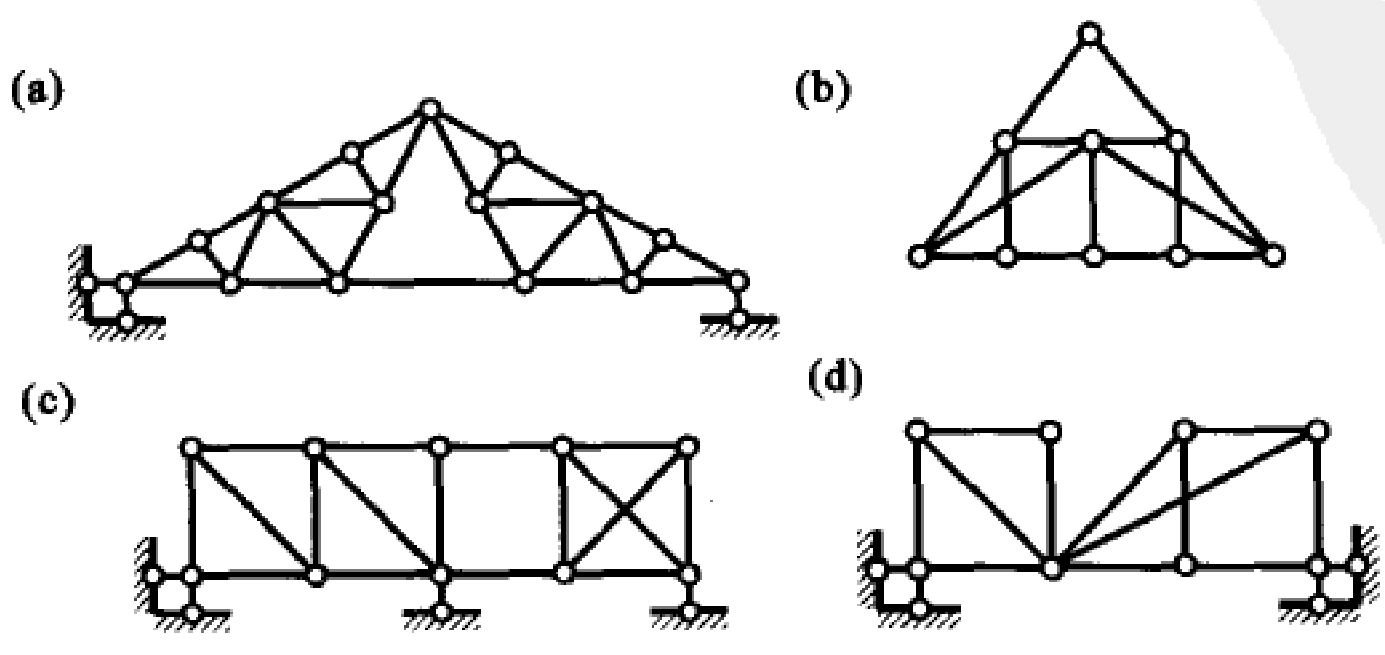
题 2－1 图

2－2　试分析图示体系的几何构造。



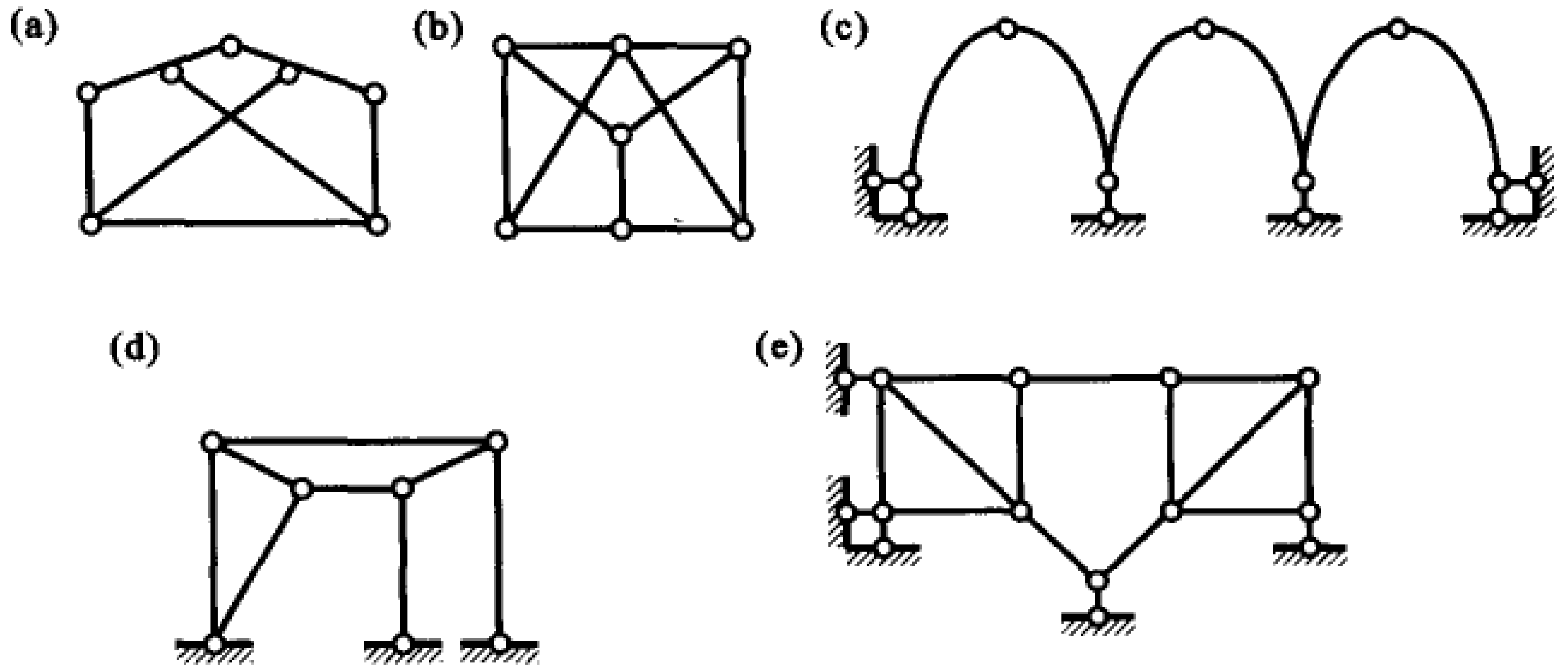
题 2－2 图

2－3　试分析图示体系的几何构造。



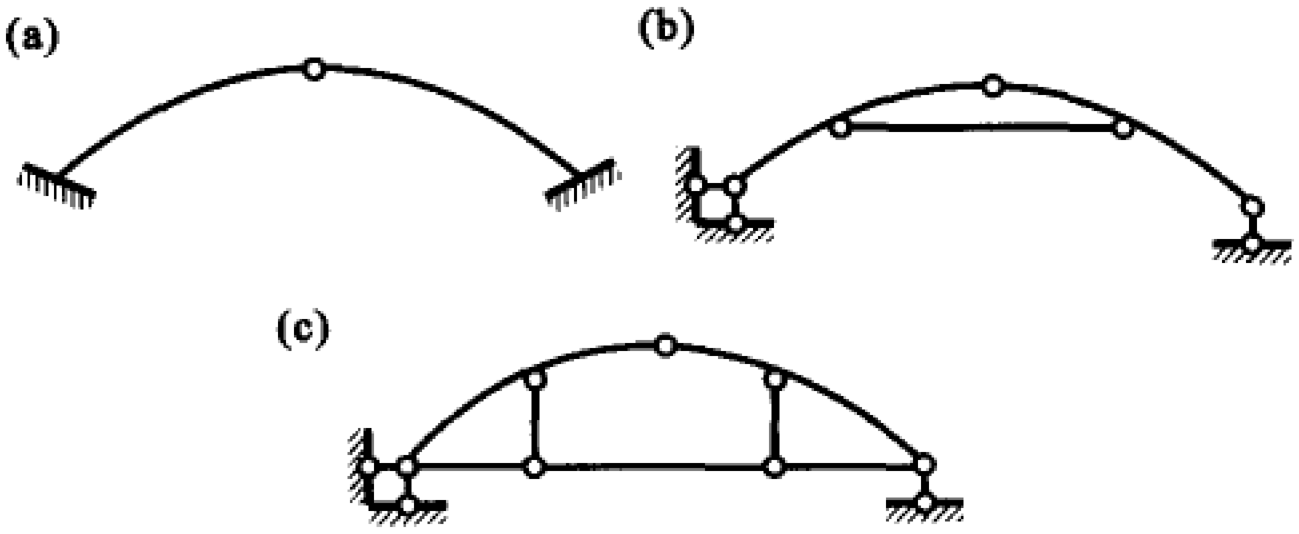
题 2－3 图

2-4　试分析图示体系的几何构造。



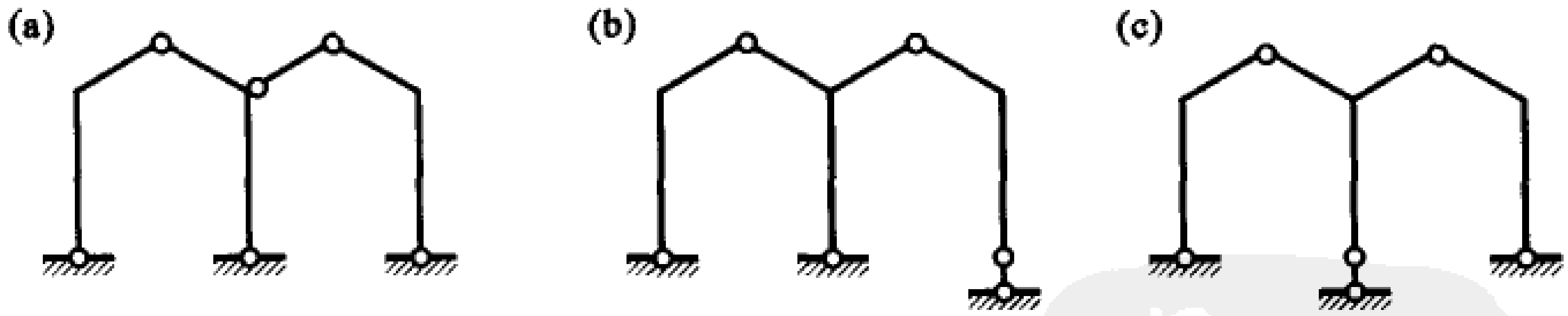
题 2-4 图

2-5　试分析图示体系的几何构造。



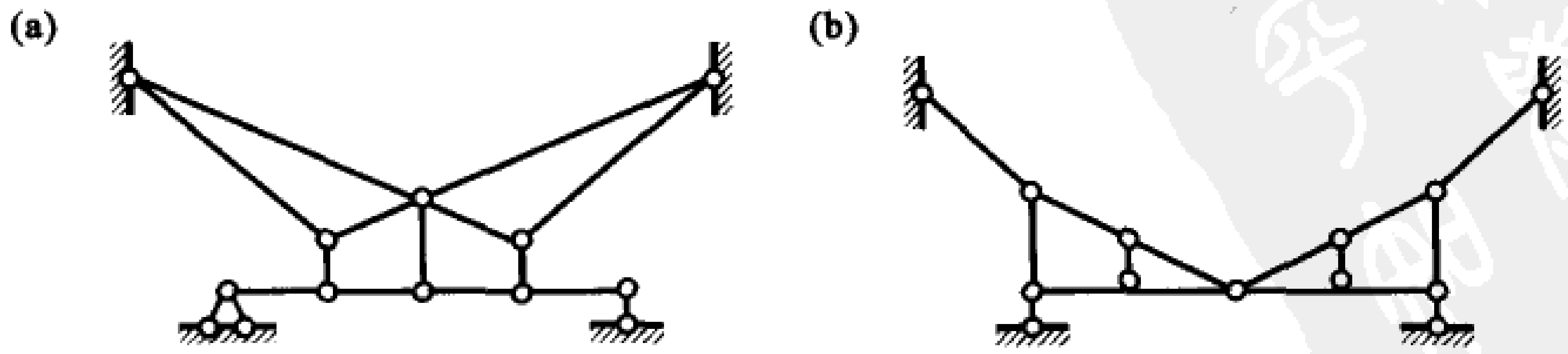
题 2-5 图

2-6　试分析图示体系的几何构造。



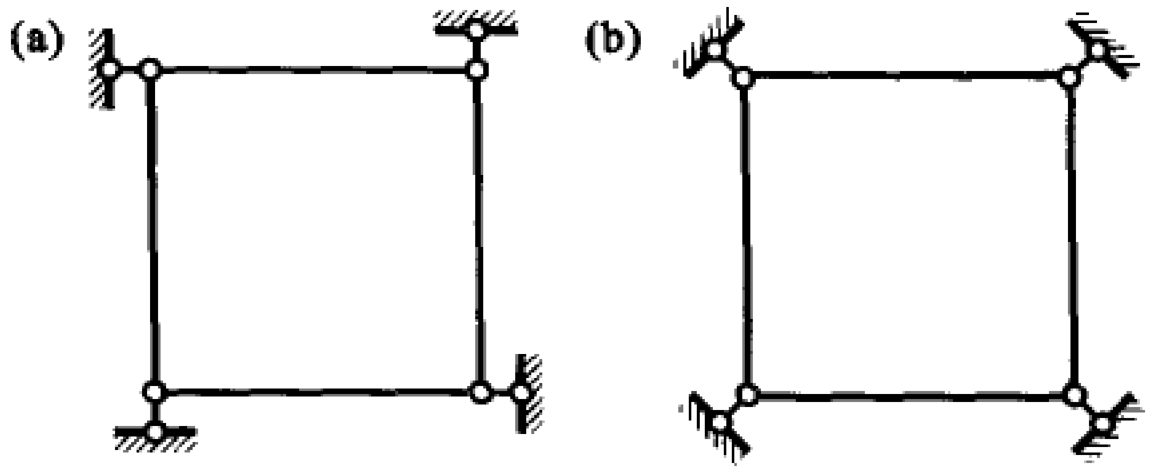
题 2-6 图

2-7　试分析图示体系的几何构造。



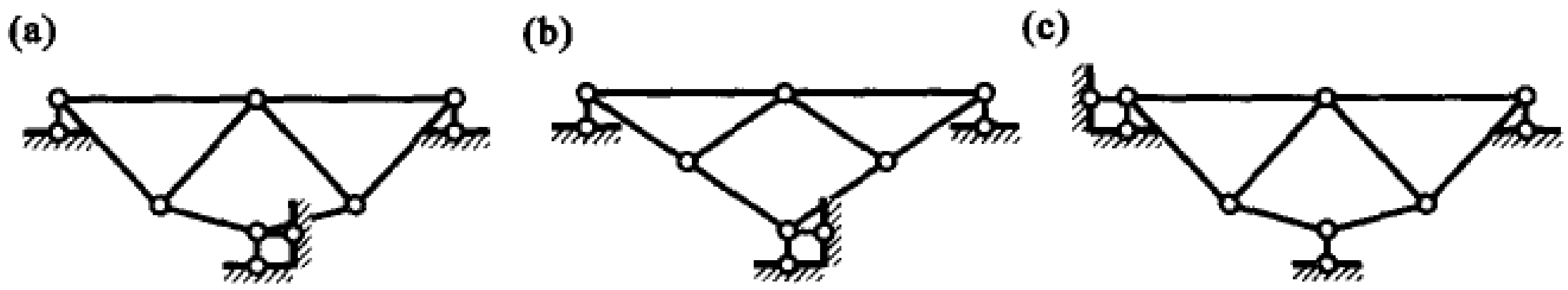
题 2-7 图

2－8　试分析图示体系的几何构造。



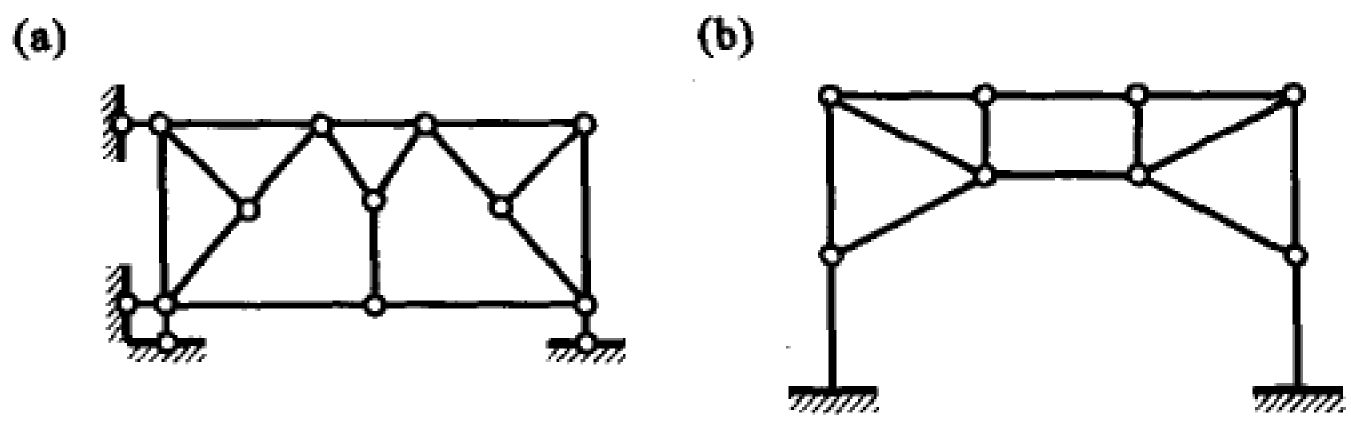
题 2－8 图

2－9　试分析图示体系的几何构造。



题 2－9 图

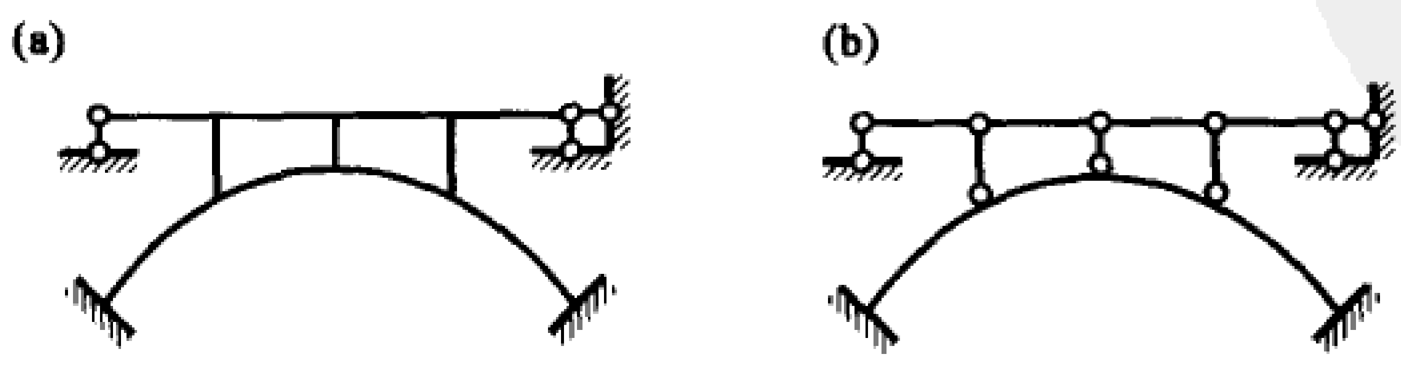
2－10　试分析图示体系的几何构造。



题 2　10 图

2－11　试求习题 2－5～2－10 中各体系的计算自由度 W。

2－12　试求图示体系的计算自由度 W。



题 2－12 图

第3章
静定结构的受力分析

下面3章讨论静定结构。第3章讨论静定结构的受力分析,第4章讨论影响线,第5章讨论虚功原理与结构位移计算。

静定结构与超静定结构有重要的区别。对静定结构进行受力分析时,只需考虑平衡条件,而不需考虑变形条件。

在第3章中,先对各类典型的静定结构分别进行讨论,侧重于个性;在第11章中再对静定结构进行综合讨论,侧重于共性。以上都只涉及固定荷载作用,在第4章中进一步讨论移动荷载作用。由个性到共性,由固定荷载到移动荷载,通过反复学习和多方运用,希望准确而熟练地掌握静力分析的基本方法:选取隔离体,建立平衡方程。这是学习结构力学时应当掌握的基本功之一。

必须重视基本功的训练。历来教学实践证明,在超静定结构和专题部分的学习中暴露出来的许多问题,追根溯源,其病因常常是在静定结构的学习中遗留下来的。

有些初学者认为"隔离体和平衡方程早就学过了,静定结构部分没有新理论"。其实"学过了"这种说法,不等于都真正学懂了。所谓学懂,有不同的层次。由低层次的懂到高层次的懂,由入门到登堂入室,还有一段长路程。在静定结构的静力分析中,基本原理本来就是少数几条,但基本原理的运用却是变化无穷的。对于基本原理,困难不在于理解,而在于运用;不在于有知识,而在于有能力,有驾驭基本原理解决复杂问题的能力,在"驭"字上要多花力气。少讲多练,在学习静定结构时更应如此。

学习静定结构各章时,应当在以下四个方面注意提高:

(1) 要由会算一根梁和简单桁架提高到会算复杂的静定结构系统。由杆到杆系,由单元到结构,这里有一个不小的台阶。但是,结构总可以分解成杆件和单元,在牢固掌握杆件和单元分析方法的基础上,再学会"化繁为简"的分解方法,这个台阶是容易上去的。

(2) 要了解静力分析与构造分析的内在联系,对静力分析要有一个规律性的认识。静定结构的形式有多种多样,静力分析的具体步骤也是千差万别,从何下手,按照什么顺序进行,初学者对此往往感到茫然。其实,这里是有规律的。如果注意静力分析与构造分析之间的联系,就可以找到这个规律。所谓构造分析,就是研究一个结构如何用单元组合起来,研究"如何搭"的问题。所谓静力分

析，就是研究如何把静定结构的内力计算问题分解为单元的内力计算问题，研究“如何拆”的问题。组合与分解，搭与拆，是一对相反的过程。因此，在静力分析中如果截取单元的次序与结构组成时添加单元的次序正好相反，则静力分析的工作就可以顺利进行。总之，从构造分析入手，反其道而行之，这就是对静定结构进行静力分析应当遵循的规律。

(3) 要在静力分析的基础上进一步了解结构的受力性能和结构的合理形式。每类结构形式(梁、刚架、桁架、组合结构、拱)在受力性能上有什么特点，要在静力分析的基础上进行总结，什么是拱轴的合理曲线，什么是桁架的合理形式，要根据静力分析进行优化和创新。既要学会分析，还要学会概括和创新。

(4) 不仅要掌握在固定荷载作用下的静力分析，而且要学习在移动荷载作用下的静力分析。荷载移动到什么位置最为不利？荷载移动时结构中产生的最大内力是多少，这些新问题将应用“影响线”这个新工具加以解决。

浅尝辄止的缺点，在学习静定结构时一定要注意克服。

本章结合几种常用的典型结构形式讨论静定结构的受力分析问题，涉及梁、刚架、桁架、组合结构、拱等。内容包括支座反力和内力的计算，内力图的绘制，受力性能的分析等。

本章的讲解是在材料力学等课程的基础上进行的，但在讨论问题的深度和广度上有显著的提高，这一点必须注意，而且本章的内容对学习下面各章是很重要的。

§3-1 梁的内力计算的回顾

1. 截面的内力分量及其正负号规定

在平面杆件的任一截面上，一般有三个内力分量：轴力 F_N、剪力 F_Q 和弯矩 M。

截面上应力沿杆轴切线方向的合力，称为轴力。轴力以拉力为正。

截面上应力沿杆轴法线方向的合力称为剪力。剪力以绕微段隔离体顺时针转者为正。

截面上应力对截面形心的力矩称为弯矩。在水平杆件中，当弯矩使杆件下部受拉时，弯矩为正(图 3-1)。

作轴力图和剪力图时要注明正负号。作弯矩图时，规定弯矩图的纵坐标应画在杆件受拉纤维一边，不注明正负号。

2. 截面法

计算指定截面内力的基本方法是截面法，即将杆件在指定截面切开，取左边



图 3-1

部分(或右边部分)为隔离体,利用隔离体的平衡条件,确定此截面的三个内力分量。

由截面法可以得出截面内力如下:

$$\begin{cases}\text{轴力等于截面一边的所有外力沿杆轴切线方向的投影代数和。}\\ \text{剪力等于截面一边的所有外力沿杆轴法线方向的投影代数和。}\\ \text{弯矩等于截面一边的所有外力对截面形心的力矩代数和。}\end{cases}$$

画隔离体受力图时,要注意以下几点:

(1) 隔离体与其周围的约束要全部截断,而以相应的约束力代替。

(2) 约束力要符合约束的性质。截断链杆(两端为铰的直杆、杆上无荷载作用)时,在截面上加轴力。截断受弯杆件时,在截面上加轴力、剪力和弯矩。去掉滚轴支座、铰支座、固定支座时分别加一个、二个、三个支座反力(固定支座的三个反力中有一个是力偶)。

(3) 隔离体是应用平衡条件进行分析的对象。在受力图中只画隔离体本身所受到的力,不画隔离体施给周围的力。

(4) 不要遗漏力。受力图上的力包括两类:一类是荷载,一类是截断约束处的约束力。

(5) 未知力一般假设为正号方向,数值是代数值(正数或负数)。已知力按实际方向画,数值是绝对值(正数)。未知力计算得到的正负号就是实际的正负号。

3. 荷载与内力之间的微分关系

在荷载连续分布的直杆段内,取微段 $\mathrm{d}x$ 为隔离体,如图 3-2 所示。其中 q_x 和 q_y 分别为沿 x 和 y 方向的荷载集度。在图 3-2 所示荷载和坐标设置的情况下,由平衡条件可导出微分关系如下:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}x}&=-q_x\\ \frac{\mathrm{d}F_Q}{\mathrm{d}x}&=-q_y\\ \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}&=F_Q\end{aligned}\right\}\tag{3-1}$$

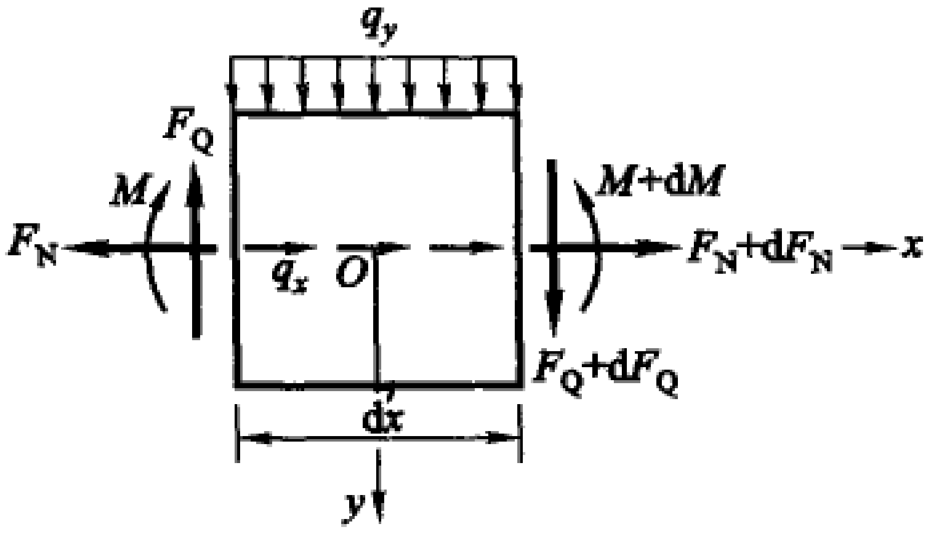


图　3－2

4．荷载与内力之间的增量关系

在集中荷载作用处，取微段为隔离体，如图 3－3 所示。其中，F_x 是水平集中力，向右为正；F_y 是竖向集中力，向下为正；M_0 是力偶，顺时针方向为正。右侧截面与左侧截面相比，内力增量分别为 ΔF_N、ΔF_Q 和 ΔM。由平衡条件可导得增量关系如下：

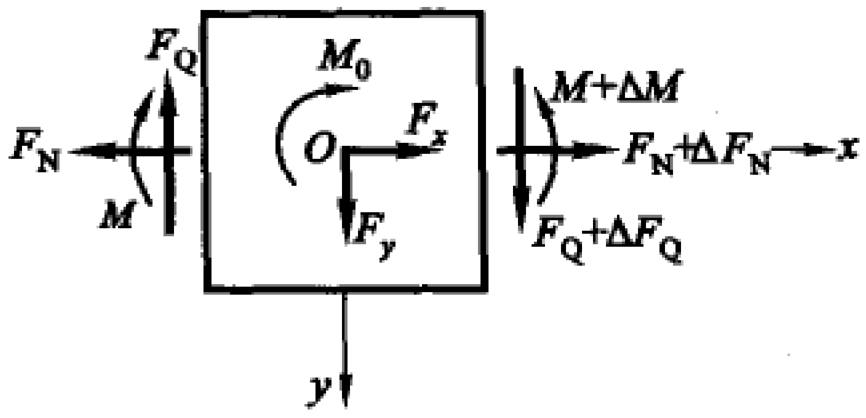


图　3－3

$$\left.\begin{aligned}\Delta F_N &= -F_x\\ \Delta F_Q &= -F_y\\ \Delta M &= M_0\end{aligned}\right\}\tag{3-2}$$

5．荷载与内力之间的积分关系

从直杆中取出荷载连续分布的一段 AB（图 3－4），由式（3－1）积分可得

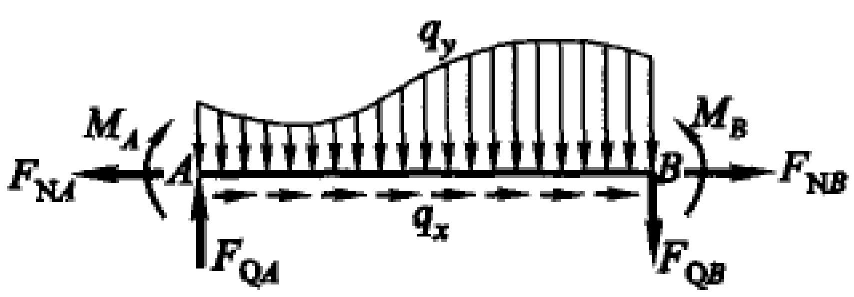


图　3－4

$$\left.\begin{aligned}F_{NB} &= F_{NA} - \int_{x_A}^{x_B} q_x \mathrm{d}x \\ F_{QB} &= F_{QA} - \int_{x_A}^{x_B} q_y \mathrm{d}x \\ M_B &= M_A + \int_{x_A}^{x_B} F_Q \mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

积分关系的几何意义是：

B 端的轴力等于 A 端的轴力减去该段荷载 q_x 图的面积。

B 端的剪力等于 A 端的剪力减去该段荷载 q_y 图的面积。

B 端的弯矩等于 A 端的弯矩加上此段剪力图的面积。

荷载与内力之间的关系式，对于绘制内力图和校核内力图都有用处。

6. 分段叠加法作弯矩图

对结构中的直杆段作弯矩图时，可采用分段叠加法，使绘制工作得到简化。

先讨论简支梁(图3－5a)的情形，荷载包括两部分：跨间荷载 q 和端部力偶 M_A、M_B。当端部力偶单独作用时，弯矩图($\overline{M}$ 图)为直线图形，如图3－5b所示。当跨间荷载 q 单独作用时，弯矩图(M^0 图)如图3－5c所示。如果在 $\overline{M}$ 图的基础上再叠加 M^0 图，即得到总弯矩图(M 图)如图3－5d所示。

应当指出，这里所说的弯矩图叠加，是指纵坐标的叠加，而不是指图形的简单拼合。图3－5d所示三个纵坐标 $\overline{M}$、M^0 与 M 之间的叠加关系为

$$\overline{M}(x) + M^0(x) = M(x)$$

注意，图3－5d中的纵坐标 M^0，如同 $\overline{M}$、M 一样，也是垂直于杆轴 AB，而不是垂直于图中的虚线 $A'B'$。

现在讨论结构中任意直杆段的弯矩图。以图3－6a中的杆段 AB 为例，其隔离体如图3－6b所示，隔离体上的作用力除荷载 q 外，在杆端还有弯矩 M_A、M_B，轴力 F_{NA}、F_{NB} 和竖向力 F_{yA}、F_{yB}。为了说明杆段 AB 弯矩图的特性，把它与图3－6c中的简支梁相比。设简支梁承受相同的荷载 q 和相同的杆端力偶 M_A、M_B，但支座竖向反力为 F_{yA}^0、F_{yB}^0。在图3－6b、c中分别应用平衡方程求 F_{yA}、F_{yB} 和 F_{yA}^0、F_{yB}^0，可知 $F_{yA} = F_{yA}^0$，$F_{yB} = F_{yB}^0$，因此二者的弯矩图也彼此相同。这样，作任意直杆段弯矩图的问题(图3－6b)就归结为作相应简支梁弯矩图的问题(图3－6c)，从而也可采用分段叠加法作 M 图，如图3－6d所示。具体作法分成两步：首先根据 A、B 两点的弯矩 M_A、M_B，作直线 $\overline{M}$ 图；然后以此直线为基线，再叠加相应简支梁 AB 在跨间荷载作用下的 M^0 图。

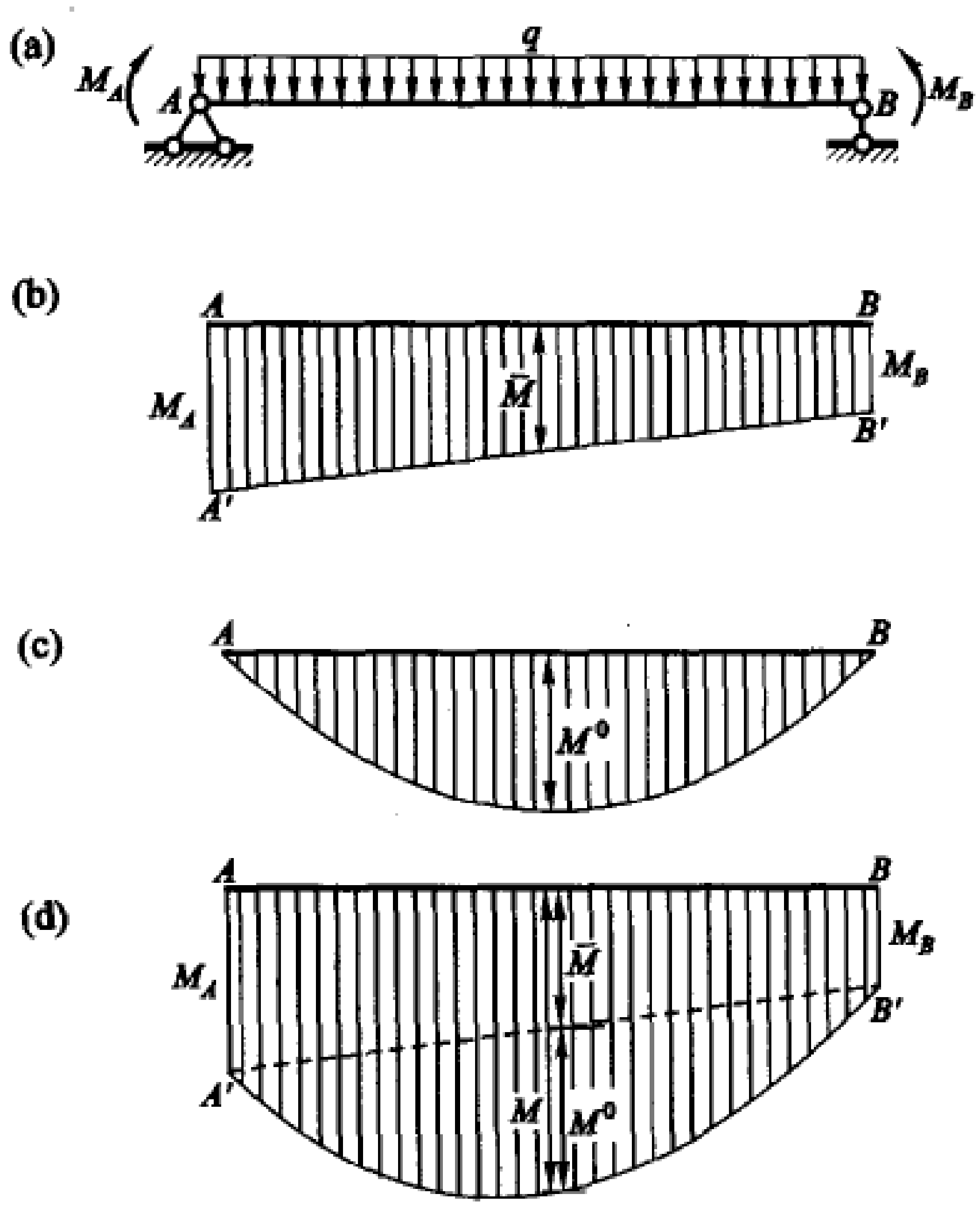

(a)
q
M_A
A
B
M_B
(b)
A
B
M_B
$\bar{M}$
M_A
B'
A'
(c)
A
B
M^0
(d)
A
B
M_B
$\bar{M}$
M_A
B'
A'
M
M^0

图　3－5

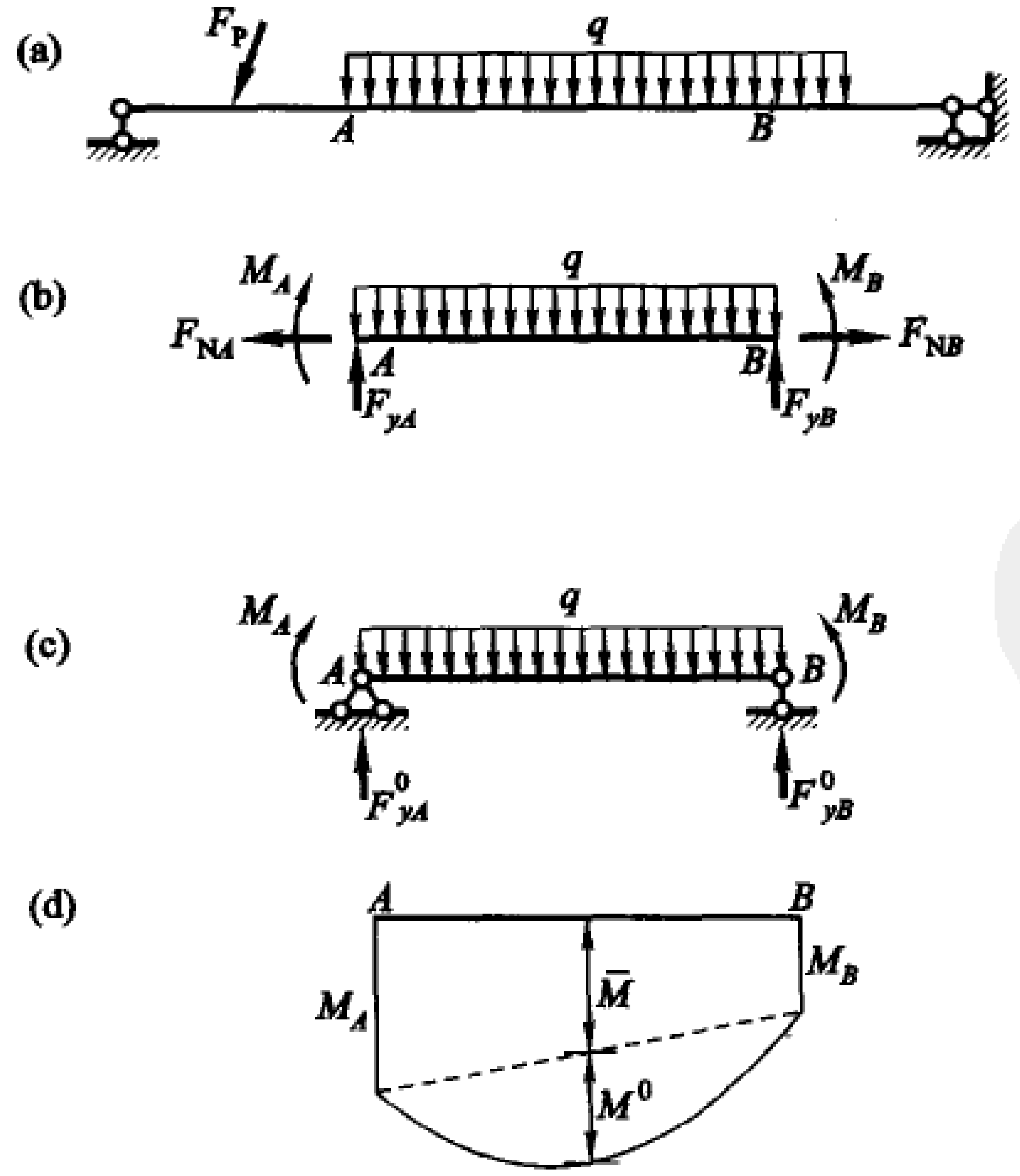

(a)
F_P
q
A
B
(b)
M_A
q
M_B
F_{NA}
A
B
F_{NB}
F_{yA}
F_{yB}
(c)
M_A
q
M_B
A
B
F^0_{yA}
F^0_{yB}
(d)
A
B
M_B
$\bar{M}$
M_A
M^0

图　3－6

利用上述关于内力图的特性和弯矩图的分段叠加法,可将梁的弯矩图的一般作法归纳如下:

(1)选定外力的不连续点(如集中力作用点、集中力偶作用点、分布荷载的起点和终点等)为控制截面,求出控制截面的弯矩值。

(2)分段画弯矩图。当控制截面间无荷载时,根据控制截面的弯矩值,即可作出直线弯矩图。当控制截面间有荷载作用时,根据控制截面的弯矩值作出直线图形后,还应叠加这一段按简支梁求得的弯矩图。

例3-1 试作图3-7a所示简支梁的内力图。

解 (1)作剪力图

AB、BC、EF、FG 各段无荷载作用,F_Q 为常数,F_Q 图为水平线。CE 段有均布荷载,F_Q 图是斜直线。从 A 端开始,可求出控制截面的剪力如下:

$$F_{QA}=F_{RA}=17\ \text{kN}$$

$$F_{QB}^{R}=F_{RA}-F_P=17\ \text{kN}-8\ \text{kN}=9\ \text{kN}$$

$$F_{QE}=F_{RA}-F_P-q\times 4\ \text{m}=17\ \text{kN}-8\ \text{kN}-16\ \text{kN}=-7\ \text{kN}$$

其中 F_{QB}^{R} 表示 B 点右侧截面的剪力。

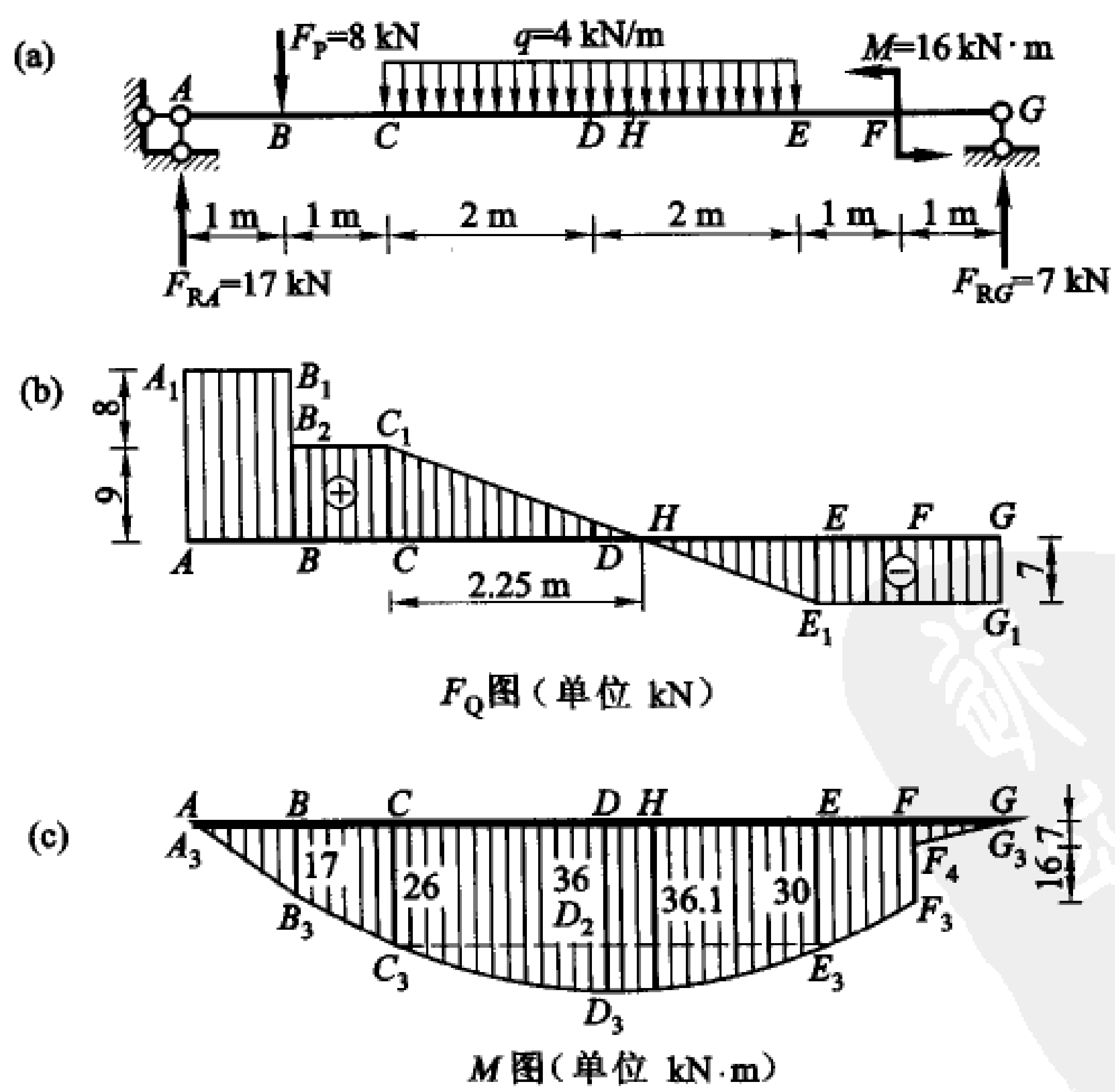


图 3-7

依次在 F_Q 图(图3-7b)上定出 A_1、B_2、E_1 诸点。作水平线 A_1B_1、B_2C_1、E_1G_1,作斜直线 C_1E_1。

(2) 作弯矩图

选 A、B、C、E、F^{L}、F^{R}、G 为控制截面，求出其弯矩值如下(其中 F^{L} 和 F^{R} 分别表示 F 点左侧和右侧截面)：

$$M_A = 0$$
$$M_B = F_{RA} \times 1\ \text{m} = 17\ \text{kN·m}$$
$$M_C = F_{RA} \times 2\ \text{m} - F_P \times 1\ \text{m} = 34\ \text{kN·m} - 8\ \text{kN·m} = 26\ \text{kN·m}$$
$$M_E = F_{RG} \times 2\ \text{m} + M = 14\ \text{kN·m} + 16\ \text{kN·m} = 30\ \text{kN·m}$$
$$M_F^{L} = F_{RG} \times 1\ \text{m} + M = 7\ \text{kN·m} + 16\ \text{kN·m} = 23\ \text{kN·m}$$
$$M_F^{R} = F_{RG} \times 1\ \text{m} = 7\ \text{kN·m}$$
$$M_G = 0$$

依次在 M 图(图 3－7c)上定出 A_3、B_3、C_3、E_3、F_3、F_4、G_3 诸点。在 AB、BC、EF 和 FG 各段无荷载作用。连 A_3B_3、B_3C_3、E_3F_3、F_4G_3 等直线，即为弯矩图。

CE 段有均布荷载。以 C_3E_3 为基线(图 3－7c 中虚线)，叠加以 CE 为跨度的简支梁在均布荷载作用下的弯矩图，可作出抛物线 $C_3D_3E_3$，中点的竖距 D_2D_3 为$\dfrac{4\ \text{kN/m} \times (4\ \text{m})^2}{8} = 8\ \text{kN·m}$。截面 D 最后弯矩值为

$$\frac{26\ \text{kN·m} + 30\ \text{kN·m}}{2} + 8\ \text{kN·m} = 36\ \text{kN·m}$$

为了确定弯矩的最大值 M_{max}，首先需要确定发生最大弯矩的截面位置。由微分关系$\dfrac{dM}{dx} = F_Q$ 得知，如果 $F_Q = 0$，则$\dfrac{dM}{dx} = 0$。因此，F_Q 图的零点相应于 M 图的极值点。在图 3－7b 中 F_Q 图的零点 H 的位置可确定如下：在 CH 段中，剪力图的斜率为$\dfrac{dF_Q}{dx} = -\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{CH}}$，利用微分关系$\dfrac{dF_Q}{dx} = -q$，由此求出 $\overline{CH} = \dfrac{9\ \text{kN}}{4\ \text{kN/m}} = 2.25\ \text{m}$。$H$ 点的位置确定以后，即可利用积分关系式求得 M_H。

$$M_H = M_C + \int_C^H F_Q \mathrm{d}x = 26\ \text{kN·m} + \frac{1}{2} \times 9\ \text{kN} \times 2.25\ \text{m} = 36.1\ \text{kN·m}$$

§ 3－2　静定多跨梁

简支梁、悬臂梁和伸臂梁是静定梁中最简单的情形。多次利用这些构造单元，可以得到各种形式的静定多跨梁。图 3－8a 所示为公路桥使用的静定多跨梁，其计算简图如图 3－8b 所示。

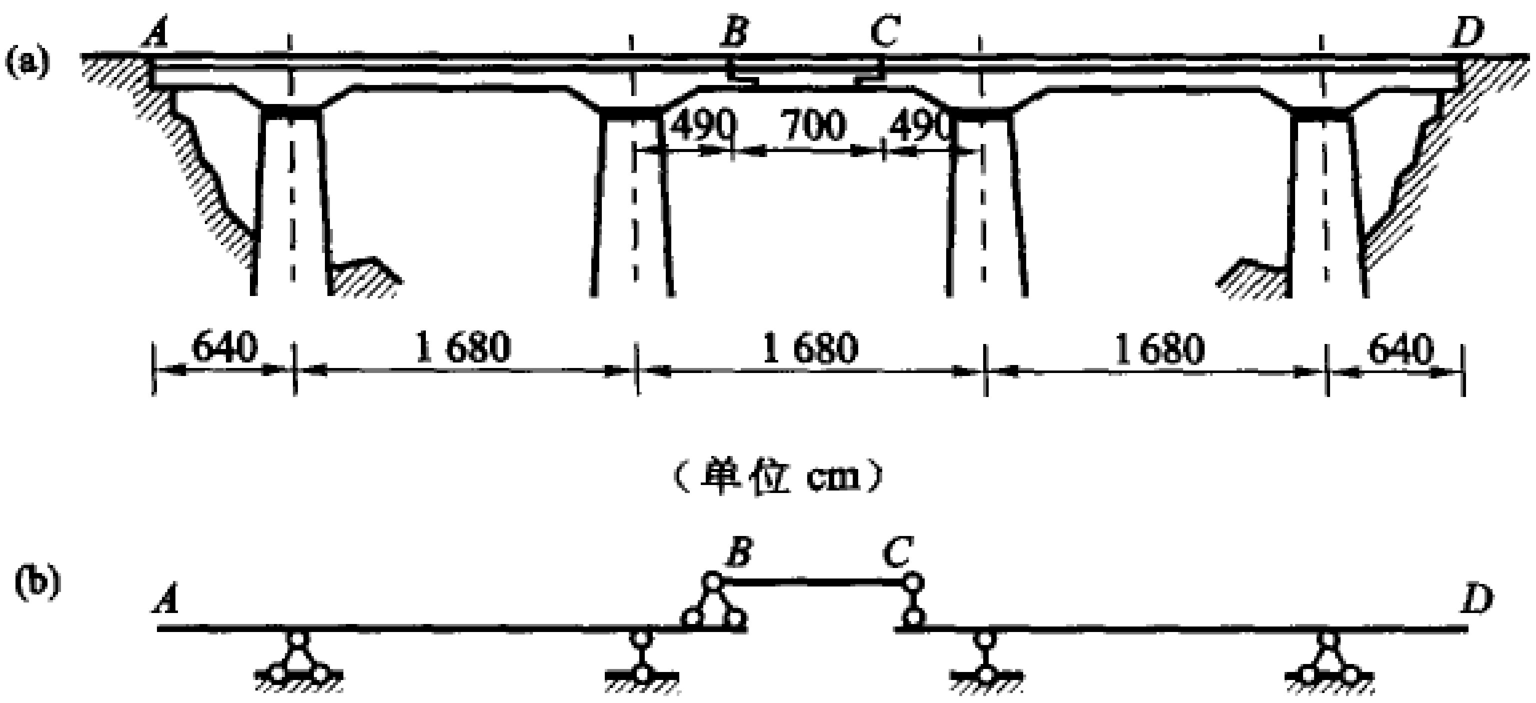


图 3-8

从几何构造分析知道，梁 AB 和 CD 直接由支杆固定于基础，是几何不变的。短梁 BC 两端支于梁 AB 和 CD 的伸臂上面。整个结构是几何不变的。梁 AB 和 CD 本身(不依赖梁 BC)就可以承受荷载，称为基本部分。梁 BC 依靠基本部分的支承才能承受荷载并保持平衡，称为附属部分。

在檩条中也可采用静定多跨梁这种结构形式，图 3-9a 所示为木檩条的构造。在檩条接头处采用斜搭接的形式，并用螺栓系紧，这种接头可看作铰结点。计算简图如图 3-9b 所示，梁的支承关系如图 3-9c 所示。在竖向荷载作用下，CD 和 GH 是附属部分，AC、DG、HJ 是基本部分。在图 3-9b 中，未知支座反力的数目为 7，梁的中间加了 4 个铰，每加一个铰就增加一个静力平衡方程，即在有铰的截面，弯矩应为零(铰任一边所有外力对铰的力矩之和应为零)。再加上三个整体平衡方程，静力平衡方程共有七个。未知反力数与静力平衡方程数相等，因此，此梁是静定的。

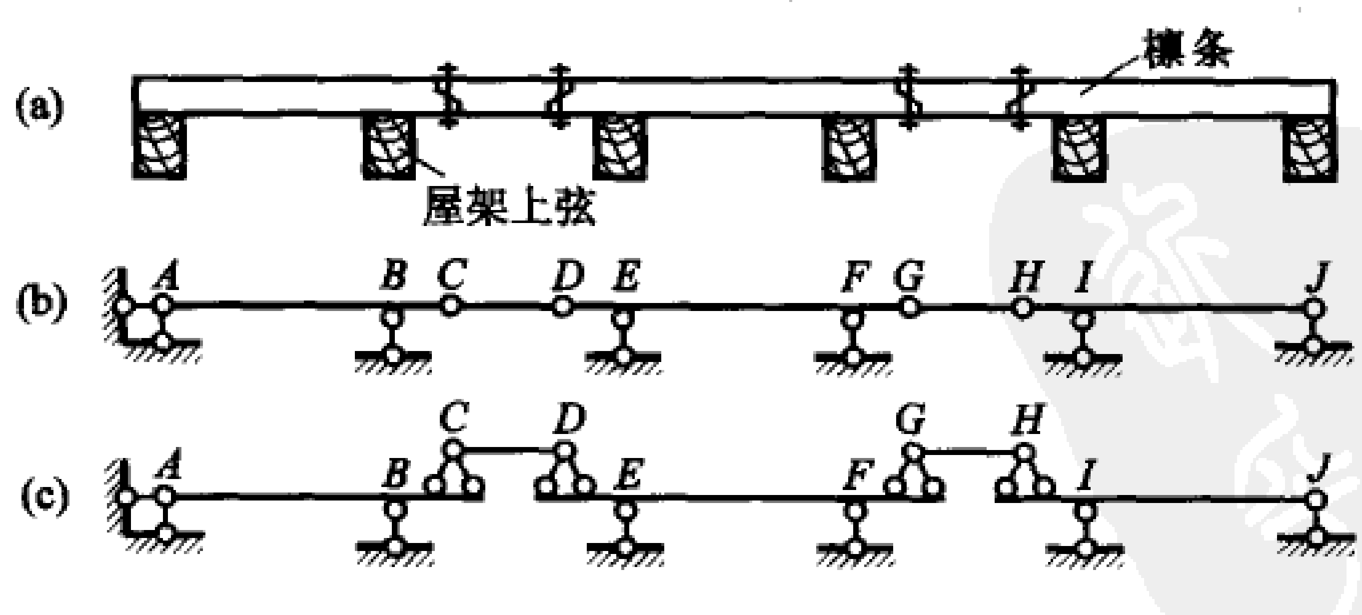


图 3-9

从几何构造来看，静定多跨梁是由几根梁组成的，组成的次序是先固定基本部分，后固定附属部分。因此，计算静定多跨梁时，要遵守的原则是：先计算附属

部分，再计算基本部分。将附属部分的支座反力反其指向，就是加于基本部分的荷载。这样，便把多跨梁拆成为单跨梁，各个解决，从而可避免解算联立方程。将各单跨梁的内力图连在一起，就是多跨梁的内力图。弯矩和剪力的正负号规定，同单跨梁。绘制弯矩图时，一般习惯把竖距画在受拉纤维一边。

例 3-2 试作图 3-10a 所示静定多跨梁的内力图。

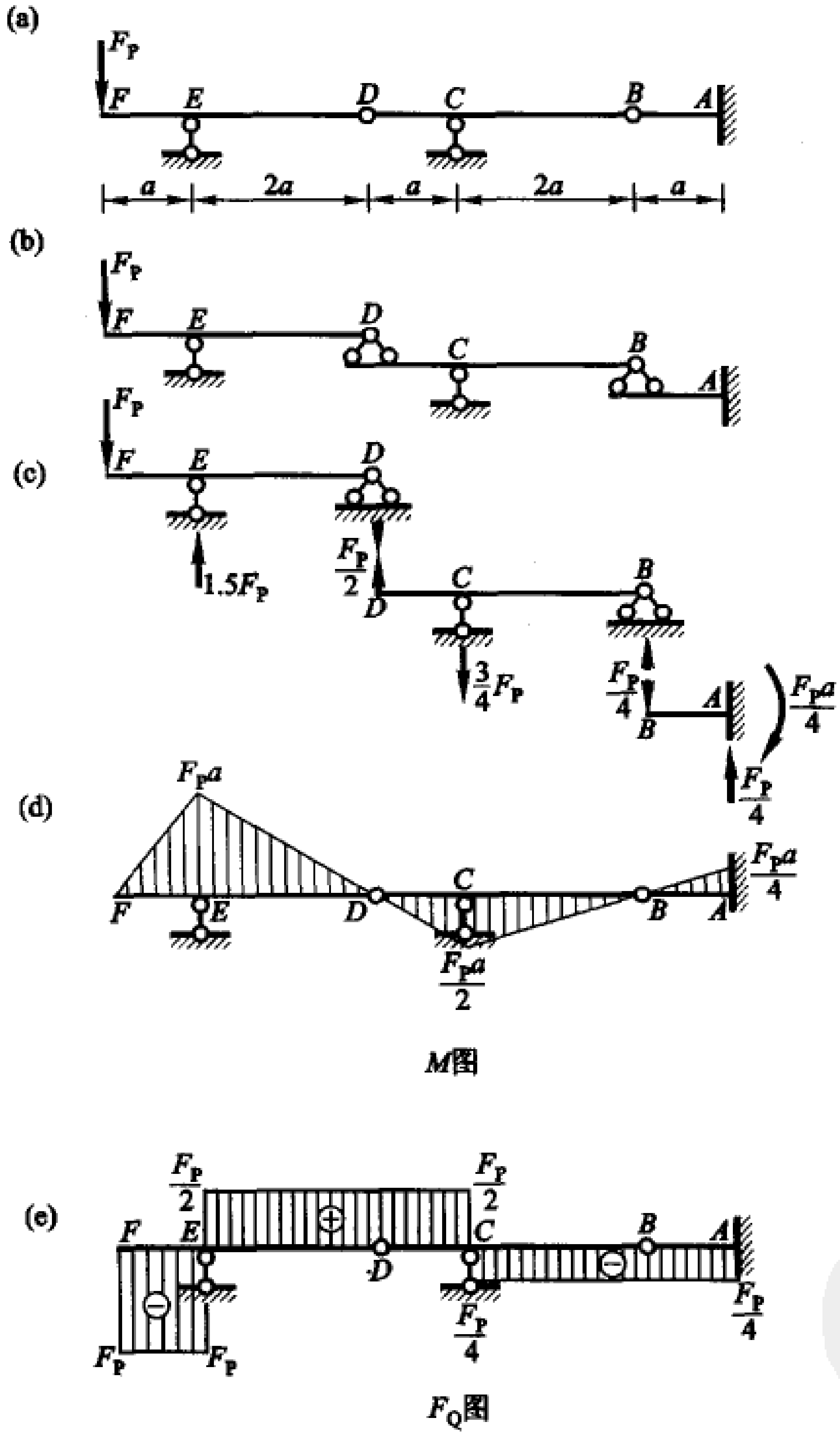


图 3-10

解 此梁的组成次序为先固定梁 AB，再固定梁 BD，最后固定梁 DF。基本部分与附属部分之间的支承关系如图 3-10b 所示。

计算时按照相反的次序拆成单跨梁，如图 3-10c 所示。先计算附属部分 FD。D 点反力求出后，反其指向就是梁 DB 的荷载。梁 DB 在 B 点的反力求

出后，反其指向就是梁 BA 的荷载。最后计算梁 BA，求出 A 端的支座反力。

支座反力求出后，即可作 M 图和 F_Q 图，如图 3－10d 和 e 所示。这里，荷载 F_P 作用在附属部分上，而对基本部分也同时产生内力。与此相反，如果荷载作用在基本部分上，则对附属部分并不引起内力。

在设计静定多跨梁时，铰的安放位置可以适当选择，以减小弯矩图的峰值，从而节约材料。下面举例说明。

例 3－3　图 3－11a 所示为一两跨梁，全长承受均布荷载 q。试求铰 D 的位置，使负弯矩峰值与正弯矩峰值相等。

解　以 x 表示铰 D 与支座 B 之间的距离。在图 3－11b 中，先计算附属部分 AD，求出支座反力为 $\frac{q(l-x)}{2}$，并作出弯矩图，跨中正弯矩峰值为 $\frac{q(l-x)^2}{8}$。

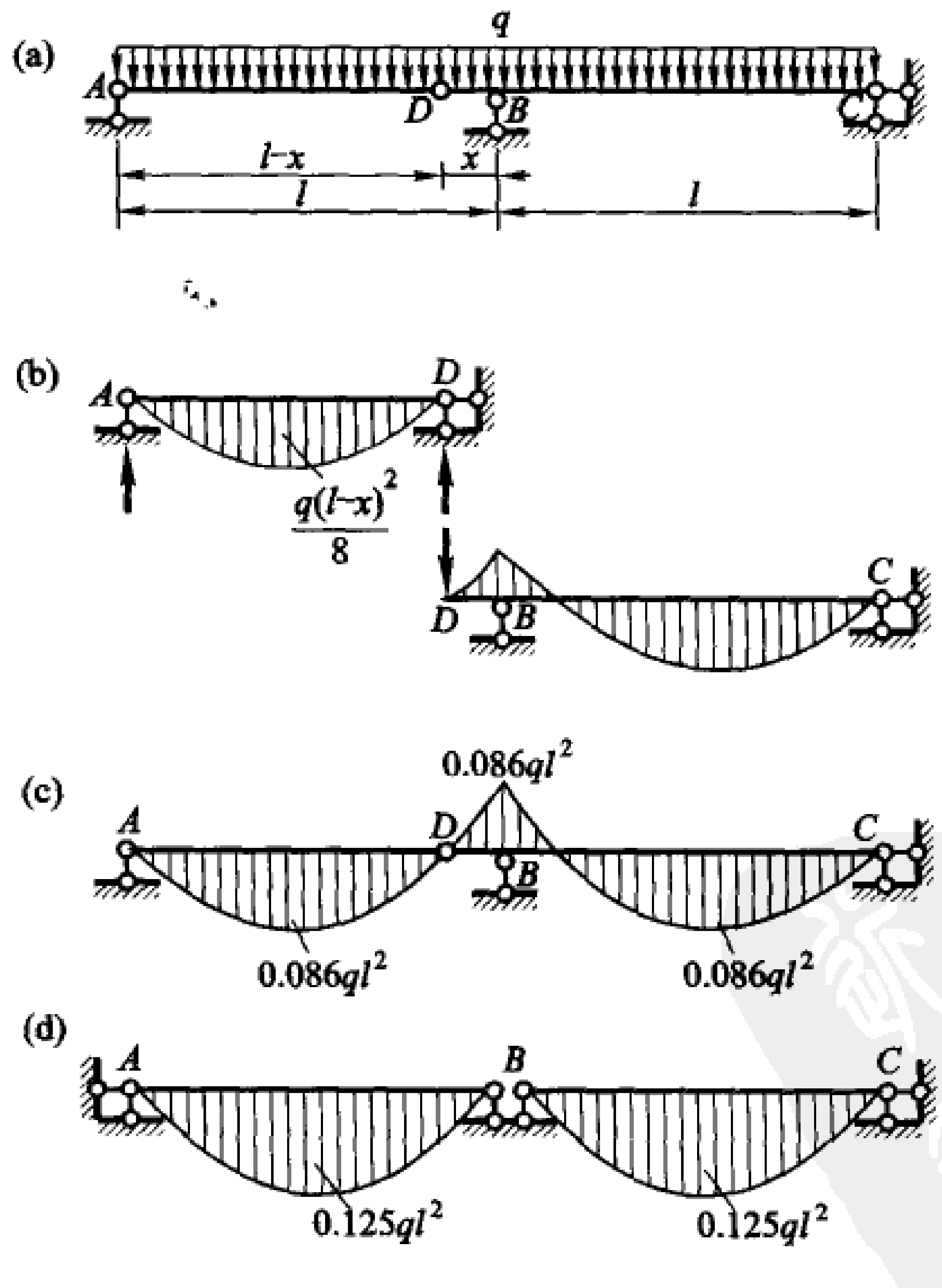


图　3－11

再计算基本部分 DC，将附属部分在 D 点所受的支承反力 $\frac{q(l-x)}{2}$ 反其指

向，当作荷载加于基本部分，支座 B 处的负弯矩峰值为$\frac{q(l-x)x}{2}+\frac{qx^2}{2}$。

令正负弯矩峰值彼此相等，即

$$\frac{q(l-x)^2}{8}=\frac{q(l-x)x}{2}+\frac{qx^2}{2}$$

得

$$x=0.172l$$

铰的位置确定后，可作弯矩图如图 3－11c 所示，其中正负弯矩峰值都等于 $0.086ql^2$。

如果改用两个跨度为 l 的简支梁，则弯矩图如图 3－11d 所示。由此可知，静定多跨梁的弯矩峰值比一系列简支梁的要小，二者的比值为$\frac{0.086}{0.125}=68.8\%$。

一般说来，静定多跨梁与一系列简支梁相比，材料用量可少一些，但构造要复杂一些。

§3－3　静定平面刚架

1．刚架的特点

刚架和桁架都是由直杆组成的结构。二者的区别是：桁架中的结点全部都是铰结点，刚架中的结点全部或部分是刚结点。图 3－12a 是一个几何可变的铰结体系，为了使它成为几何不变，一种办法是增设斜杆，使它成为桁架结构（图 3－12b），另一种办法是把原来的铰结点 B 和 C 改为刚结点，使它成为刚架结构（图 3－12c）。由此看出，刚架中由于具有刚结点，因而不用斜杆也可组成几何不变体系，使结构内部具有较大的空间，便于使用。

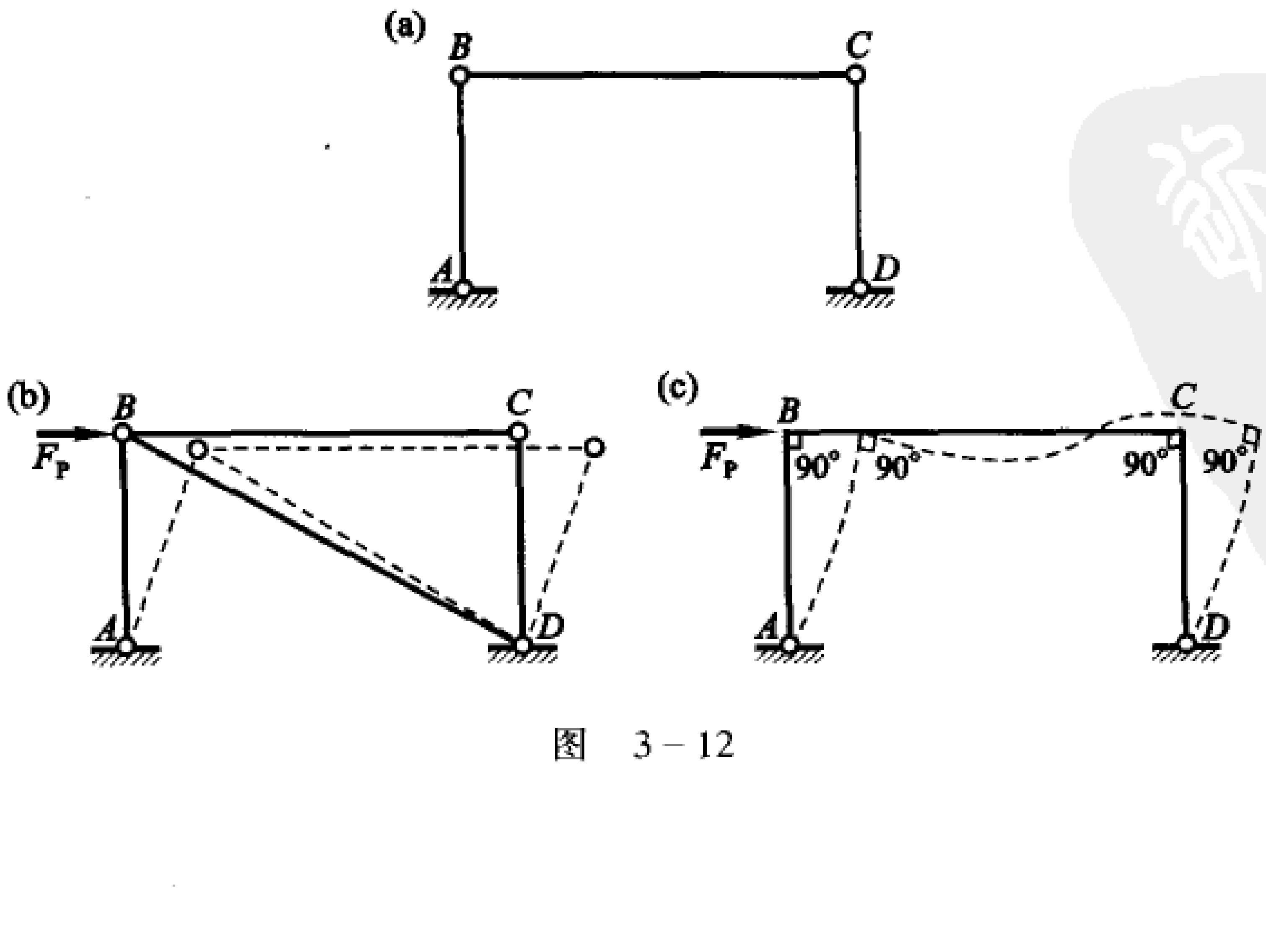


图　3－12

与铰结点相比，刚结点具有不同的特点。从变形角度来看，在刚结点处各杆不能发生相对转动，因而各杆间的夹角始终保持不变。从受力角度来看，刚结点可以承受和传递弯矩，因而在刚架中弯矩是主要内力。

为了将刚架与简支梁加以比较，在图3－13中给出二者在均布荷载作用下的弯矩图，在图3－13b所示刚架中由于刚结点处产生弯矩，故横梁跨中弯矩的峰值得到削减。

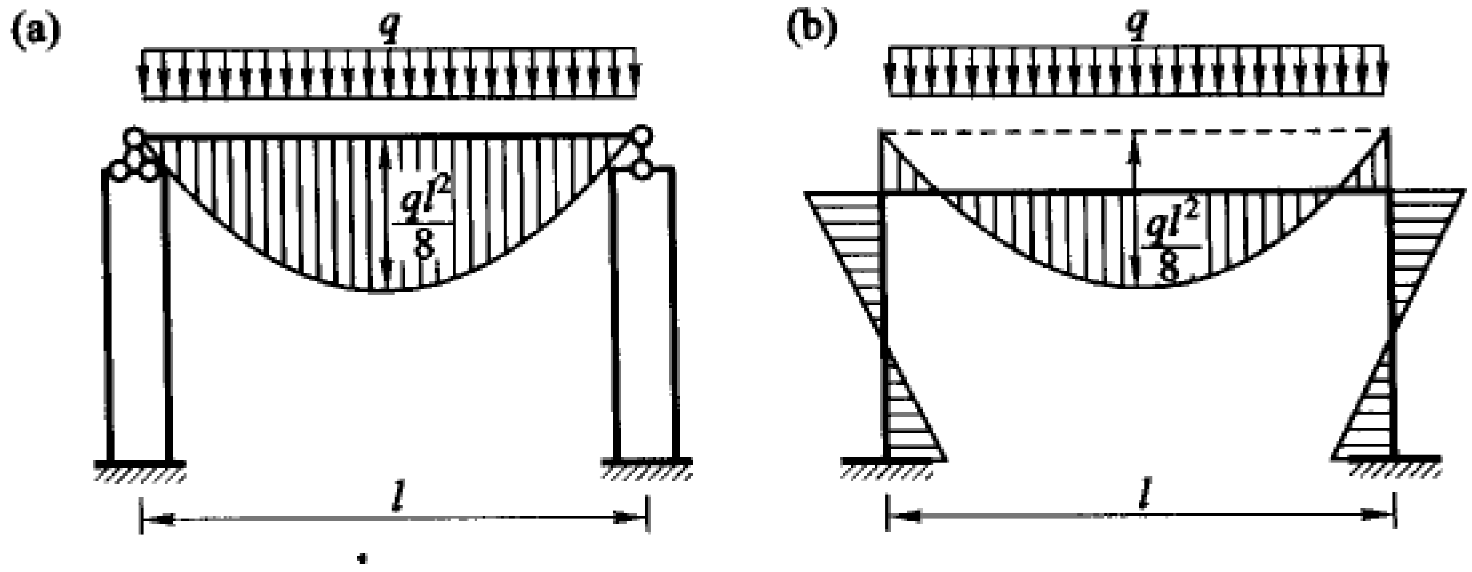


图　3－13

2．刚架的支座反力

在静定平面刚架的受力分析中，通常是先求支座反力，再求控制截面的内力，最后作内力图。

现在结合图3－14a所示的三铰刚架，说明支座反力的求法。

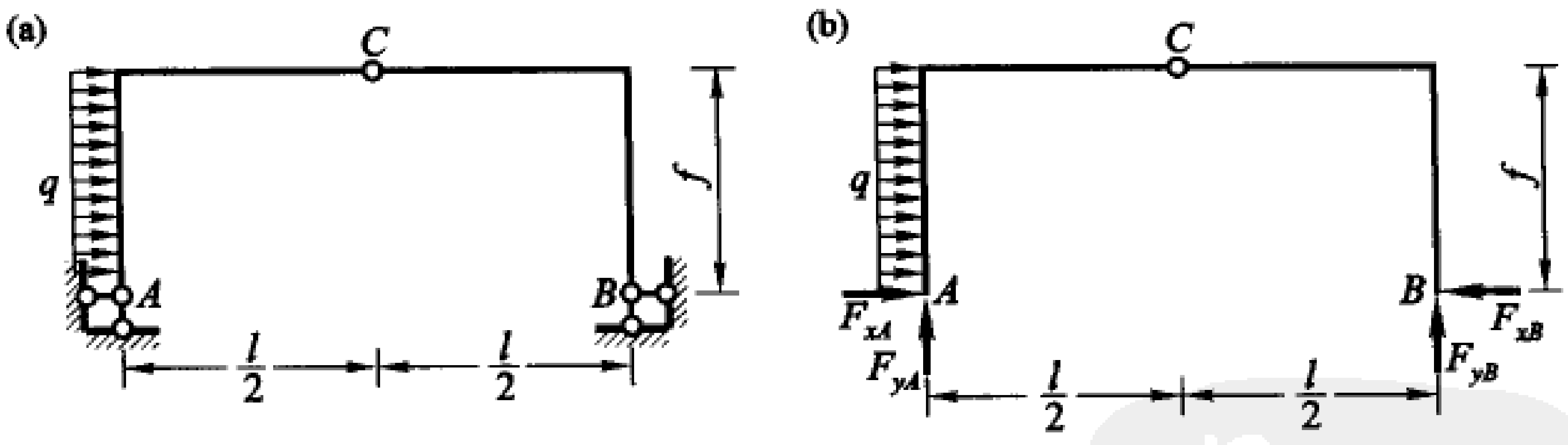


图　3－14

截断铰支座A和B，隔离体图如图3－14b所示，这里共有四个未知反力F_{xA}、F_{yA}、F_{xB}、F_{yB}。从运动角度来看，隔离体一方面可以整体运动，共有三个自由度；另一方面其中的两个折线杆件AC和BC还可以绕铰C相对转动。因此，再增加一个自由度。与之相应，隔离体平衡时所应满足的静力平衡方程共有四个：除三个整体平衡方程之外，又加一个铰C处弯矩为零的静力平衡方程。下面利用这四个静力平衡方程计算四个支座反力。

首先用两个整体平衡方程求F_{yA}和F_{yB}。

$$\sum M_B = 0,\qquad F_{yA}\times l + \frac{q}{2}f^2 = 0$$

所以

$$F_{yA} = -\frac{qf^2}{2l}\ (\downarrow)$$

$$\sum M_A = 0,\qquad F_{yB}l - \frac{q}{2}f^2 = 0$$

所以

$$F_{yB} = \frac{qf^2}{2l}\ (\uparrow)$$

然后用铰 C 处弯矩为零的平衡方程求 F_{xB}。如取右半边刚架作隔离体，则有

$$M_C = 0,\qquad F_{xB}f - F_{yB}\frac{l}{2} = 0$$

所以

$$F_{xB} = F_{yB}\frac{l}{2f} = \frac{qf}{4}\ (\leftarrow)$$

最后用第三个整体平衡方程求 F_{xA}，

$$\sum F_x = 0,\qquad F_{xA} - F_{xB} + qf = 0$$

所以

$$F_{xA} = F_{xB} - qf = -\frac{3}{4}qf\ \ (\leftarrow)$$

图 3－15a 为一个多跨刚架。从受力角度看，这个刚架共有四个未知反力 F_{xG}、F_{yB}、F_{xA}、F_{yA}。从整体的三个静力平衡方程，加上铰 E 处弯矩为零的静力平衡方程，原则上可以求出这四个支座反力。从几何构造角度看，此刚架的组成次序是先固定右边，然后再固定左边。因此，求反力的次序应与组成次序相反，先求左边的 F_{xG}，再求右边的 F_{yB}、F_{xA}、F_{yA}。这样，就可以避免解算联立方程的麻烦。

先考虑 GE 部分，由 $M_E=0$，得

$$F_{xG} = -\frac{1}{4\ \text{m}}\times(2\ \text{kN}\times 2\ \text{m} + 4\ \text{kN/m}\times 2\ \text{m}\times 1\ \text{m}) = -3\ \text{kN}\ \ (\leftarrow)$$

再考虑整体平衡条件：

$$\sum F_x = 0,\qquad F_{xA} = 2\ \text{kN} + 2\ \text{kN} - 3\ \text{kN} = 1\ \text{kN}\ \ (\leftarrow)$$

$$\sum M_B = 0,\qquad F_{yA} = \frac{1}{4\ \text{m}}\times(2\ \text{kN}\times 2\ \text{m} + 2\ \text{kN}\times 2\ \text{m}) = 2\ \text{kN}\ \ (\uparrow)$$

$$\sum M_A = 0,\qquad F_{yB} = \frac{1}{4\ \text{m}}\times(4\ \text{kN/m}\times 8\ \text{m}\times 4\ \text{m} - 2\ \text{kN}\times 2\ \text{m} -$$

2 kN×2 m) = 30 kN （↑）

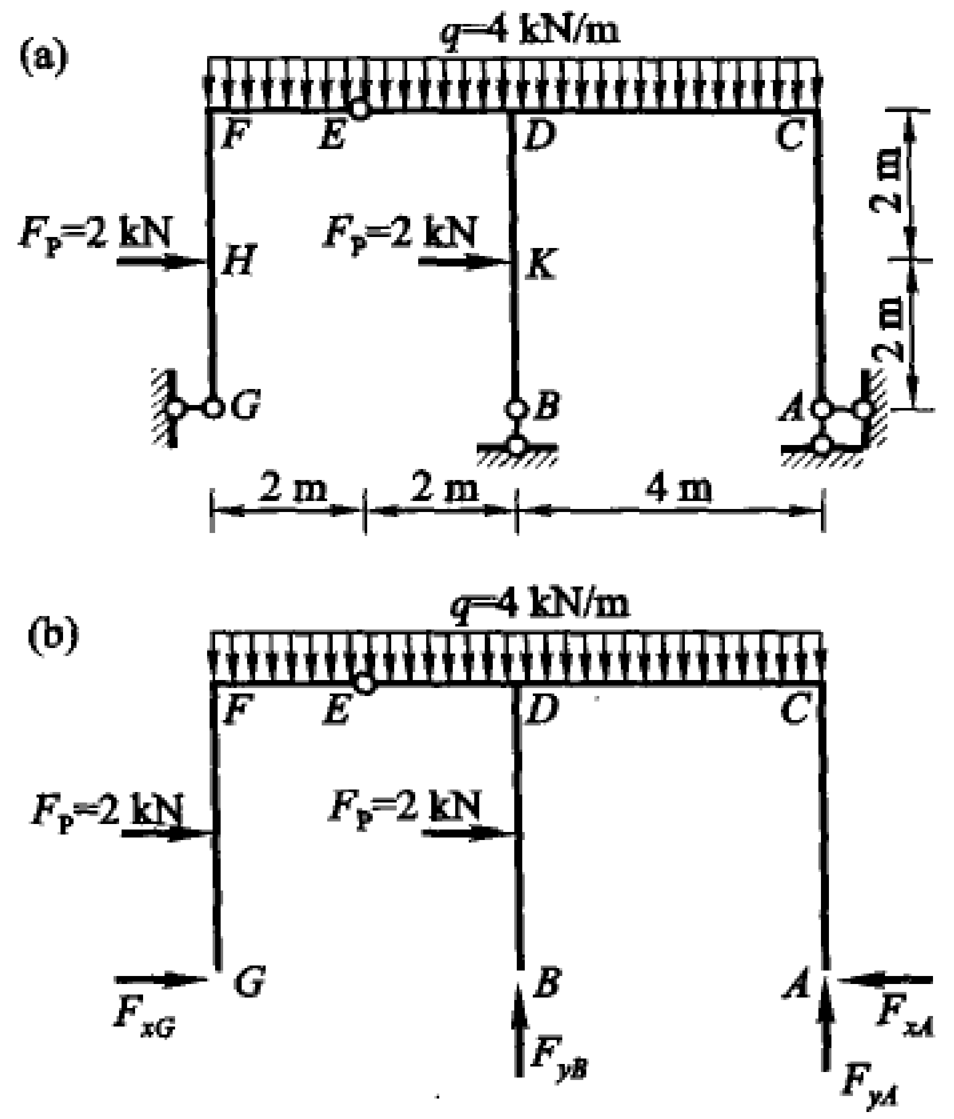


图 3-15

3．刚架中各杆的杆端内力

作刚架内力图时，首先求各杆的杆端内力。求杆端内力的基本方法仍是截面法。现结合刚架的特点来说明几个问题。

第一，要注意内力正负号的有关规定。在刚架中，剪力和轴力都规定正负号（与梁相同），但弯矩则不规定正负号，而只规定弯矩图的纵坐标应画在杆件受拉纤维的一边。也就是说，这里不是用正负号而是用纵坐标的位置来标明弯矩的性质（标明受拉纤维在哪一边）。

第二，要注意在结点处有不同的杆端截面。在图 3-16a 所示的刚架中，在结点 D 处有三个杆件 DA、DB、DC 相交。因此，在结点 D 处有三个不同的截面 D_1、D_2、D_3。如果笼统地说截面 D，则是无意义的。这三个截面 D_1、D_2、D_3 的弯矩通常分别用 M_{DA}、M_{DB}、M_{DC} 来表示。对于剪力和轴力符号也采用同样的下标写法。

第三，要正确地选取隔离体。用截面法求三个指定截面 D_1、D_2、D_3 的内力时，应分别在指定截面切开，得出隔离体图如图 3-16b、c、d 所示。这里在每个切开的截面处作用有三个未知力 F_N、F_Q、M，其中未知力 F_N 和 F_Q 都按正方向画出，而未知力 M 则按任意指定的方向画出。

分别对三个隔离体应用平衡条件，可求得内力如下：

$$\left.\begin{aligned}F_{NDA}&=0\\F_{QDA}&=5\ \text{kN}\\M_{DA}&=5\ \text{kN·m}\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}F_{NDB}&=4\ \text{kN}\\F_{QDB}&=5\ \text{kN}\\M_{DB}&=15\ \text{kN·m}\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}F_{NDC}&=0\\F_{QDC}&=-4\ \text{kN}\\M_{DC}&=20\ \text{kN·m}\end{aligned}\right\}$$

（左边受拉）　　（右边受拉）　　（下边受拉）

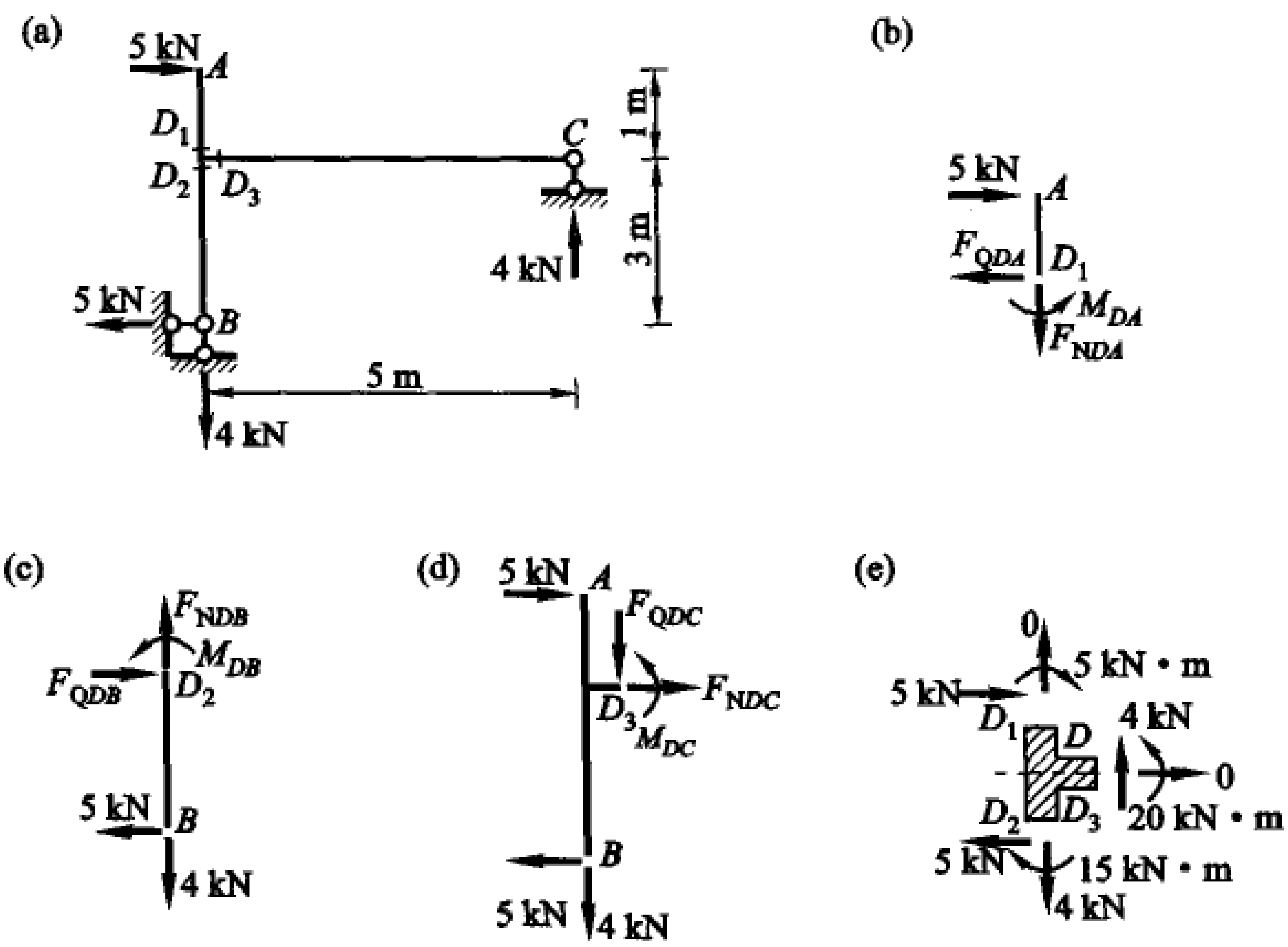


图　3-16

第四，要注意结点的平衡条件。上面求得的三个截面 D_1、D_2、D_3 的内力并不是独立的，它们应满足结点 D（图 3-16e）的三个平衡条件：

$$\sum F_x=5\ \text{kN}-5\ \text{kN}+0=0$$

$$\sum F_y=0-4\ \text{kN}+4\ \text{kN}=0$$

$$\sum M=5\ \text{kN·m}+15\ \text{kN·m}-20\ \text{kN·m}=0$$

通常可利用这些条件进行校核。

4．刚架的内力图

刚架内力图基本作法是把刚架拆成杆件。也就是说，先求各杆的杆端内力，然后利用杆端内力分别作各杆的内力图，各杆内力图合在一起就是刚架的内力图。

下面结合图 3-17a 所示刚架说明其计算步骤。

（1）求支座反力

$$\sum F_x=0,\qquad F_{xA}=qa\quad(\leftarrow)$$

$$\sum M_A=0,\qquad F_{yB}=\frac{qa}{2}\quad(\uparrow)$$

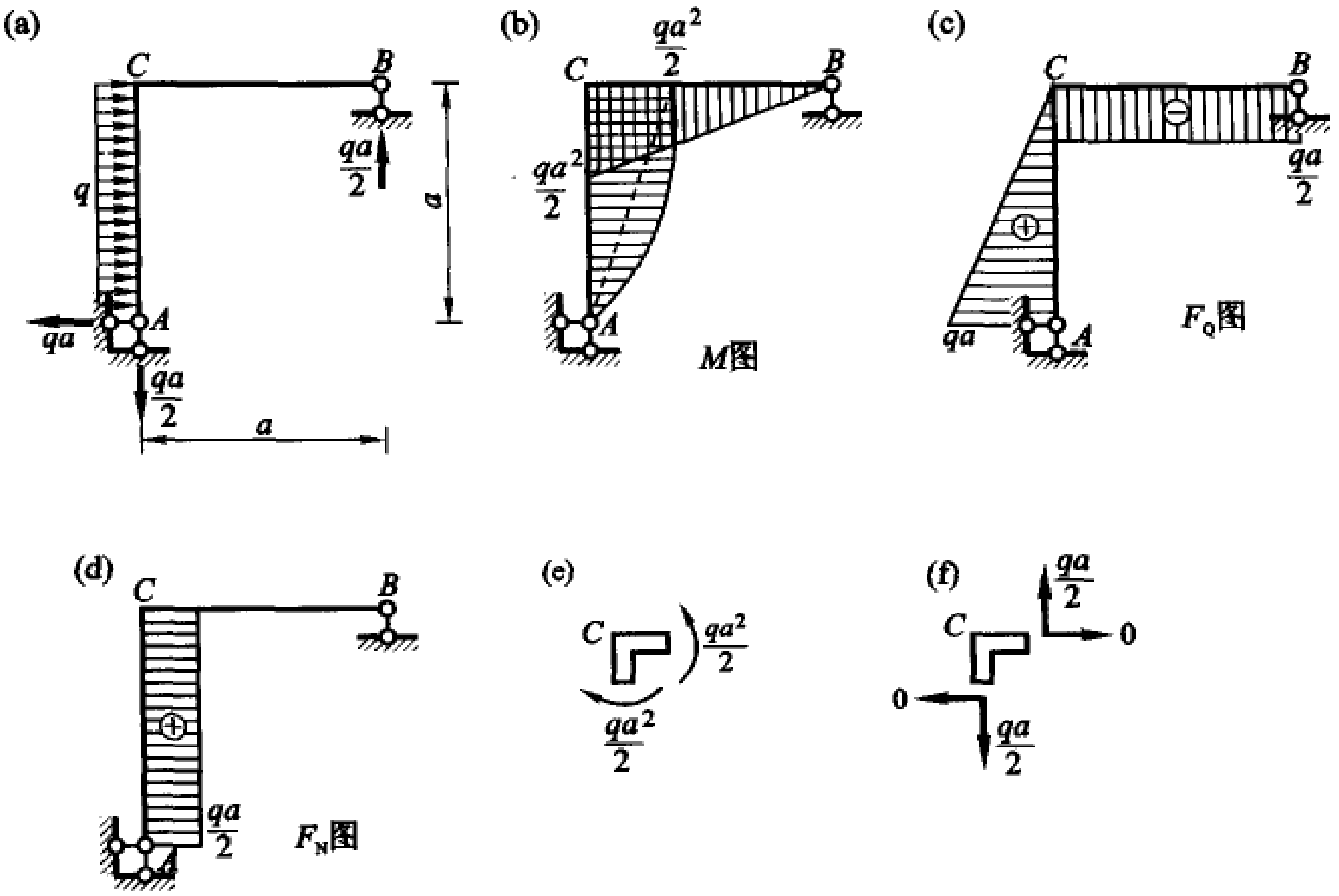


图 3-17

$$\sum F_y = 0, \qquad F_{yA} = \frac{qa}{2}\ (\downarrow)$$

(2) 作 M 图

先根据截面法，求得各杆杆端弯矩如下：

$$M_{AC} = 0, \qquad M_{CA} = \frac{qa^2}{2}\ (\text{右边受拉})$$

$$M_{BC} = 0, \qquad M_{CB} = \frac{qa^2}{2}\ (\text{下边受拉})$$

然后分别作各杆 M 图。

CB 杆上没有荷载作用，将杆端弯矩连以直线即为弯矩图。

AC 杆上有荷载作用，将杆端弯矩连以直线后再叠加简支梁的弯矩图，即为此杆的弯矩图。M 图如图 3-17b 所示。

(3) 作 F_Q 图

先求各杆杆端剪力：

$$F_{QAC} = qa$$

$$F_{QCA} = 0$$

$$F_{QBC} = F_{QCB} = -\frac{qa}{2}$$

利用杆端剪力即可作出剪力图，如图 3-17c 所示。剪力图中须注明正负

号。BC 杆上无荷载作用，故剪力为常数。AC 杆上有均布荷载，剪力图为斜直线。

(4) 作 F_N 图

先求各杆杆端轴力：

$$F_{NAC} = F_{NCA} = \frac{qa}{2}$$

$$F_{NBC} = F_{NCB} = 0$$

F_N 图如图 3-17d 所示，须注明正负号。由于各杆上都无切向荷载，故各杆轴力都是常数。

(5) 校核

图 3-17e 所示为结点 C 各杆杆端的弯矩，满足力矩平衡条件：

$$\sum M = \frac{qa^2}{2} - \frac{qa^2}{2} = 0$$

图 3-17f 所示为结点 C 各杆杆端的剪力和轴力，满足两个投影方程：

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = \frac{qa}{2} - \frac{qa}{2} = 0$$

例 3-4 试用另一种方法作图 3-17a 所示刚架的 F_Q 图和 F_N 图。

解 上面作 F_Q 图和 F_N 图时，杆端剪力和杆端轴力是根据截面一边的荷载及支座反力直接求出的。现在介绍另一种作法：首先作 M 图；然后取杆件作隔离体，利用杆端弯矩求杆端剪力；最后取结点作隔离体，利用杆端剪力求杆端轴力。

(1) 求杆端剪力

作杆 AC 的隔离体图，如图 3-18a 所示。根据已经作出的弯矩图(图3-17b)，可知 A 端 M 为零，C 端 M 为$\frac{qa^2}{2}$，右边受拉，即为反时针力偶。未知杆端力 F_Q 和 F_N 则按正方向画出。应用力矩平衡方程，可求出杆端剪力如下：

$$\sum M_A = 0, \qquad F_{QCA} = \frac{1}{a}\left(\frac{qa^2}{2} - qa \times \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\sum M_C = 0, \qquad F_{QAC} = \frac{1}{a}\left(\frac{qa^2}{2} + qa \times \frac{a}{2}\right) = qa$$

同理，由杆 CB 的隔离体图(图 3-18b)，可得

$$F_{QCB} = F_{QBC} = -\frac{qa}{2}$$

(2) 求杆端轴力

作结点 C 的隔离体图，如图 3-18c 所示(图中未标出弯矩)。根据已经作

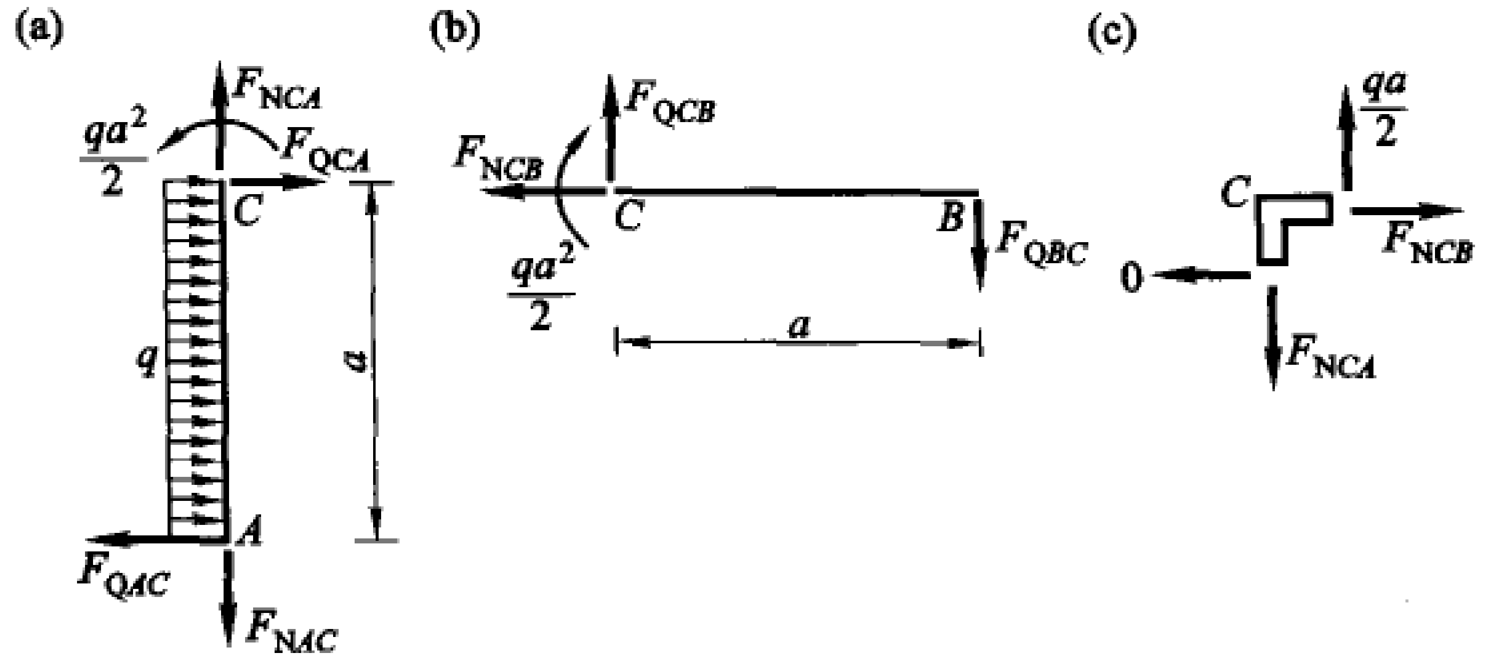


图 3-18

出的 F_Q 图(图 3-17c),可知 $F_{QCA}=0$。$F_{QCB}=-\frac{qa}{2}$(逆时针方向)。其中的未知轴力 F_{NCA} 和 F_{NCB},则按正方向画出。应用投影平衡方程,可求出杆端轴力如下:

$$\sum F_x=0,\qquad F_{NCB}=0$$

$$\sum F_y=0,\qquad F_{NCA}=\frac{qa}{2}$$

两种方法所得的结果相同。对于复杂的情况,以第二种方法较为方便。

例 3-5 试绘制图 3-19a 所示门式刚架在左半跨均布荷载作用下的内力图。

解 (1) 求支座反力

$\sum M_A=0,\quad 6\ \text{kN}\times3\ \text{m}-F_{yB}\times12\ \text{m}=0,\quad F_{yB}=1.5\ \text{kN}\ (\uparrow)$

$\sum M_B=0,\quad 6\ \text{kN}\times9\ \text{m}-F_{yA}\times12\ \text{m}=0,\quad F_{yA}=4.5\ \text{kN}\ (\uparrow)$

$\sum F_x=0,\quad F_{xA}-F_{xB}=0,\quad F_{xA}=F_{xB}$

$\sum M_C=0$(考虑铰 C 右边部分),

$$F_{xB}\times6.5\ \text{m}-F_{yB}\times6\ \text{m}=0,\quad F_{xB}=1.384\ \text{kN}\ (\leftarrow)$$

$$F_{xA}=1.384\ \text{kN}\ (\rightarrow)$$

(2) 作 M 图

先求杆端弯矩,画于受拉一边并连以直线,再叠加简支梁的弯矩图。

以 DC 为例,

$$M_{DC}=-1.384\ \text{kN}\times4.5\ \text{m}=-6.23\ \text{kN·m}$$

$$M_{CD}=0$$

DC 杆的中点弯矩为

$$-\frac{1}{2}\times6.23\ \text{kN·m}+\frac{1}{8}\times1\ \text{kN/m}\times(6\ \text{m})^2=1.38\ \text{kN·m}$$

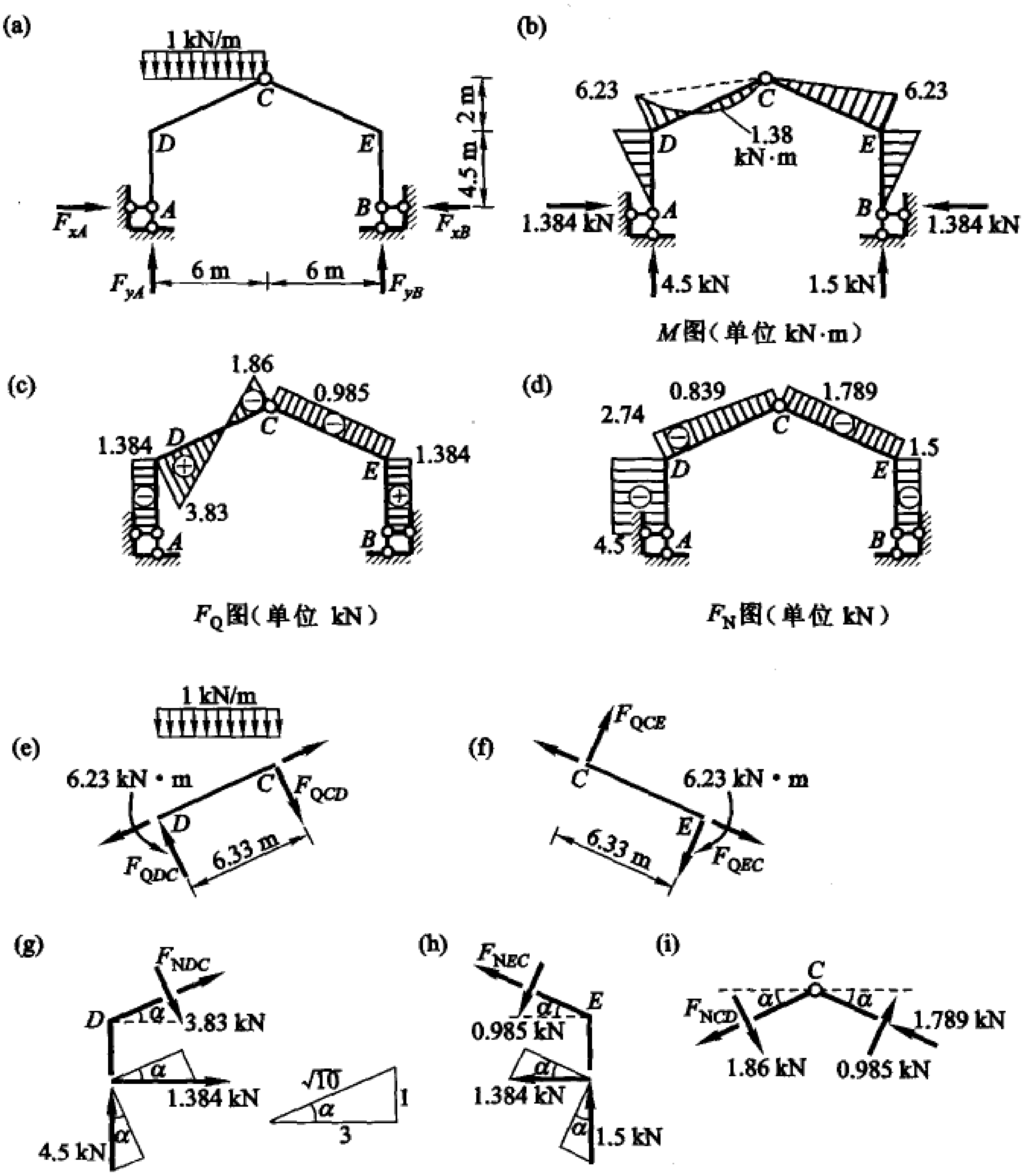


图　3－19

M 图如图 3－19b 所示。

(3) 作 F_Q 图

杆端剪力可分别采用上述两种方法来求。

对于 AD 和 BE 两杆，可取截面一边为隔离体，求出杆端剪力如下：

$$F_{QAD}=F_{QDA}=-1.384 \text{ kN}$$

$$F_{QBE}=F_{QEB}=1.384 \text{ kN}$$

对于 CD 和 CE 两杆，可取杆 CD 和 CE 为隔离体（图 3－19e、f），求出杆端剪力如下：

$$F_{QDC}=\frac{1}{6.33\ \text{m}}\times(6.23\ \text{kN·m}+6\ \text{kN}\times 3\ \text{m})=3.83\ \text{kN}$$

$$F_{QCD}=\frac{1}{6.33\ \text{m}}\times(6.23\ \text{kN·m}-6\ \text{kN}\times 3\ \text{m})=-1.86\ \text{kN}$$

$$F_{QCE}=F_{QEC}=\frac{1}{6.33\ \text{m}}\times(-6.23\ \text{kN·m})=-0.985\ \text{kN}$$

F_Q图如图 3-19c 所示。

(4) 作 F_N 图

杆端轴力可分别采用上述两种方法来求。

对于 AD 和 BE 两杆,可取截面一边为隔离体,求出杆端轴力如下:

$$F_{NAD}=F_{NDA}=-4.5\ \text{kN}$$
$$F_{NBE}=F_{NEB}=-1.5\ \text{kN}$$

至于 DC 和 CE 两杆的杆端轴力,则可取结点为隔离体进行计算。取结点 D 为隔离体(图 3-19g),沿轴线 DC 列投影方程,可求得 F_{NDC} 如下:

$$F_{NDC}+1.384\ \text{kN}\cos\alpha+4.5\ \text{kN}\sin\alpha=0$$
$$F_{NDC}=-2.74\ \text{kN}$$

同样,由结点 E 的隔离体图(3-19h),以 EC 为轴线列投影方程:

$$F_{NEC}=-1.384\ \text{kN}\cos\alpha-1.5\ \text{kN}\sin\alpha=-1.789\ \text{kN}$$

因为杆 EC 上沿轴线方向没有荷载,所以沿杆长轴力不变,即

$$F_{NCE}=-1.789\ \text{kN}$$

为了求得 F_{NCD},可利用结点 C 的隔离体图 3-19i,

$$\sum F_x=0,\quad -F_{NCD}\cos\alpha+1.86\ \text{kN}\sin\alpha+0.985\ \text{kN}\sin\alpha-1.789\ \text{kN}\cos\alpha=0$$
$$F_{NCD}=-0.839\ \text{kN}$$

F_N图如图 3-19d 所示。

(5) 校核

可以截取刚架的任何部分校核是否满足平衡条件。例如,对结点 C 的隔离体(图 3-19i)可以验算$\sum F_y=0$。

例 3-6 试作图 3-20a 所示两层刚架的 M 图。

解 这是一个双层三铰刚架,组成的次序是先固定下部,再固定上部。求约束反力的次序应与组成次序相反,因此先求上部结构的约束反力,然后将求得结果反其指向加于下部结构上,再求下部结构的支座反力。计算结果如图 3-20b 所示。约束力求出后,即可绘制弯矩图,如图 3-20c 所示。

前面讨论了静定梁和静定刚架的受力分析及内力图的绘制。作法要点归纳如下:

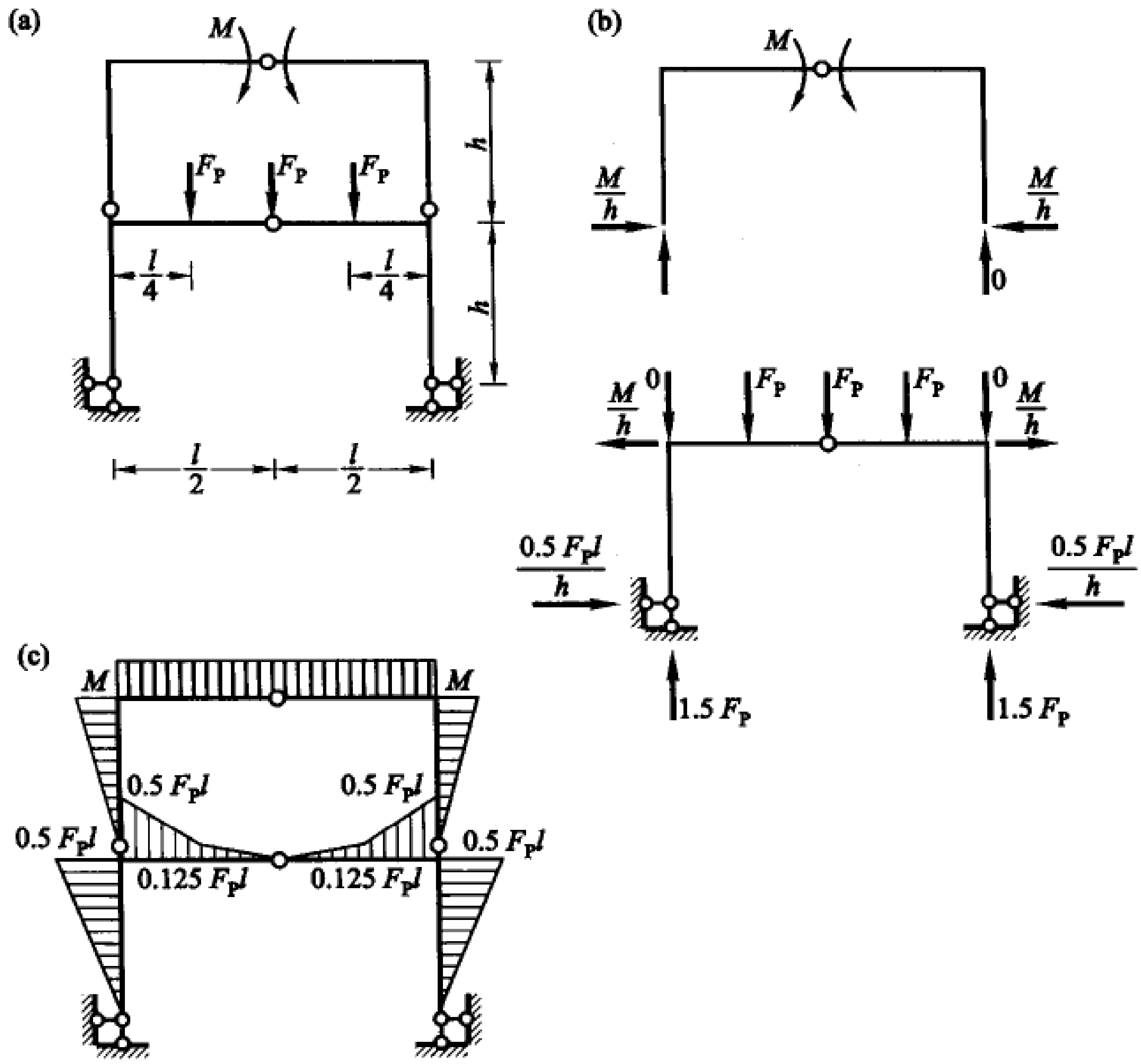


图 3-20

(1) 通常先求约束力和支座反力。求约束力和支座反力时,要注意结构的几何构造特点,求约束力的次序应与组成次序相反。

(2) 作 M 图时,先求每杆的杆端弯矩,将坐标画于受拉纤维一边,连以直线,再叠加上由于横向荷载产生的简支梁的 M 图。M 图不注正负号。

(3) 作 F_Q图时,先计算每杆的杆端剪力。杆端剪力通常可根据截面一边的荷载及支座反力直接计算。当情况比较复杂时,可取一杆为隔离体,利用力矩平衡方程求杆端剪力。杆端剪力求出后,杆的 F_Q图可按简支梁的规律画出。F_Q图的正负号必须注明。

(4) 作 F_N图时,先计算每杆的杆端轴力。杆端轴力通常可根据截面一边的荷载及支座反力直接计算。当情况比较复杂时,可取结构的结点为隔离体,用投影平衡方程求杆端轴力。F_N 图必须注明正负号。

(5) 内力图的校核是必要的。通常截取结点或结构的一部分,验算其是否满足平衡条件。

§3-4 静定平面桁架

1. 桁架的特点和组成

梁和刚架承受荷载后，主要产生弯曲内力，截面上的应力分布是不均匀的，因而材料不能充分利用。桁架是由杆件组成的格构体系，当荷载只作用在结点上时，各杆内力主要为轴力，截面上的应力基本上分布均匀，可以充分发挥材料的作用。因此，桁架是大跨结构常用的一种形式。

桁架在工程实际中有广泛的应用。图 3-21 是钢筋混凝土组合屋架，图 3-22为武汉长江大桥所采用的桁架形式。

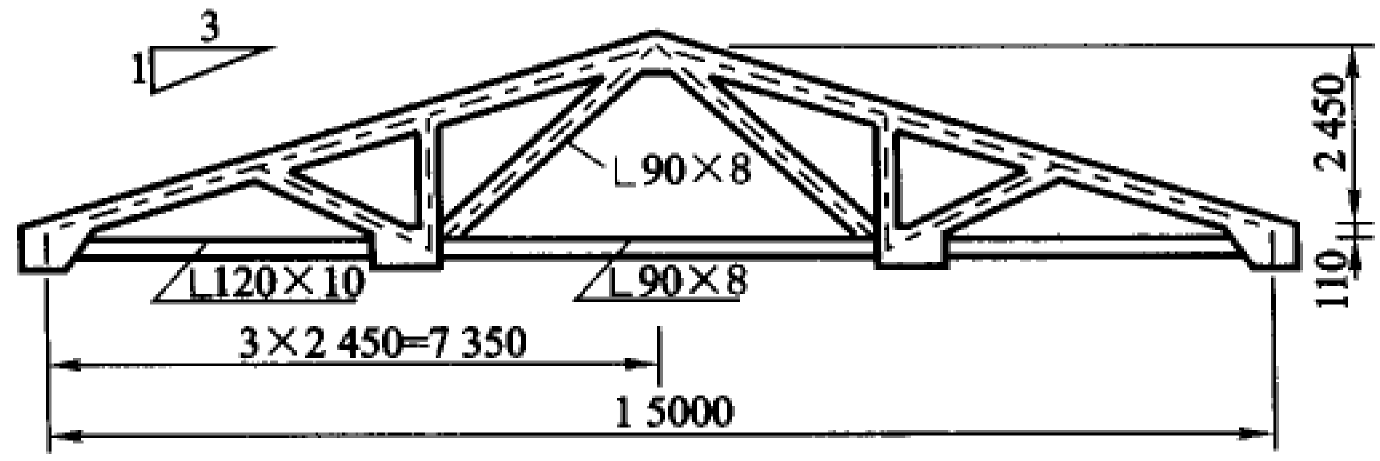


图 3-21①

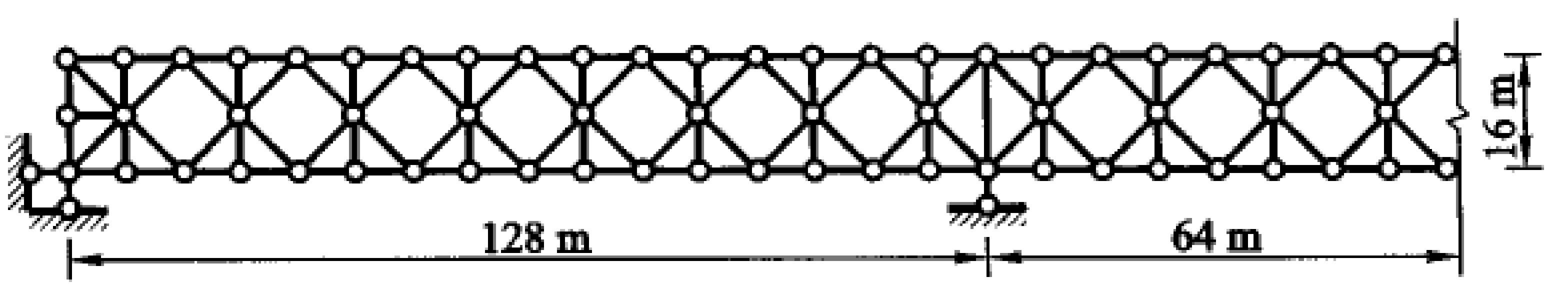


图 3-22

实际桁架的受力情况比较复杂，在计算中必须抓主要矛盾，对实际桁架作必要的简化。通常在桁架的内力计算中，采用下列假定：

(1) 桁架的结点都是光滑的铰结点；

(2) 各杆的轴线都是直线并通过铰的中心；

(3) 荷载和支座反力都作用在结点上。

图 3-23a 是根据上述假设画出的一个桁架的计算简图。各杆均用轴线表示，结点的小圆圈代表铰。荷载 F_{P1}、F_{P2} 和支座反力 F_{yA}、F_{yB} 都作用在结点上。图 3-23b 所示为从这个桁架中任意取出的一根杆件。杆 CD 只在两端受力，此二力既

① 按有关制图标准规定，图中尺寸单位为 mm 者可以不标注。以下类同。

成平衡，所以必然数量相等、方向相反，有同一作用线，即轴线 CD。因此，杆 CD 只受轴力作用。桁架的杆件都只在两端受力，称为二力杆。其轴力可能是拉力，也可能是压力，由具体情况通过计算可以确定。

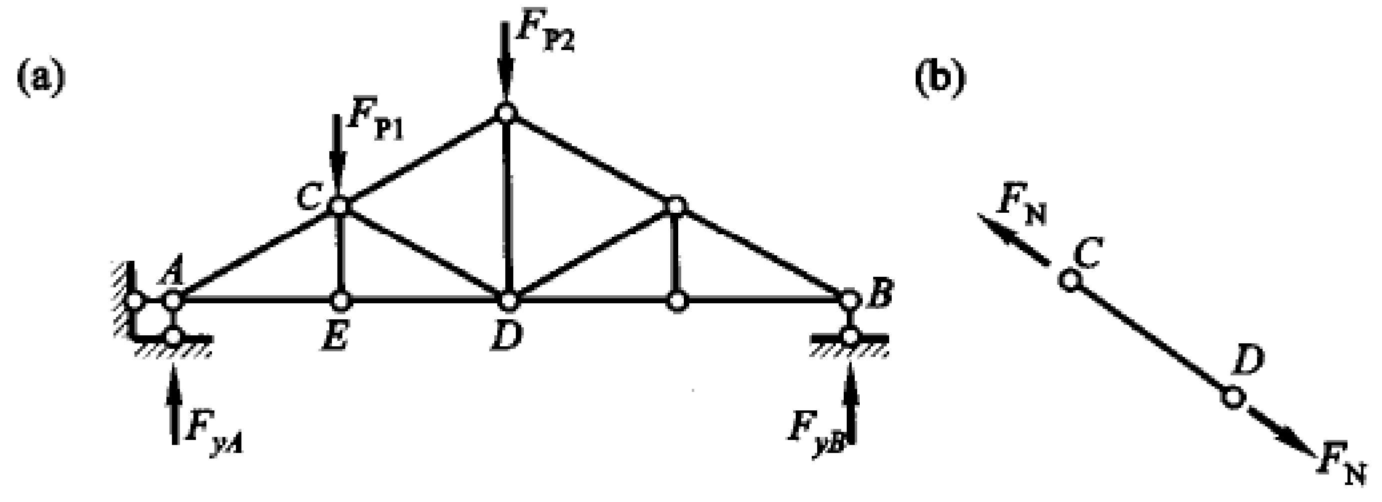


图 3-23

实际桁架与上述假定是有差别的。除木桁架的榫接结点比较接近于铰结点外，钢桁架和钢筋混凝土桁架的结点都有很大的刚性。有些杆件在结点处是连续不断的。各杆的轴线也不一定全是直线，结点上各杆的轴线也不一定全交于一点。但科学实验和工程实践证明，结点刚性等因素对内力的影响一般说来对桁架是次要的。按上述假定计算得到的桁架内力称为主内力。由于实际情况与上述假定不同而产生的附加内力称为次内力。这里，只研究主内力的计算。

桁架的杆件布置必须满足几何不变体系的组成规律。根据几何构造的特点，静定平面桁架可分为三类：

(1) 由基础或一个基本铰接三角形开始，每次用不在一条直线上的两个链杆连接一个新结点。按这个规律组成的桁架称为简单桁架。

如在图 3-24a 中，从三角形 ABC 开始，每次用两根杆(4、5)，(6、7)，(8、9)，(10、11)，(12、13)依次连接结点 D、E、F、G、H，组成一个简单桁架。这个桁架本身是几何不变的，没有多余约束。图 3-24b 是从基础开始，每次用两根杆(1、2)，(3、4)，(5、6)，…依次连接点 A、B、C、…组成的简单桁架。这个桁架是几何不变的，且没有多余约束。

(2) 由几个简单桁架联合组成几何不变的铰结体系，这类桁架称为联合桁架。

在图 3-25 中，Ⅰ、Ⅱ两部分都是简单桁架，用铰 A 和链杆 BC 连接在一起，组成一个联合桁架。因为 A、B、C 三个铰不同在一直线上，这个桁架本身是几何不变的，且没有多余约束。

(3) 凡不属于前两类的桁架，称为复杂桁架，图 3-26 所示为一复杂桁架。

2. 结点法、截面法及其联合应用

为了求得桁架各杆的轴力，可以截取桁架中的一部分为隔离体，考虑隔离体的平衡，建立平衡方程，由平衡方程解出杆的轴力。如果隔离体只包含一个结

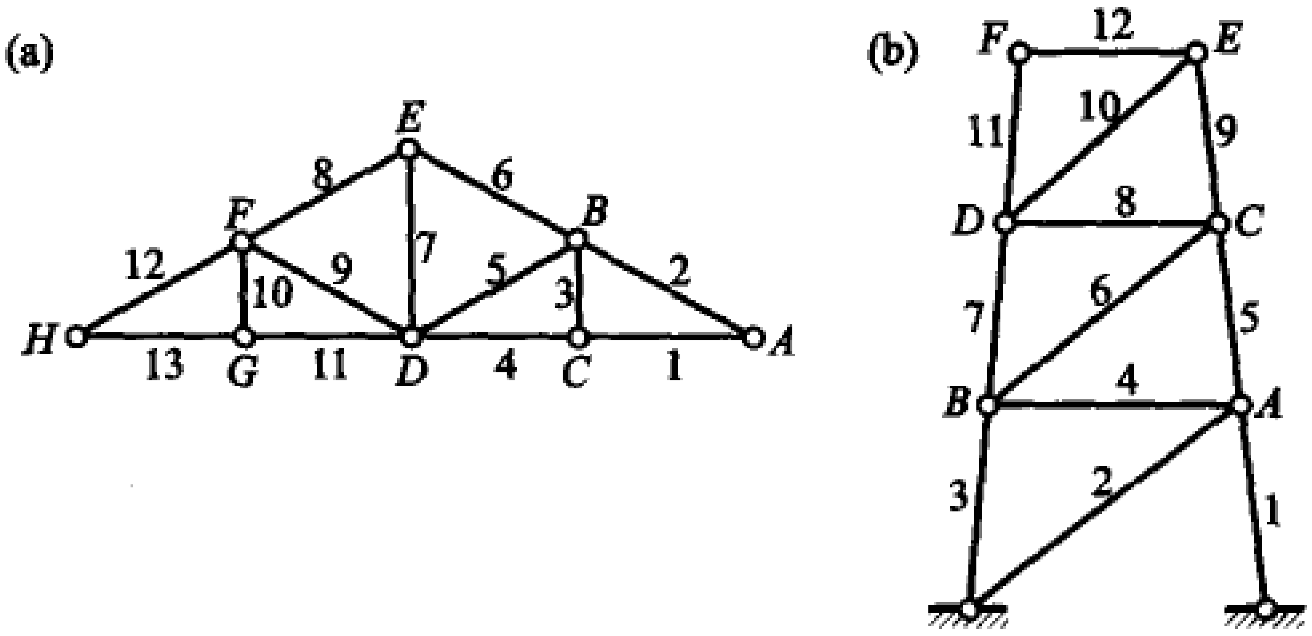


图 3－24

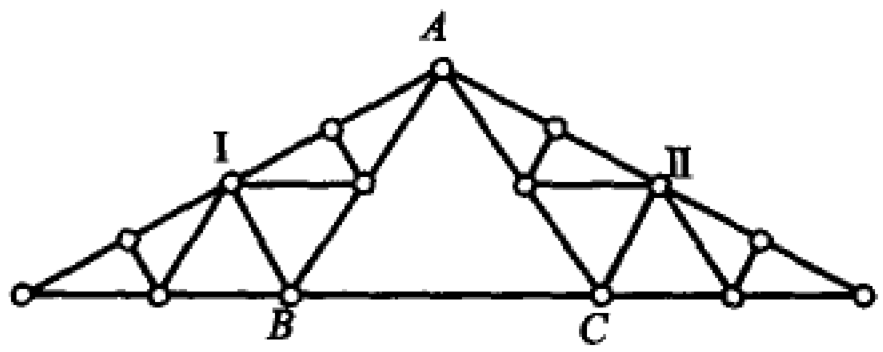


图 3－25

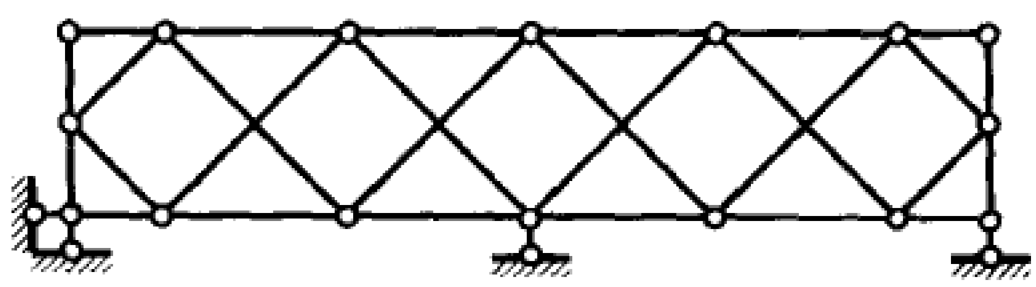


图 3－26

点，这种方法称为结点法。如果截取的隔离体包含两个以上的结点，这种方法称为截面法。

在建立平衡方程时，时常需要把杆的轴力 F_N 分解为水平分力 F_x 和竖向分力 F_y。在图 3－27a 中，杆 AB 的杆长 l 及其水平投影 l_x 和竖向投影 l_y 组成一个三角形。在图 3－27b 中，杆 AB 的轴力 F_N 及其水平分力 F_x 和竖直分力 F_y 也组成一个三角形。这两个三角形各边相互平行，所以是相似的，因而有下列比例关系：

$$\frac{F_N}{l}=\frac{F_x}{l_x}=\frac{F_y}{l_y} \tag{3-4}$$

利用这个比例关系，可以很简便地由 F_N 推算出 F_x 和 F_y，或者反过来由 F_x 推算 F_N 和 F_y，由 F_y 推算 F_N 和 F_x，而不需使用三角函数进行计算。

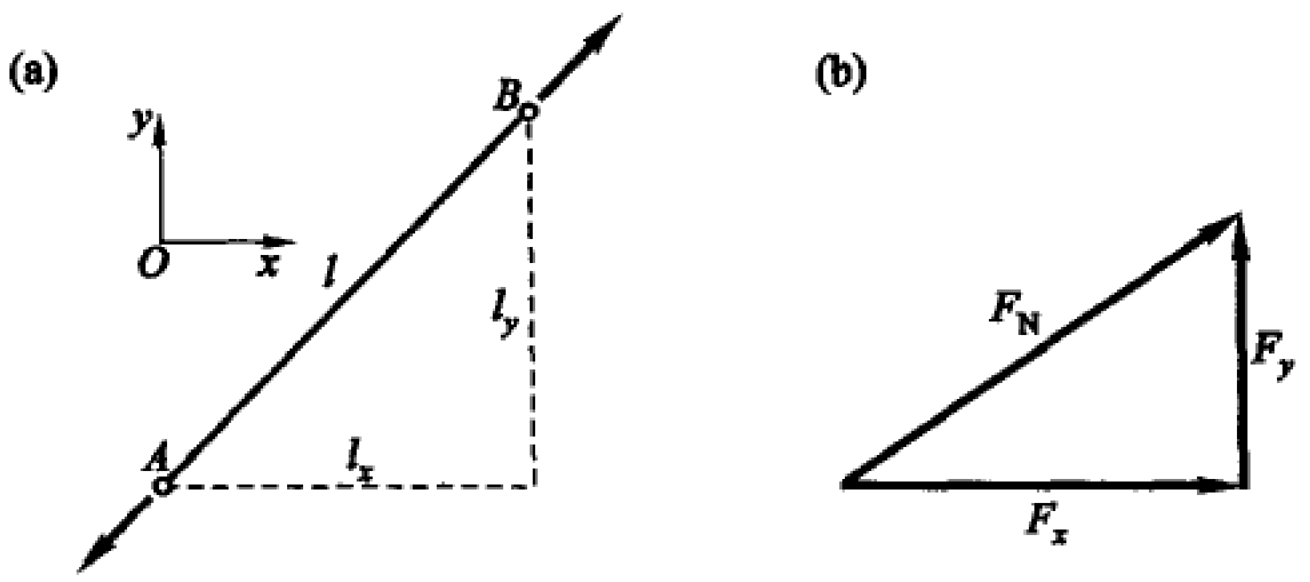


图 3-27

结点法

结点法是取桁架结点为隔离体，利用平面汇交力系的两个平衡条件计算各杆的未知力。如果桁架是静定的，则其计算自由度数 $W=0$，由式(2-7)可知

$$W=2j-b=0$$

即 $2j=b$。因此，利用 j 个结点的 $2j$ 个独立的平衡方程，便可确定全部 b 个杆件或支杆的未知力。

结点法最适用于计算简单桁架。下面用例题说明结点法的详细计算步骤。

在计算过程中，通常先假设杆的未知轴力为拉力。计算结果如得正值，表示轴力确是拉力；如得负值，表示轴力为压力。

例 3-7 图 3-28a 所示为一施工托架的计算简图。在所示荷载作用下，试求各杆的轴力。

解 (1) 求支座反力

$$F_{yA}=F_{yB}=\frac{1}{2}\times(8\ \text{kN}\times4+6\ \text{kN})=19\ \text{kN}\quad(\uparrow)$$

(2) 结点 A

作结点 A 的隔离体图(图 3-28b)，未知力 F_{NAC}、F_{NAD} 假设为拉力，并将斜杆轴力 F_{NAD} 用其分力 F_{xAD} 和 F_{yAD} 代替。

由 $\sum F_y=0$，得

$$19\ \text{kN}-8\ \text{kN}-F_{yAD}=0$$

所以

$$F_{yAD}=11\ \text{kN}$$

利用比例关系式(3-4)，得

$$F_{xAD}=11\ \text{kN}\times\frac{1.5\ \text{m}}{0.5\ \text{m}}=33\ \text{kN}$$

$$F_{NAD}=11\ \text{kN}\times\frac{1.58\ \text{m}}{0.5\ \text{m}}=34.8\ \text{kN}\quad(\text{拉力})$$

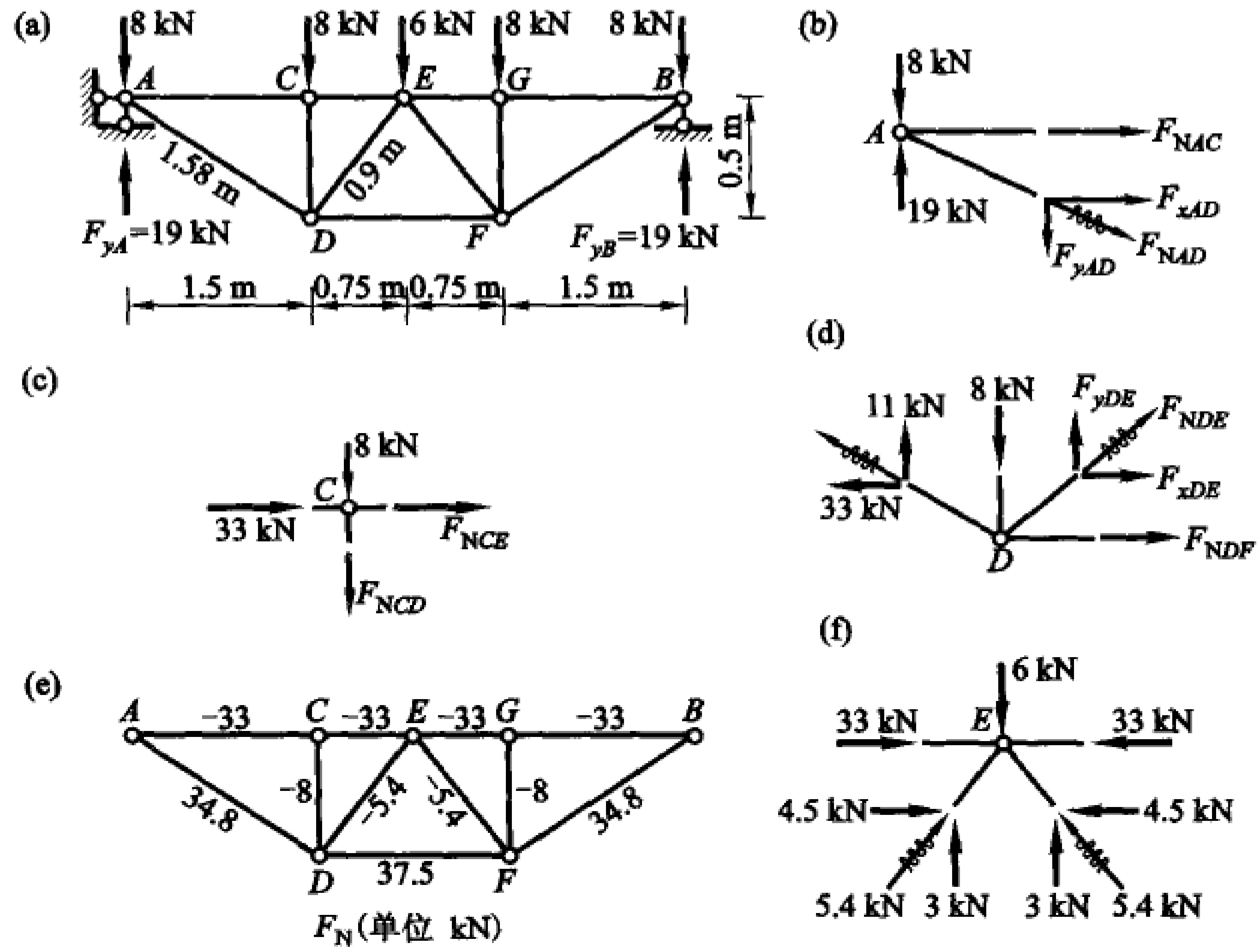


图　3－28

由$\sum F_x=0$，$F_{NAC}+F_{xAD}=0$，得

$$F_{NAC}=-33\ \text{kN}\quad(压力)$$

（3）结点 C

结点 C 的隔离体图见图 3－28c。其中的已知力都按实际方向画出，未知力 F_{NCE} 和 F_{NCD} 都假设为拉力。

$$\sum F_x=0,\quad F_{NCE}+33\ \text{kN}=0$$

得

$$F_{NCE}=-33\ \text{kN}\quad(压力)$$

$$\sum F_y=0,\quad -F_{NCD}-8\ \text{kN}=0$$

得

$$F_{NCD}=-8\ \text{kN}\quad(压力)$$

（4）结点 D

隔离体图见图 3－28d，斜杆轴力都用分力 F_x、F_y 代替，

$$\sum F_y=0,\quad F_{yDE}+11\ \text{kN}-8\ \text{kN}=0$$

得

$$F_{yDE}=-3\ \text{kN}$$

由式(3-4)，　　$F_{NDE}=-3\ \text{kN}\times\dfrac{0.9\ \text{m}}{0.5\ \text{m}}=-5.4\ \text{kN}$ （压力）

得

$$F_{xDE}=-3\ \text{kN}\times\frac{0.75\ \text{m}}{0.5\ \text{m}}=-4.5\ \text{kN}\ （压力）$$

$$\sum F_x=0,\qquad F_{NDF}+F_{xDE}-33\ \text{kN}=0$$

得

$$F_{NDF}=33\ \text{kN}+4.5\ \text{kN}=37.5\ \text{kN}\ （拉力）$$

(5) 利用对称性

由于桁架和荷载都是对称的，因此处于对称位置的两根杆具有相同的轴力，也就是说，桁架中的内力也是对称分布的。因此，只需计算半边桁架的轴力。整个桁架的轴力如图 3-28e 所示。

(6) 校核

对称轴上的结点平衡条件可用来校核。图 3-28f 为结点 E 的隔离体图。由于对称，平衡条件$\sum F_x=0$已经自然满足。因此，只需校核另一个平衡条件如下：

$$\sum F_y=0,\qquad -6\ \text{kN}+3\ \text{kN}+3\ \text{kN}=0$$

图 3-28a 所示的桁架是一个简单桁架。可以认为它是从三角形 BFG 开始，每次用两杆连接一个新结点 E、D、C、A 组成的。只要按照与组成相反的次序 A、C、D、E、F、G 截取结点，则在每个结点只遇到两个未知力。总之，用结点法计算简单桁架时，如果截取结点的次序与桁架组成时添加结点的次序相反，就可以顺利地求出全部轴力。

一个简单桁架往往可以按不同的结点次序组成，因此用结点法求解时也可按不同的次序截取结点。例如，图 3-28a 所示桁架，也可以认为是由三角形 ACD 开始，依次用二杆连接结点 E、F、G、B 组成的。所以，这个桁架也可以按 B、G、F、E、C、D 的次序截取结点。

这里提一下结点单杆的概念。如果在同一结点的所有内力为未知的各杆中，除某一杆外，其余各杆都共线，则该杆称为此结点的单杆。关于结点单杆有下面两种情况：

(1) 结点只包含两个未知力杆，且此二杆不共线(图 3-29a)，则每杆都是单杆；

(2) 结点只包含三个未知力杆，其中有两杆共线(图 3-29b)，则第三杆是单杆。

下面给出有关结点单杆的一些性质：

(1) 结点单杆的内力，可由该结点的平衡条件直接求出。而非结点单杆的

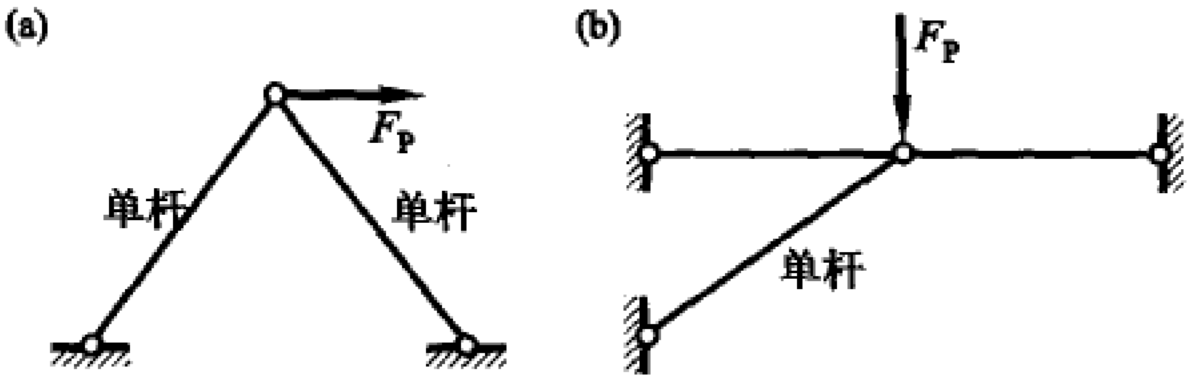


图　3-29

内力则不能由该结点的平衡条件直接求出。

(2) 当结点无荷载作用时，单杆的内力必为零(称为零杆)。或者说，无载结点的单杆必为零杆。图 3-30 所示桁架在荷载 F_P作用下只有用粗线表示的各杆(杆 AB～杆 HI)内力不为零，其余各杆都是零杆。因为按照图中数字标明的次序，可依次判断它们是无载结点的单杆。

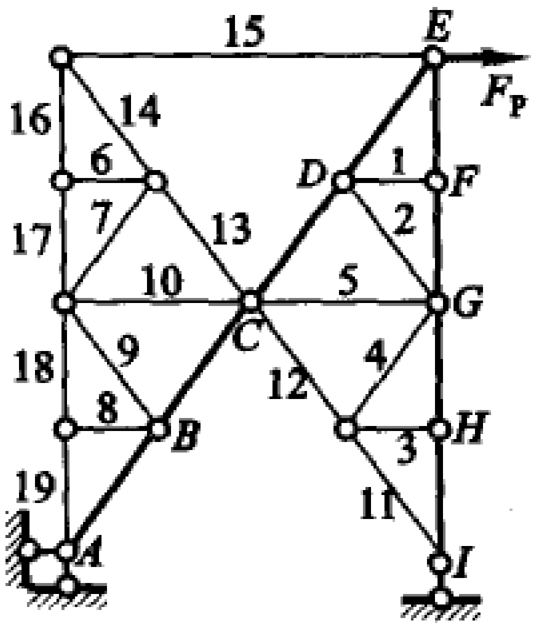


图　3-30

(3) 如果依靠拆除结点单杆的方法可将整个桁架拆完，则此桁架即可应用结点法按照每次只解一个未知力的方式将各杆内力求出。计算程序应按照拆除单杆的程序进行。图 3-31a 所示桁架虽不是简单桁架，但可以依靠拆除单杆的方法将整个结构拆完，拆除次序如图 3-31a 中数字所示。各杆内力可采用结点法求出。运算直接在桁架图上进行。因为对称，图 3-31b 中只注明了一半。

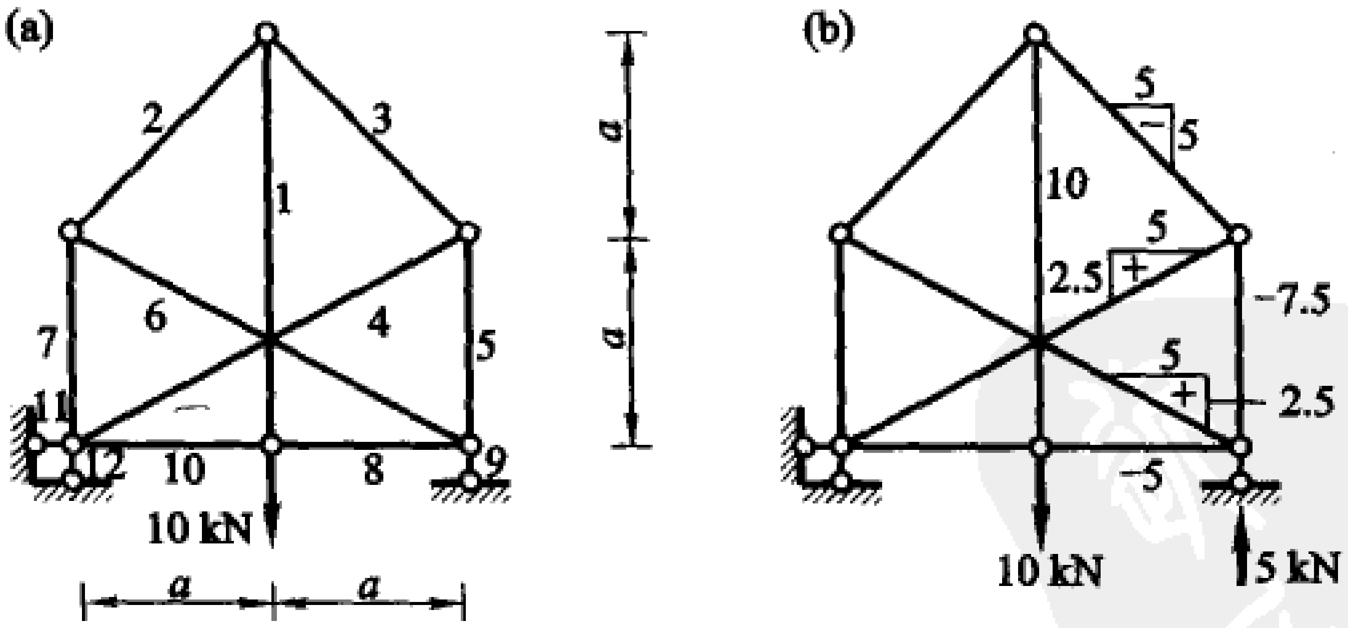


图　3-31

截面法

截面法是用截面切断拟求内力的杆件，从桁架中截出一部分为隔离体(隔离体包含两个以上的结点，所作用的力系为平面一般力系)，利用平面一般力系的

三个平衡方程，计算所切各杆中的未知轴力。如果所切各杆中的未知轴力只有三个，它们既不相交于同一点，也不彼此平行，则用截面法即可直接求出这三个未知轴力。因此，截面法最适用于下列情况：联合桁架的计算；简单桁架中只求个别杆件轴力的计算。

在计算中，仍先假设未知轴力为拉力。计算结果如得正值，则实际轴力就是拉力；如得负值，则是压力。

为了避免解联立方程，应注意对平衡方程加以选择。

例 3-8 试求图 3-32a 所示桁架中 1、2、3 三杆的轴力。桁架所受荷载和各杆长度(单位为 mm)已在图中给出。

解 先求出支座反力：

$$F_{yA} = 4.52\ \text{kN}\ \ (\uparrow)$$

$$F_{yG} = 1.48\ \text{kN}\ \ (\uparrow)$$

此桁架是简单桁架，虽然可以采用结点法计算，但必须从端部开始，逐步截取结点 A、b、B、c、C，才能求出 1、2、3 三杆的轴力。因此，对于这种只求少数杆件轴力的问题，以直接采用截面法较为方便。

作截面 $m-m$，切断 1、2、3 三杆，取右边部分为隔离体，如图 3-32b 所示(G 点处的支杆也被切断)，其中共有三个未知力 F_{N1}、F_{N2}、F_{N3}，全部设为拉力，可利用隔离体的三个平衡方程求出。

应用平衡方程求轴力时，应注意避免解联立方程。例如，为了求未知力 F_{N1}，可取其他未知力 F_{N2} 和 F_{N3} 的交点 C 为力矩中心，列出力矩平衡方程。这时，轴力 F_{N1} 就是方程中唯一的未知量，因而可直接求出如下：

$$\sum M_C = 0,\qquad F_{N1}\times 2.48\ \text{m} + 1\ \text{kN}\times 3.00\ \text{m} - 1.48\ \text{kN}\times 11.85\ \text{m} = 0$$

所以

$$F_{N1} = 5.87\ \text{kN}\ \ (\text{拉力})$$

同样，求 F_{N2} 时，可取 F_{N1} 与 F_{N3} 的交点 d 为力矩中心。此外，为了便于计算斜杆轴力 F_{N2} 的力矩，可先将 F_{N2} 在 D 点分解为 F_{x2} 和 F_{y2}。由力矩方程

$$\sum M_d = 0,\qquad -F_{x2}\times 2.80\ \text{m} - 1.48\ \text{kN}\times 8.85\ \text{m} = 0$$

所以

$$F_{x2} = -4.68\ \text{kN}$$

再由比例关系，得

$$F_{N2} = -4.68\ \text{kN}\times\frac{3.017\ \text{m}}{3.00\ \text{m}} = -4.70\ \text{kN}\ \ (\text{压力})$$

最后，求 F_{N3} 时，由于其他未知力已经求出，故也可利用投影平衡方程

$$\sum F_x = 0,\qquad -F_{x3} - F_{N1} - F_{x2} = 0$$

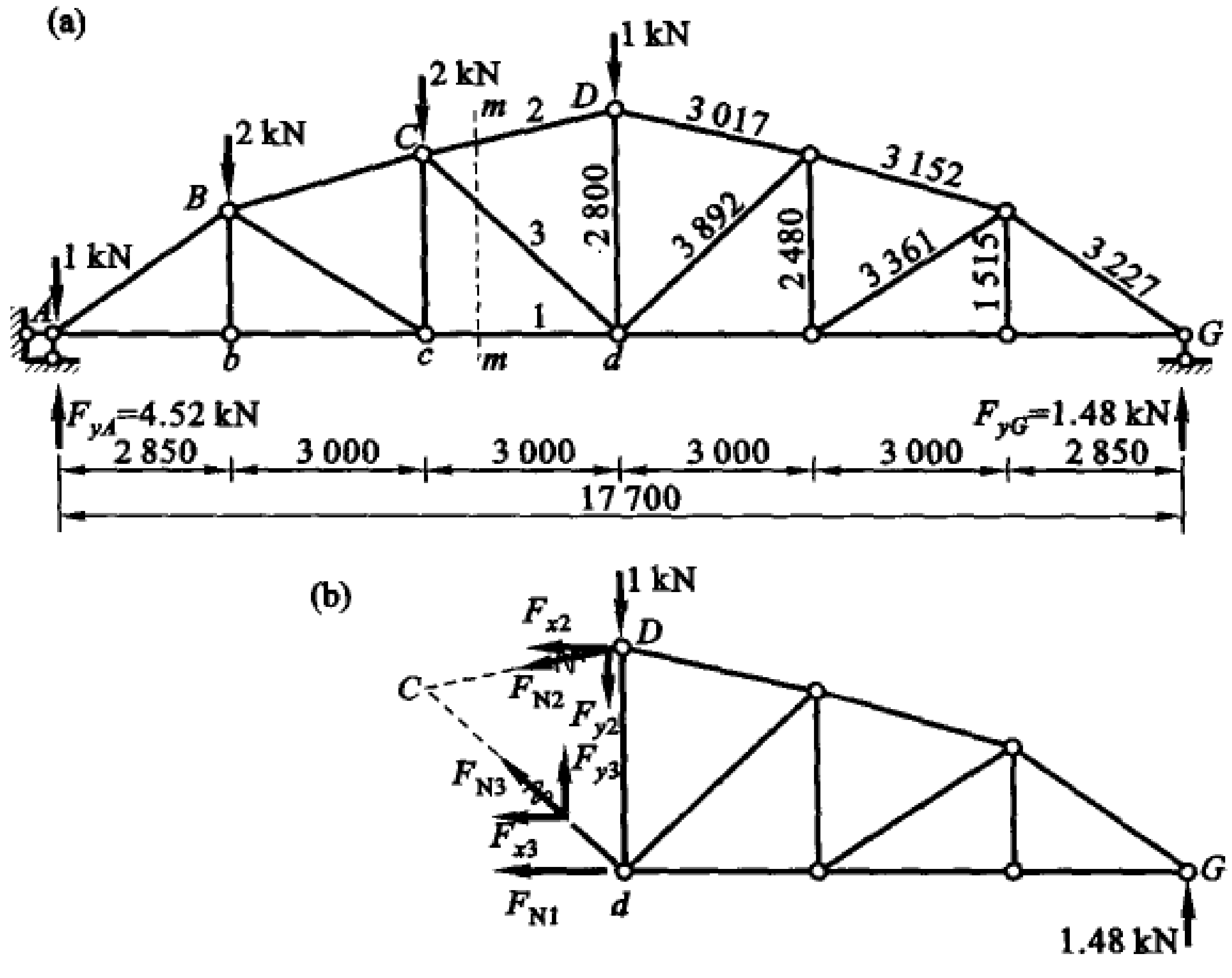


图 3-32

所以

$$F_{x3} = -F_{N1} - F_{x2} = -5.87\ \text{kN} + 4.68\ \text{kN} = -1.19\ \text{kN}$$

再由比例关系，得

$$F_{N3} = -1.19\ \text{kN} \times \frac{3.89\ \text{m}}{3.00\ \text{m}} = -1.54\ \text{kN}$$

以上计算结果，可应用平衡方程$\sum F_y = 0$来进行校核。

这里，提一下截面单杆的概念。如果某个截面所截的内力为未知的各杆中，除某一杆外其余各杆都交于一点（或彼此平行——交点在无穷远处），则此杆称为该截面的单杆。关于截面单杆有下列两种情况：

（1）截面只截断三个杆，且此三杆不交于一点（或不彼此平行），则其中每一杆都是截面单杆（例如图 3-32a 中的杆 1、2、3 都是截面 $m-m$ 的单杆）。

（2）截面所截杆数大于 3，但除某一杆外，其余各杆都交于一点（或都彼此平行），则此杆也是截面单杆（例如图 3-33 中的 a 杆是截面 $m-m$ 的单杆）。

截面单杆具有如下性质：截面单杆的内力可从本截面相应的隔离体的平衡条件直接求出。对于第一种截面单杆，上述性质是显然的。对于第二种截面单杆，由图 3-33 也容易得出上述结论。实际上，在图 3-33a 中，单杆 a 的轴力可利用其余各杆交点 O 的力矩方程求出；在图 3-33b 中，单杆 a 的轴力可利用沿其余各杆垂直方向的投影方程求出。

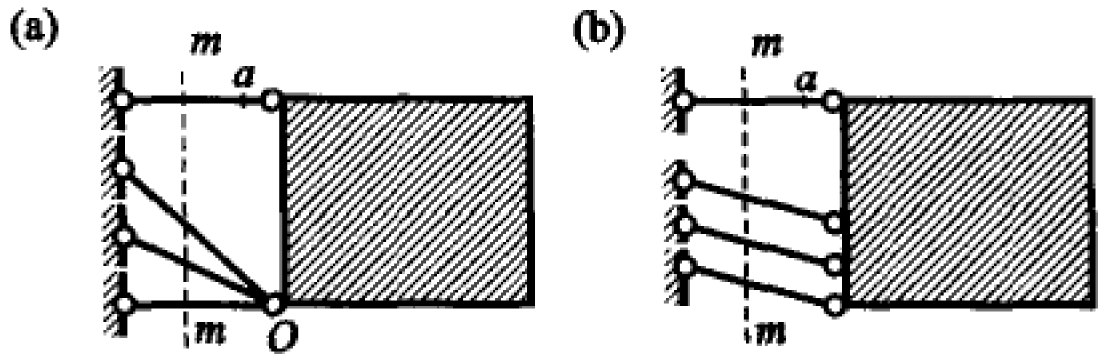


图 3-33

在计算联合桁架和某些复杂桁架时，应注意应用截面单杆的上述性质。

图 3-34 所示桁架虽然是一个复杂桁架，但对图中所示水平截面 $m-m$ 来说，AF 杆是截面单杆，因此其轴力可由此截面的水平投影方程直接求出。此杆轴力求出后，其余各杆轴力即可用结点法依次求出（依次取结点 F、D、G、E 为隔离体）。

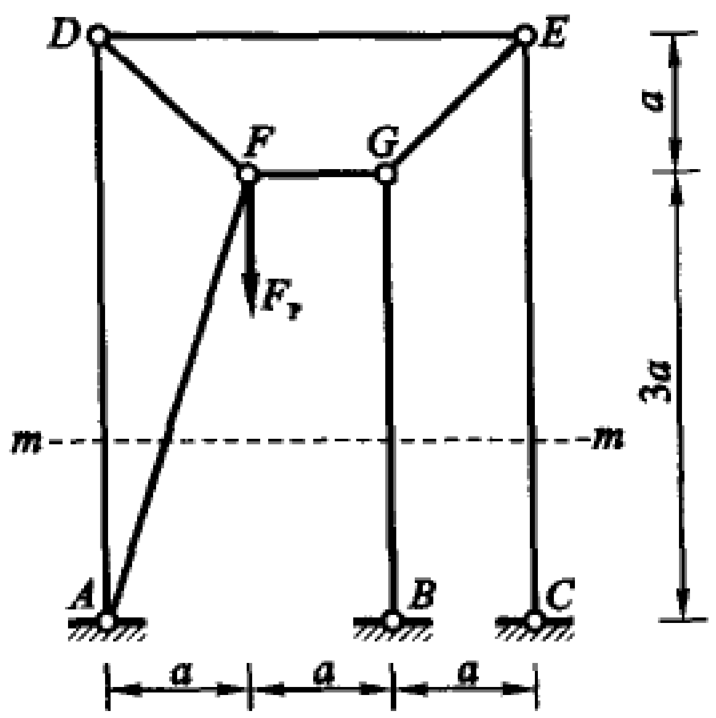


图 3-34

图 3-35 所示桁架都是联合桁架。每个结点都不存在结点单杆，故用结点法时遇到困难。这些联合桁架都是由两个简单桁架用三个连接杆 1、2、3 装配而成的。对于图中所示的截面，连接杆 1、2、3 都是截面单杆，因而可以直接求出其轴力。由此可知，计算联合桁架时，一般不宜直接采用结点法，而应首先采用截面法，并从计算三个连接杆轴力开始。

结点法与截面法的联合应用

在桁架计算中，有时联合应用结点法和截面法更为方便。

图 3-36a 示一简单桁架，设拟求两根斜杆 1、2 的轴力。如果使用截面 $m-m$，考虑左部的平衡，由 $\sum F_y=0$ 得到的方程包括 F_{y1} 和 F_{y2} 两个未知量，还需要对 F_{y1} 和 F_{y2} 补充一个方程。这个补充方程可以利用结点法得到。由结点 G 的平衡（图 3-36b），可以建立 F_{x1} 和 F_{x2} 的关系，从而也就建立了 F_{y1} 和 F_{y2} 的关

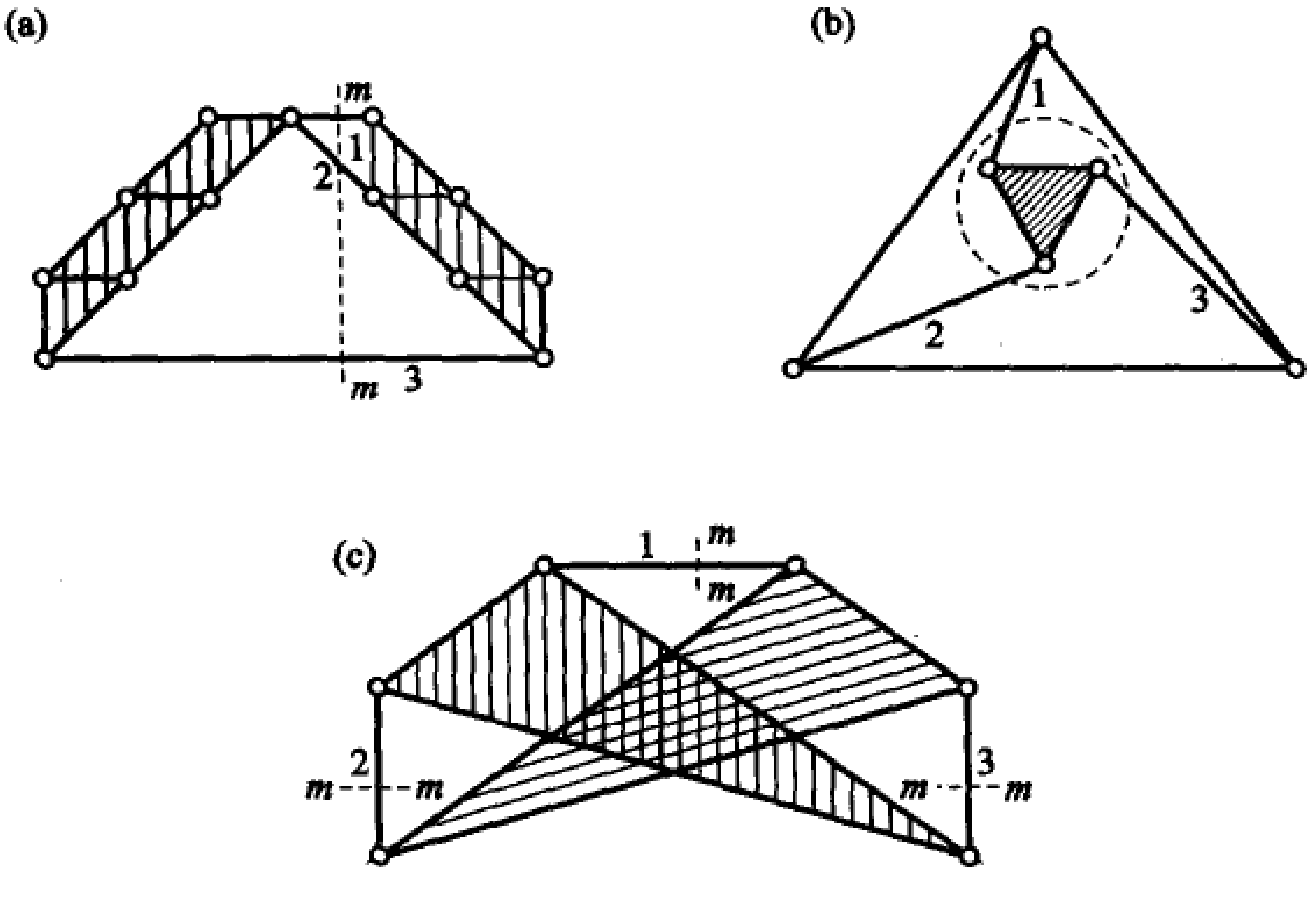


图 3-35

系。这样，F_{y1} 和 F_{y2} 就可以计算出来。

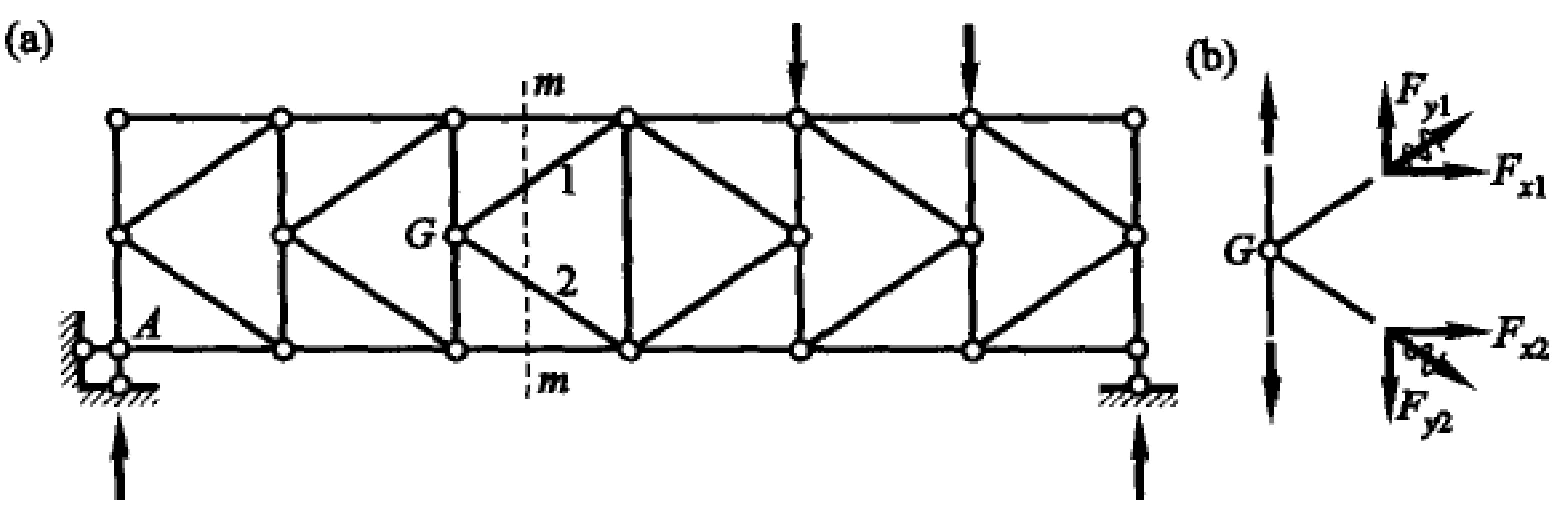


图 3-36

例 3-9 试求图 3-37a 所示桁架中 1、2、3 三杆的轴力。

解 先求出支座反力。

这是一个联合桁架，单用结点法很不方便。

先作截面 $m-m$，求 F_{N4}。取截面 $m-m$ 以右部分为隔离体（隔离体图省去），并以 G 为力矩中心，得

$$\sum M_G=0,\qquad F_{N4}\times 4\ \text{m}-6\ \text{kN}\times 8\ \text{m}=0$$

所以

$$F_{N4}=12\ \text{kN}\ （拉力）$$

再作截面 $n-n$，取截面左部为隔离体（图 3-37b）。以 D 点为力矩中心，并将 F_{N2} 在 G 点分解为 F_{x2} 和 F_{y2}。

$$\sum M_D=0,\quad 18\ \mathrm{kN}\times 4\ \mathrm{m}-3\ \mathrm{kN}\times 4\ \mathrm{m}-6\ \mathrm{kN}\times 2\ \mathrm{m}$$
$$-12\ \mathrm{kN}\times 4\ \mathrm{m}-F_{y2}\times 4\ \mathrm{m}=0$$

所以

$$F_{y2}=0$$

因此

$$F_{x2}=0,\qquad F_{N2}=0$$

再取结点 E 为隔离体(图 3-37c),用投影方程可求出 F_{N1} 和 F_{N3}。

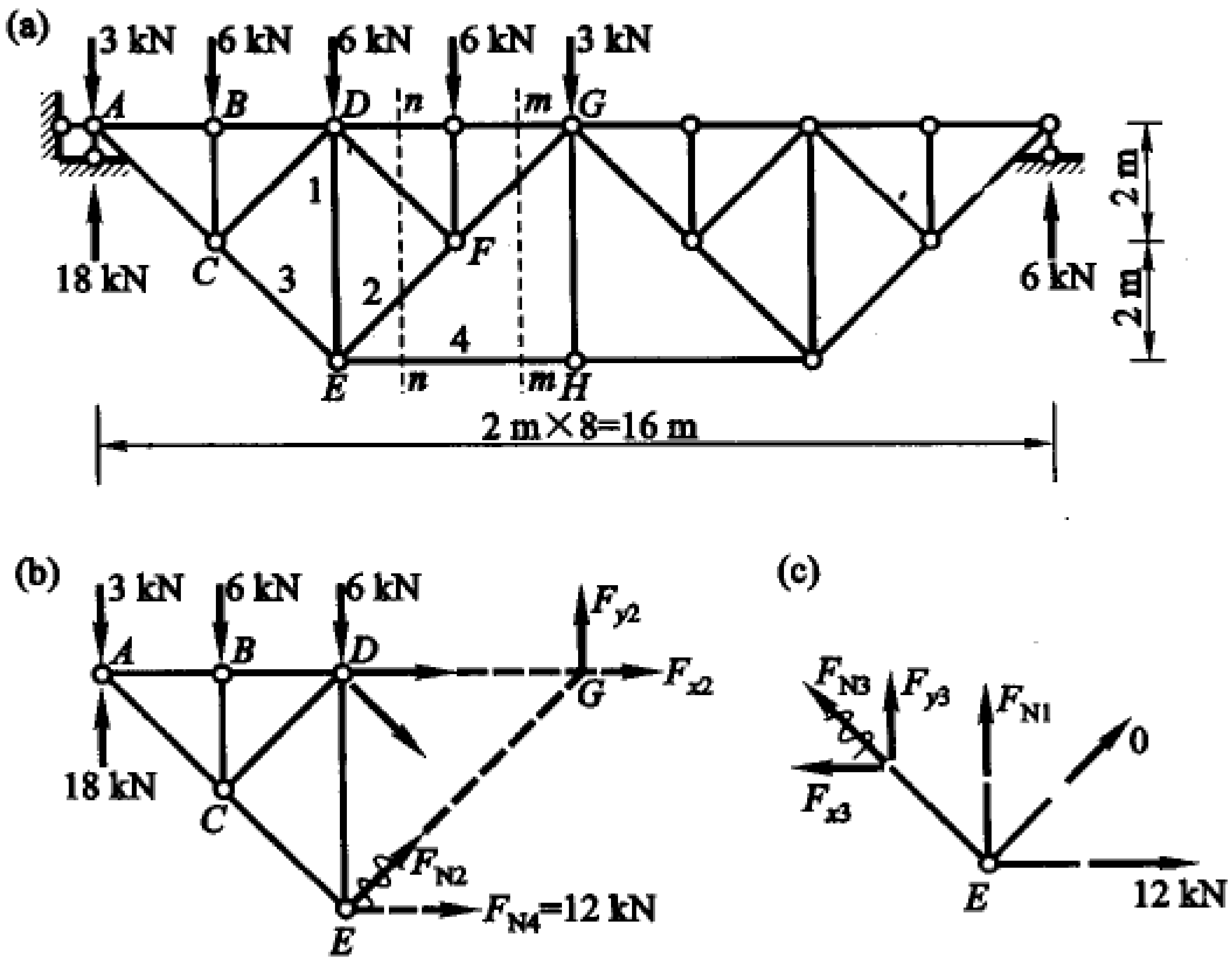


图 3-37

$$\sum F_x=0,\qquad 12\ \mathrm{kN}-F_{x3}=0$$

所以

$$F_{x3}=12\ \mathrm{kN}$$

因此

$$F_{y3}=12\ \mathrm{kN},\qquad F_{N3}=12\ \mathrm{kN}\times\sqrt{2}=16.97\ \mathrm{kN}\ \text{(拉力)}$$
$$\sum F_y=0,\qquad F_{N1}+F_{y3}=0$$

所以

$$F_{N1}=-F_{y3}=-12\ \mathrm{kN}\ \text{(压力)}$$

§3-5　组合结构

在有些由直杆组成的结构中，一部分杆件是链杆，只受轴力作用；另一部分杆件是梁式杆，除受轴力作用外，还受弯矩和剪力作用。这种由链杆和梁式杆组成的结构，称为组合结构。

图3-38、3-39所示为组合结构的一些例子。图3-38a为一下撑式五角形屋架，上弦由钢筋混凝土制成，下弦和腹杆为型钢。计算简图如图3-38b所示。

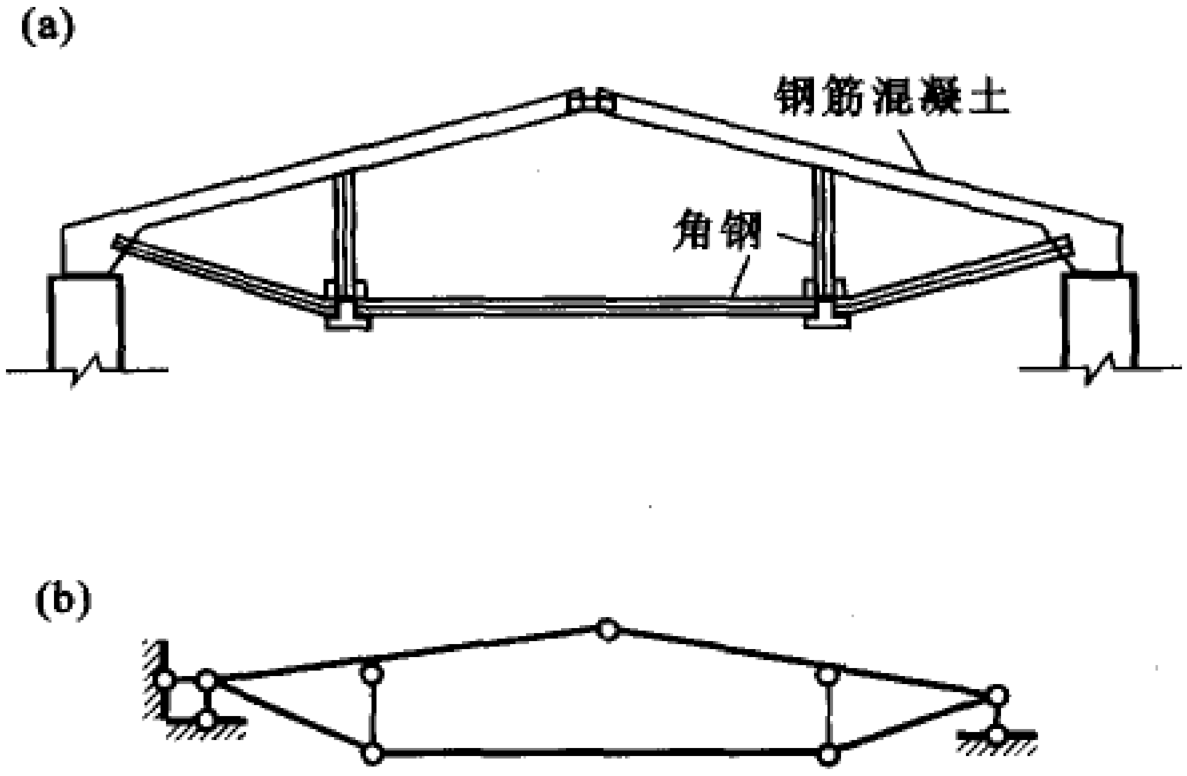


图　3-38

图3-39a为拱桥的计算简图，其中由多根链杆组成链杆拱，再与加劲梁用链杆连接，组成整个结构。当跨度较大时，加劲梁可换成加劲桁架，如图3-39b所示。

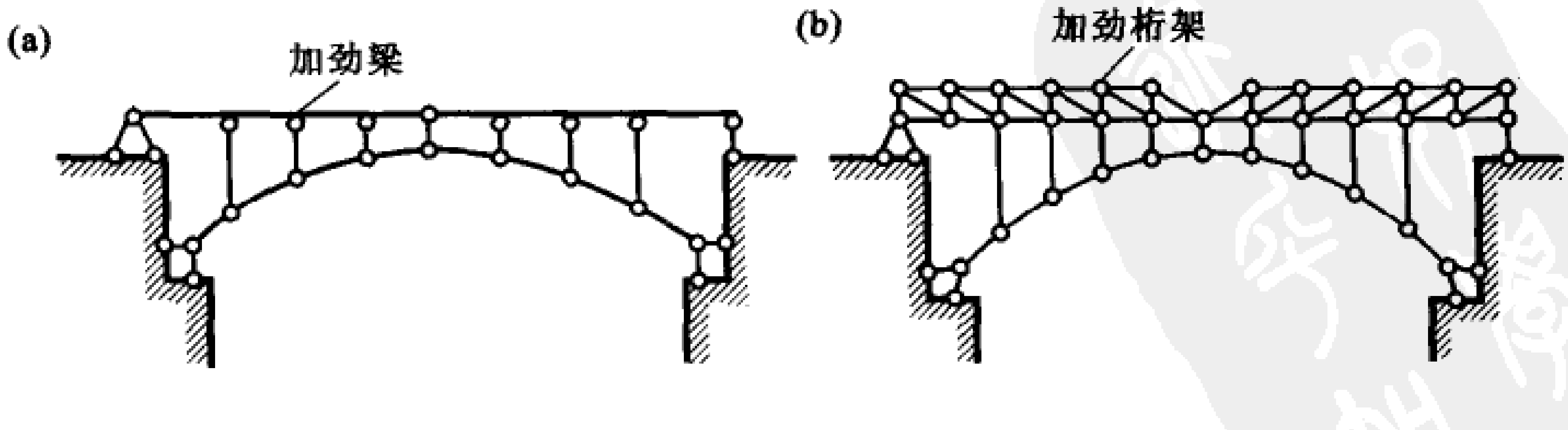


图　3-39

应用截面法计算组合结构时，应注意被截的杆件是链杆还是梁式杆。对于

链杆，截面上只作用有轴力；对于梁式杆，截面上一般作用有三个力，即弯矩、剪力和轴力。

假如所截断的杆全是链杆，则前面讨论桁架时的所有计算方法和结论全可应用。但如所截断的杆中有梁式杆时，则不能使用桁架计算的结论。如图3-40a中，当取结点F为隔离体时（图3-40b），由于杆FA和FC并非链杆，故FD并非零杆。

在截面I-I左部的隔离体上，除作用有两个未知轴力外，不应忘记在梁式杆截面上还作用有未知弯矩和剪力（图3-40c）。

由于梁式杆的截面一般有三个内力，为了不使隔离体上的未知力过多，应尽可能避免截断梁式杆。因此，计算组合结构的步骤一般是先求出各链杆的轴力，然后根据荷载和所求得的轴力作梁式杆的M、F_Q、F_N图。

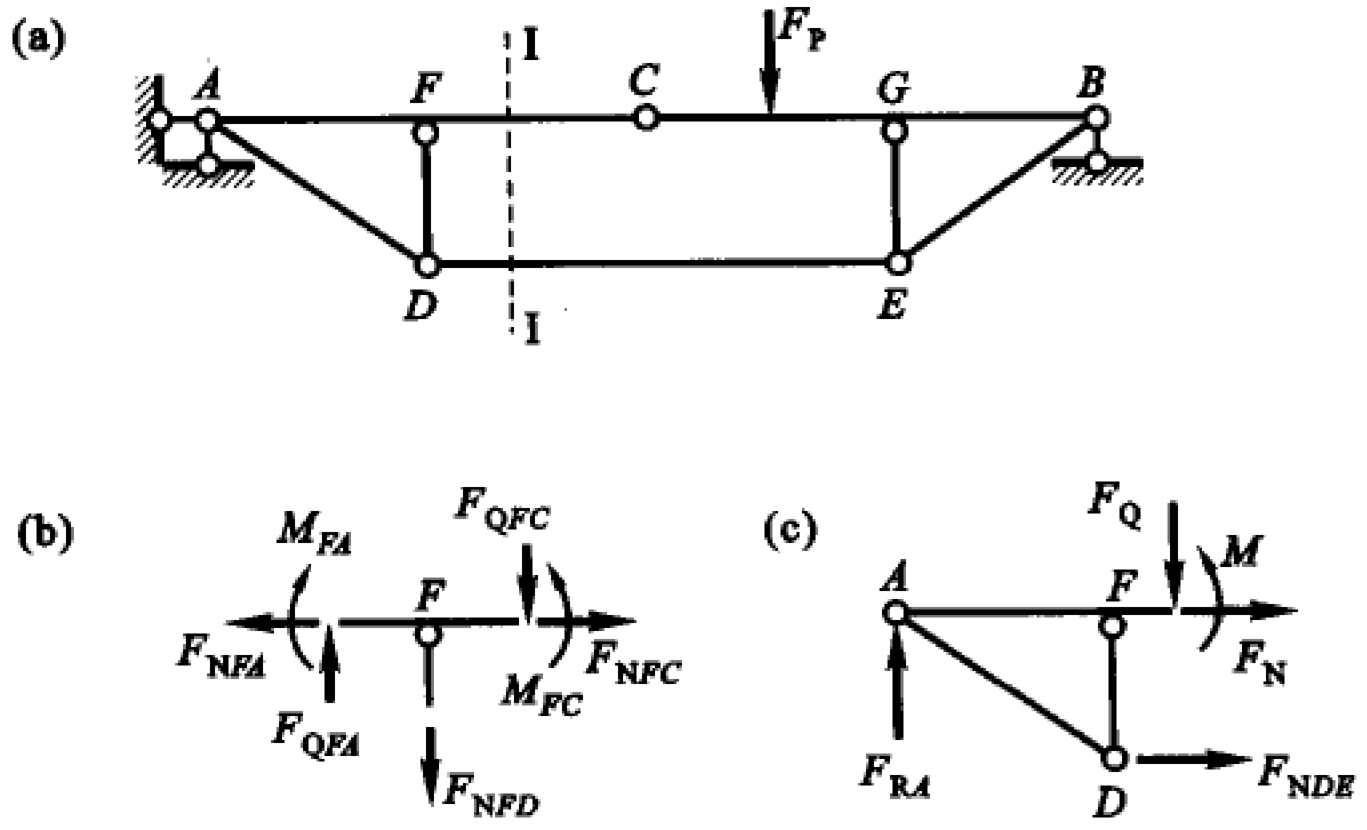


图　3-40

例3-10　试作图3-41a所示下撑式五角形组合屋架的内力图。

解　(1) 链杆的内力计算

此结构是由左右两个几何不变，且无多余约束的部分ACD、BCE用铰C和链杆DE连接而成。因此，此结构是静定的。计算内力时，可先作截面I-I，截断铰C和链杆DE（图3-41b）。由力矩方程$\sum M_C=0$，得

$$6\ \text{kN}\times 6\ \text{m}-1\ \text{kN/m}\times 6\ \text{m}\times 3\ \text{m}-1.2\ F_{NDE}=0$$

所以

$$F_{NDE}=15\ \text{kN}$$

再由结点D和E，可求得所有链杆的轴力。计算结果记在图3-41b中。

(2) 梁式杆的内力图

杆AFC的受力情况如图3-41c所示。将结点A处的竖向力合并后，受力

图如图 3-41d 所示。内力图求得如图 3-41e 所示。下面作些说明:

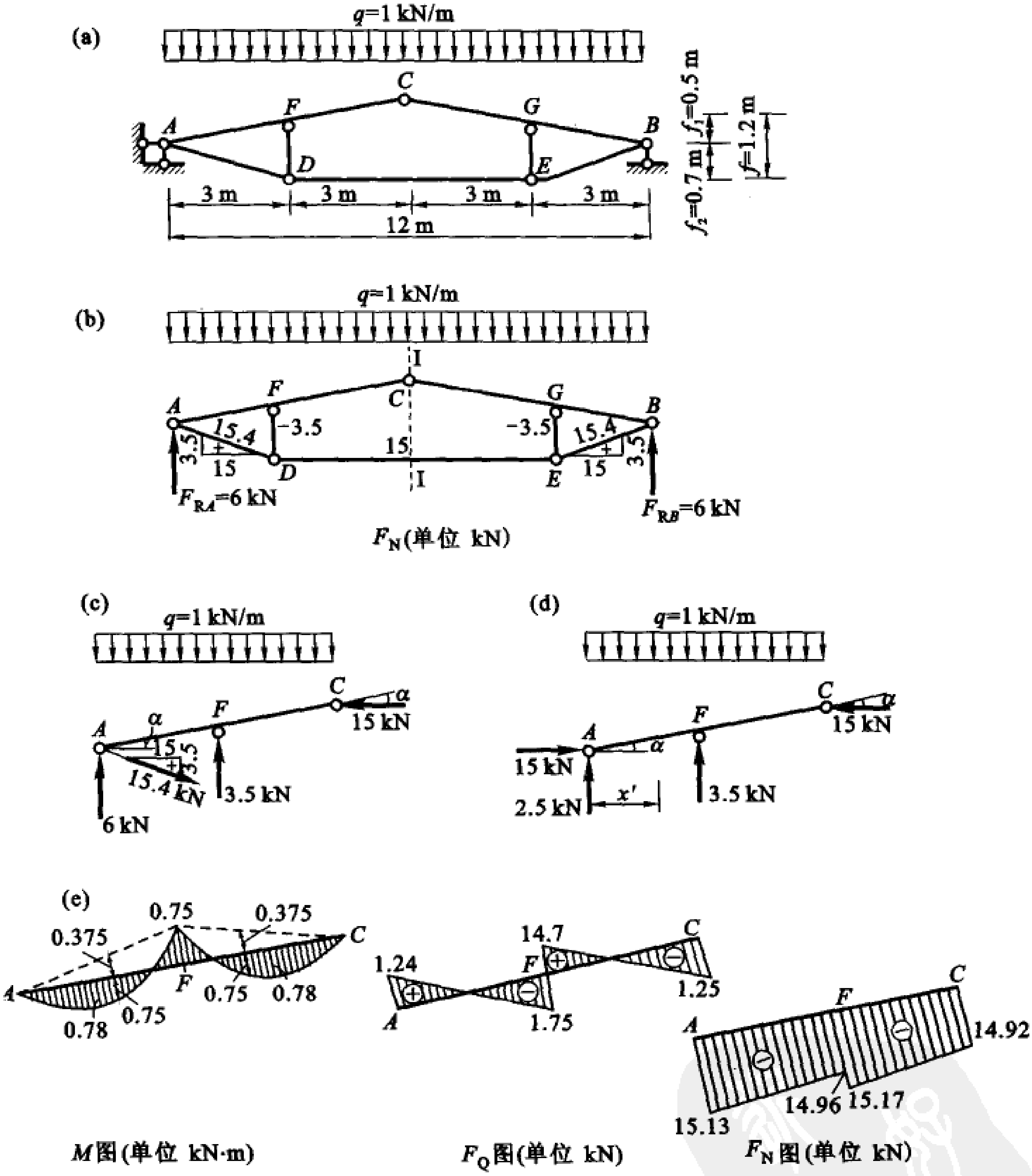


图 3-41

任一截面的剪力和轴力,可按下式计算:

$$F_Q = F_y \cos\alpha - 15\sin\alpha$$

$$F_N = -F_y \sin\alpha - 15\cos\alpha$$

式中 F_y 为该截面所受竖向力的合力。图中 $\sin\alpha = 0.083\,5$, $\cos\alpha = 0.996$。如杆 A 端的剪力和轴力为

$$\begin{aligned}F_{QAF} &= 2.5\ \text{kN}\cos\alpha - 15\ \text{kN}\sin\alpha \\ &= 2.5\ \text{kN}\times 0.996 - 15\ \text{kN}\times 0.083\ 5 \\ &= 1.24\ \text{kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{NAF} &= -2.5\ \text{kN}\sin\alpha - 15\ \text{kN}\cos\alpha \\ &= -2.5\ \text{kN}\times 0.083\ 5 - 15\ \text{kN}\times 0.996 \\ &= -15.13\ \text{kN}\end{aligned}$$

跨中最大弯矩发生在剪力为零处，以 x' 表示其横坐标(图 3-41d)。由

$$F_Q = F_y\cos\alpha - 15\ \text{kN}\sin\alpha = 0$$

得

$$F_y = 15\ \text{kN}\tan\alpha,\quad \text{在 } AF \text{ 段}, F_y = 2.5\ \text{kN} - qx'$$

即

$$2.5\ \text{kN} - qx' = 15\ \text{kN}\tan\alpha$$

所以

$$x' = \frac{2.5\ \text{kN}}{1\ \text{kN/m}} - \frac{15\ \text{kN}}{1\ \text{kN/m}}\times\frac{0.5\ \text{m}}{6\ \text{m}} = 1.25\ \text{m}$$

因此，最大弯矩为

$$M_{x'} = 2.5\ \text{kN}\times 1.25\ \text{m} - 15\ \text{kN}\times\left(\frac{0.5\ \text{m}}{6\ \text{m}}\times 1.25\ \text{m}\right) - \left(1\ \text{kN/m}\times 1.25\ \text{m}\times 1.25\ \text{m}\times\frac{1}{2}\right) = 0.78\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

现就上述例题讨论如下：

影响下撑式五角形组合屋架的内力状态的主要因素有两个：

(1) 高跨比 $\frac{f}{l}$

轴力 F_{NDE} 可用三铰拱的推力公式(见下节)计算：

$$F_{NDE} = \frac{M_C^0}{f}$$

高跨比愈小，轴力 F_{NDE} 愈大，屋架轴力愈大，这种情况与三铰拱有类似处。

(2) f_1 与 f_2 的关系

当高度 f 确定后，内力状态随 f_1 与 f_2 的比例不同而改变。图 3-42 中给出了三种结果，从中可以看出：

弦杆轴力的变化幅度不大，但上弦杆弯矩的变化幅度很大。

当坡度(即 f_1)减小时，上弦负弯矩增大。当 $f_1=0$ 时，上弦坡度为零，即为下撑式平行弦组合结构(图 3-42a)。此时上弦全部为负弯矩，上弦弯矩有如支在 A 和 F 两点的伸臂梁。

当坡度(即 f_1)加大时,上弦正弯矩增大。当 $f_2=0$ 时,即为一个带拉杆的三铰拱式屋架(图 3-42c)。此时上弦全部为正弯矩,上弦弯矩有如支在 A、C 两点的简支梁。

当 $f_1=(0.45\sim0.5)f$ 时,上弦结点 F 处的负弯矩与两个节间的最大正弯矩,在数值上将大致相等(图 3-42b),且数值比图 3-42a、c 两种极限情形小得多。

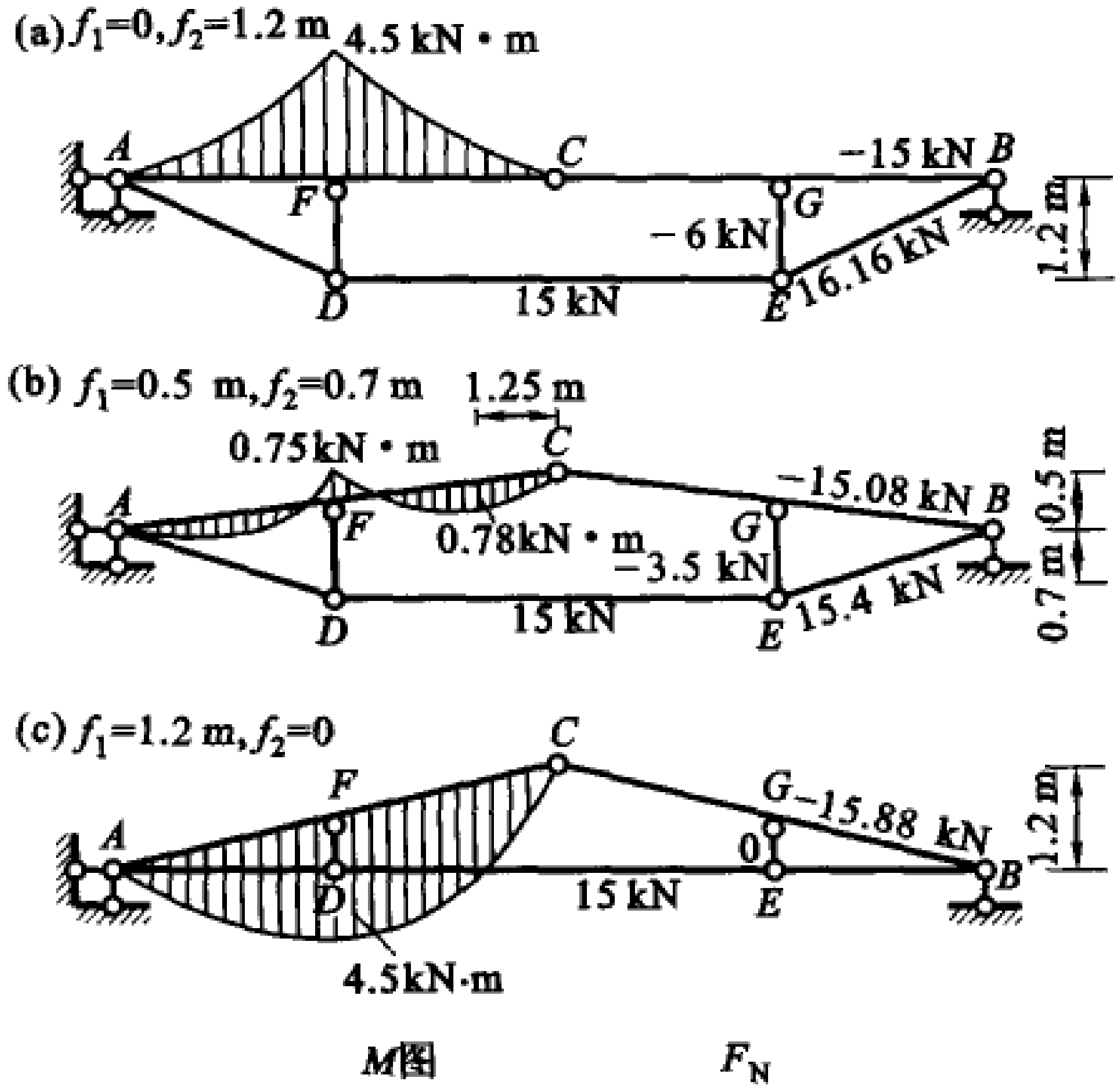


图 3-42

§3-6 三 铰 拱

1. 三铰拱的支座反力和内力

三铰拱是一种静定的拱式结构,在桥梁和屋盖中都得到应用。图 3-43 所示为三铰拱的两种形式。

图 3-43a 为无拉杆的三铰拱,AC 和 BC 是两根曲杆,在 C 点用铰连接,A、B 两点是铰支座。图 3-43b 为有拉杆的三铰拱,B 点改为滚轴支座,同时加上拉杆 AB。拱的基本特点是在竖向荷载作用下有水平反力(图 3-43a)或称推力。对于有拉杆的三铰拱,推力就是拉杆内的拉力。推力对拱的内力有重要影响。曲杆的轴线常用抛物线和圆弧,有时采用悬链线。拱高 f 与跨长 l 的比值是拱的基本参数。工程实际中,高跨比由 1 至 1/10,变化的范围很大。

图 3－44 为北京玻璃厂使用的装配式钢筋混凝土三铰拱。图 3－44a 所示为拱的尺寸，图 3－44b 所示为其计算简图。

下面讨论在竖向荷载作用下三铰拱的支座反力和内力的计算方法，并将拱与梁加以比较，用以说明拱的受力特性。

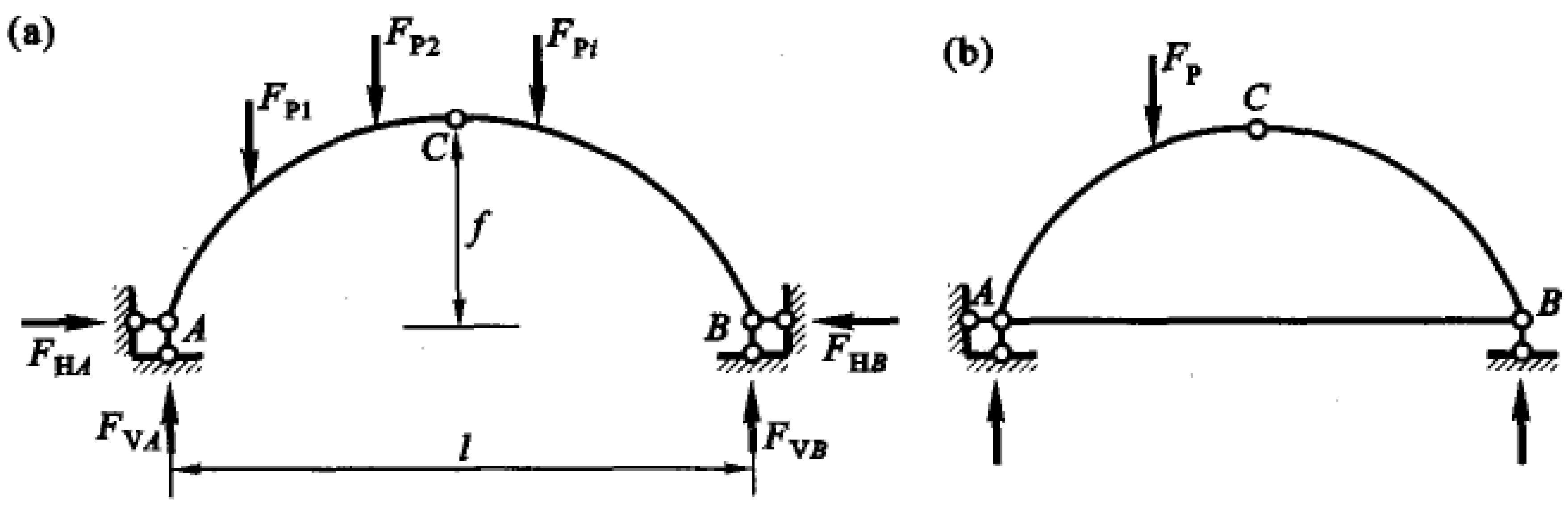


图　3－43

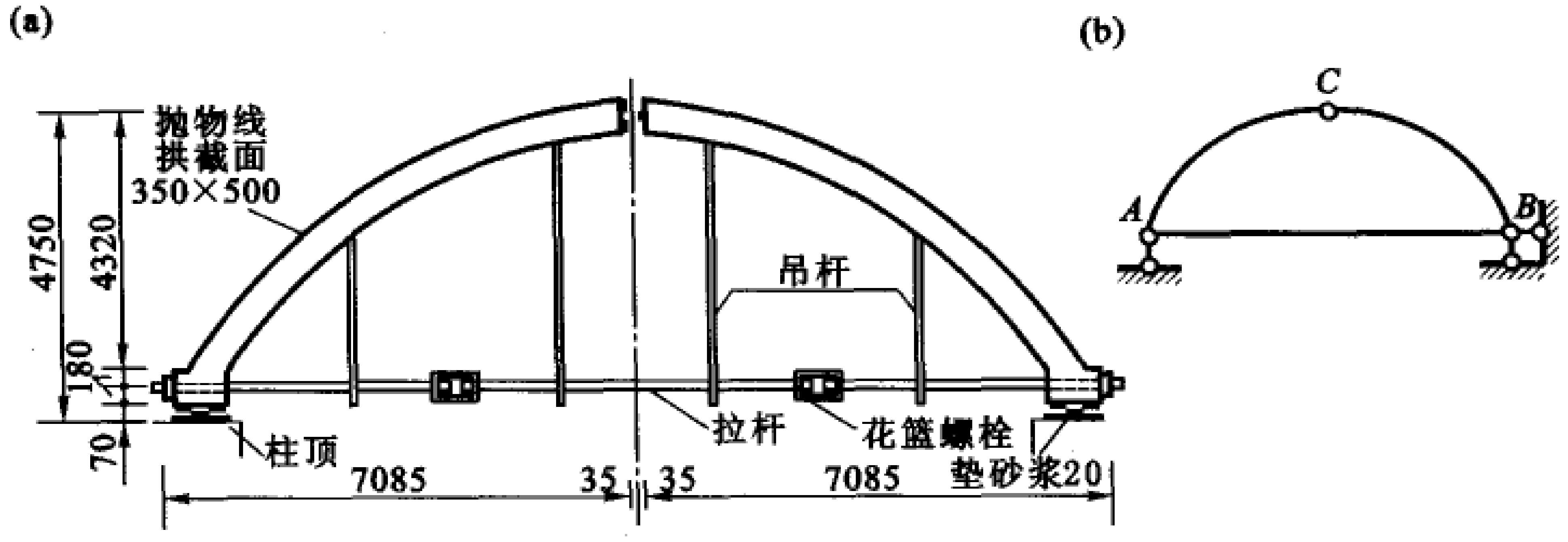


图　3－44

(1) 支座反力计算

图 3－45a 所示三铰拱，有四个支座反力 F_{VA}、F_{HA}、F_{VB}、F_{HB}，求解时需要四个方程。拱的整体有三个平衡方程，此外铰 C 又增加一个静力平衡方程，即 C 点的弯矩应为零。所以，三铰拱是静定结构。

为了便于比较，在图 3－45b 中画出一个简支梁，跨度和荷载都与三铰拱相同。因为荷载是竖向的，梁没有水平反力，只有竖向反力 F_{VA}^0 和 F_{VB}^0。简支梁的竖向反力 F_{VA}^0 和 F_{VB}^0 可分别由平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum M_A=0$ 求出。

考虑拱的整体平衡，由 $\sum M_B=0$ 和 $\sum M_A=0$，可求出拱的竖向反力：

$$F_{VA}=\frac{1}{l}(F_{P1}b_1+F_{P2}b_2) \tag{3-5}$$

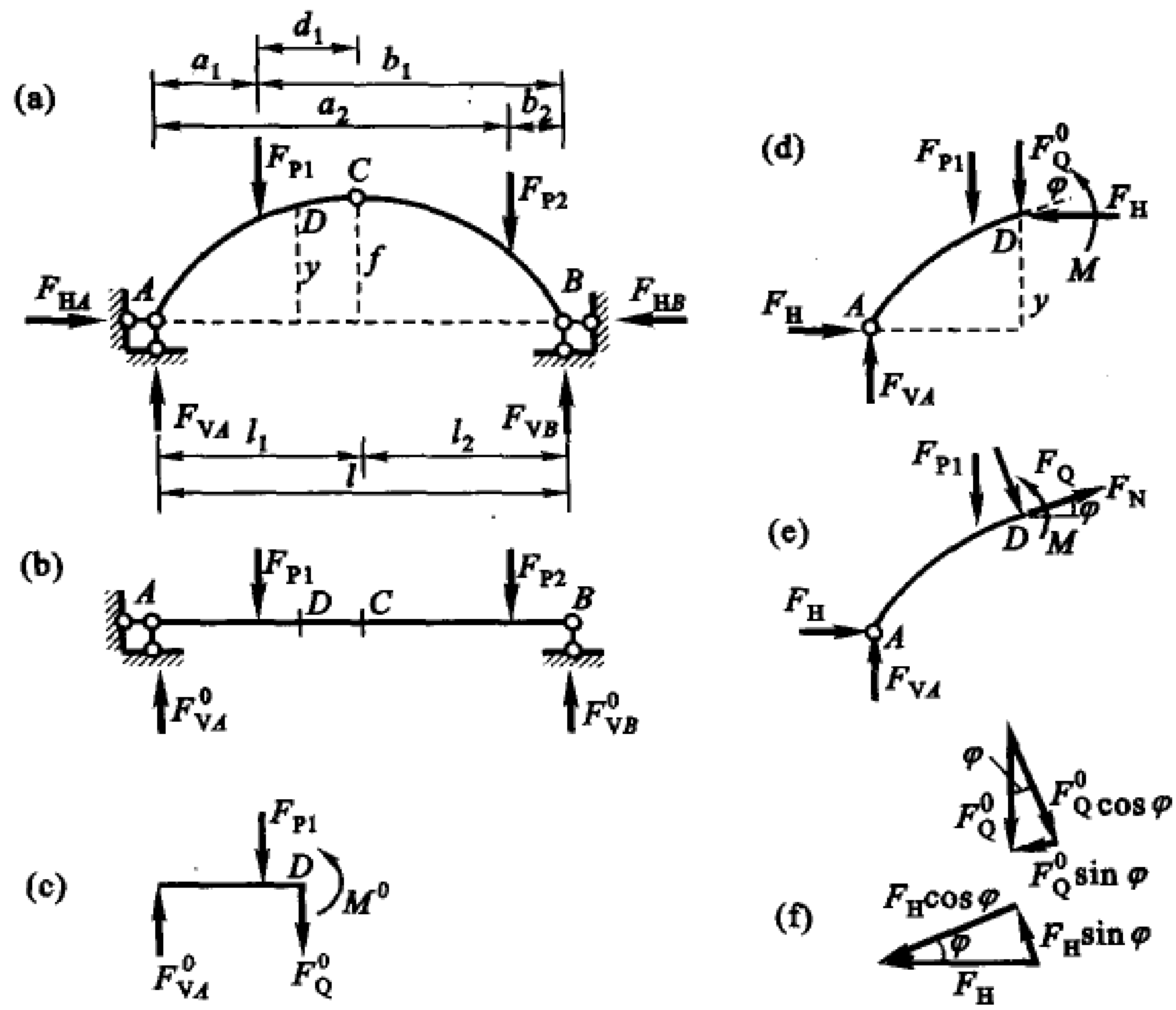


图 3-45

$$F_{VB}=\frac{1}{l}(F_{P1}a_1+F_{P2}a_2) \tag{3-6}$$

与图 3-45b 中的梁相比较,可知:

$$F_{VA}=F_{VA}^0$$

$$F_{VB}=F_{VB}^0 \tag{3-7}$$

这就是说,拱的竖向反力与简支梁的竖向反力相同。

由 $\sum F_x=0$,得

$$F_{HA}=F_{HB}=F_H$$

A、B 两点的水平反力方向相反,数量相等,以 F_H表示推力的数量。

为了求出推力 F_H,应用铰 C 提供的条件:

$$M_C=0$$

考虑铰 C 左边所有的外力,上式可写为

$$F_{VA}l_1-F_{P1}d_1-F_Hf=0$$

前两项是 C 点左边所有竖向力对 C 点的力矩代数和,等于简支梁相应截面 C 的弯矩。以 M_C^0 表示简支梁截面C 的弯矩,则上式可写成:

$$M_C^0-F_Hf=0$$

所以

$$F_{\mathrm{H}}=\frac{M_{C}^{0}}{f} \tag{3-8}$$

由此可知，推力与拱轴的曲线形式无关，而与拱高 f 成反比，拱愈低推力愈大。荷载向下时，F_{H}得正值，方向如图 3-45a 所示，推力是向内的。如果 $f\to 0$，推力趋于无限大，这时 A、B、C 三个铰在一条直线上，成为几何可变体系。

(2) 内力计算

试求指定截面 D 的内力。

在计算中，借用简支梁相应截面 D 的弯矩 M^{0} 和剪力 F_{Q}^{0}(图 3-45c)。图 3-45d 所示为三铰拱截面 D 左边的隔离体，在截面 D 作用的内力不但有弯矩 M，而且有水平力(等于拱的推力 F_{H})和竖向力(等于简支梁截面 D 的剪力 F_{Q}^{0})。后两个力可由投影方程$\sum F_{x}=0$ 和$\sum F_{y}=0$ 证实。而 M 要对D 点(截面 D 的形心)列力矩方程才能得到，即

$$M=M^{0}-F_{\mathrm{H}}y \tag{3-9}$$

这里，y 是D 点到AB 直线的垂直距离。弯矩 M 以使拱的内面产生拉应力为正。

图 3-45e 所示为设计中使用的内力分量，剪力 F_{Q}与截面 D 处轴线的切线垂直，轴力 F_{N}与轴线的切线平行。把图 3-45d 中的竖向力 F_{Q}^{0}和水平力 F_{H}加以分解(图 3-45f)，就得到剪力 F_{Q}和轴力 F_{N}。以 φ 表示截面D 处轴线的切线与水平线所成的锐角，得

$$F_{\mathrm{Q}}=F_{\mathrm{Q}}^{0}\cos\varphi-F_{\mathrm{H}}\sin\varphi \tag{3-10}$$

$$F_{\mathrm{N}}=-F_{\mathrm{Q}}^{0}\sin\varphi-F_{\mathrm{H}}\cos\varphi \tag{3-11}$$

这里，截面的剪力以使拱的小段顺时针方向转动为正，轴力以拉力为正。应用式(3-10)和(3-11)时，在拱的左半，φ 取正号；在拱的右半，φ 取负号。

(3) 受力特点

由上述分析可知：

1) 在竖向荷载作用下，梁没有水平反力，而拱则有推力。

2) 由式(3-9)可知，由于推力的存在，三铰拱截面上的弯矩比简支梁的弯矩小。弯矩的降低，使拱能更充分地发挥材料的作用。

3) 在竖向荷载作用下，梁的截面内没有轴力，而拱的截面内轴力较大，且一般为压力(参见例 3-11)。

总起来看，拱比梁能更有效地发挥材料作用，因此适用于较大的跨度和较重的荷载。由于拱主要是受压，便于利用抗压性能好而抗拉性能差的材料，如砖、石、

混凝土等。但是，事物都是一分为二的。三铰拱既然受到向内的推力作用，也就给基础施加向外的推力，所以三铰拱的基础比梁的基础要大。因此，用拱作屋顶时，都使用有拉杆的三铰拱，以减少对墙(或柱)的推力。

例 3-11　三铰拱及其所受荷载如图 3-46 所示，拱的轴线为抛物线：$y=\frac{4f}{l^2}\cdot x(l-x)$。试求支座反力，并绘制内力图。

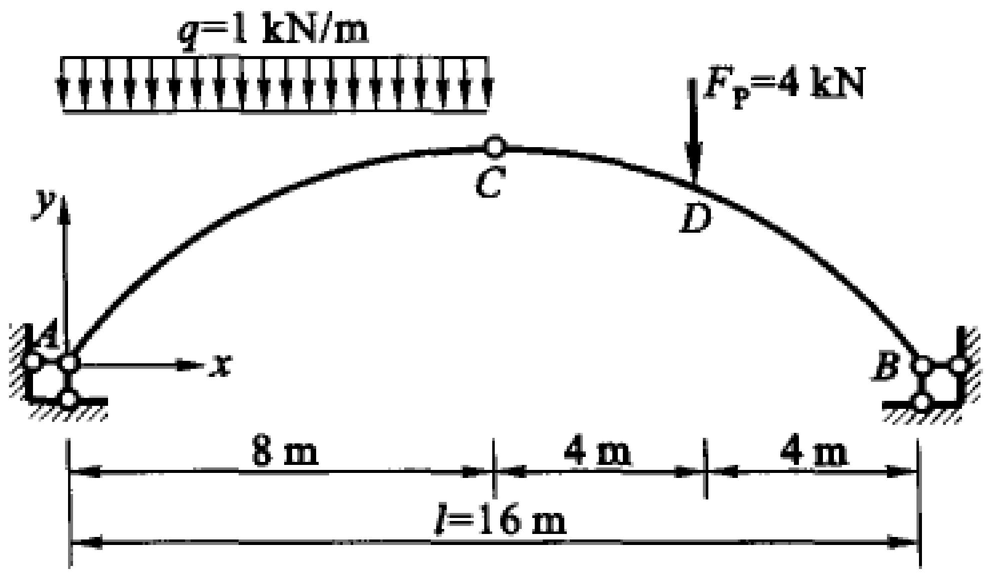


图　3-46

解　(1) 反力计算

由式(3-7)

$$F_{VA}=F_{VA}^0=\frac{4\ \text{kN}\times 4\ \text{m}+8\ \text{kN}\times 12\ \text{m}}{16\ \text{m}}=7\ \text{kN}\quad(\uparrow)$$

$$F_{VB}=F_{VB}^0=\frac{8\ \text{kN}\times 4\ \text{m}+4\ \text{kN}\times 12\ \text{m}}{16\ \text{m}}=5\ \text{kN}\quad(\uparrow)$$

由式(3-8)

$$F_H=\frac{M_C^0}{f}=\frac{5\ \text{kN}\times 8\ \text{m}-4\ \text{kN}\times 4\ \text{m}}{4\ \text{m}}=6\ \text{kN}$$

(2) 内力计算

为了绘制内力图，将拱沿跨度方向分成八等份，算出每个截面的弯矩、剪力和轴力的数值。现以 $x=12$ m 的截面 D 为例来说明计算步骤。

1) 截面 D 的几何参数

根据拱轴线的方程：

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)=\frac{4\times 4\ \text{m}}{(16\ \text{m})^2}\times 12\ \text{m}\times(16\ \text{m}-12\ \text{m})=3\ \text{m}$$

$$\tan\varphi=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4f}{l^2}(l-2x)=\frac{4\times 4\ \text{m}}{(16\ \text{m})^2}\times(16\ \text{m}-2\times 12\ \text{m})=-0.5\ \text{m}$$

因而得出：

$$\varphi=-26°34',\qquad \sin\varphi=-0.447,\qquad \cos\varphi=0.894$$

2) 截面 D 的内力

由式(3－9)得

$$M=M^{0}-F_{H}y=5\ \text{kN}\times4\ \text{m}-6\ \text{kN}\times3\ \text{m}=2\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

根据式(3－10)、(3－11)，因为在集中荷载处，F_{Q}^{0}有突变，所以 F_{Q} 和 F_{N} 都有突变，要算出左、右两边的剪力 F_{QL}、F_{QR}和轴力 F_{NL}、F_{NR}。

$$\begin{cases}F_{QL}=F_{QL}^{0}\cos\varphi-F_{H}\sin\varphi\\ \quad=-1\ \text{kN}\times0.894-6\ \text{kN}\times(-0.447)=1.79\ \text{kN}\\ F_{NL}=-F_{QL}^{0}\sin\varphi-F_{H}\cos\varphi\\ \quad=-(-1\ \text{kN})\times(-0.447)-6\ \text{kN}\times0.894=-5.81\ \text{kN}\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{QR}=F_{QR}^{0}\cos\varphi-F_{H}\sin\varphi\\ \quad=-5\ \text{kN}\times0.894-6\ \text{kN}\times(-0.447)=-1.79\ \text{kN}\\ F_{NR}=-F_{QR}^{0}\sin\varphi-F_{H}\cos\varphi\\ \quad=-(-5)\ \text{kN}\times(-0.447)-6\ \text{kN}\times0.894=-7.6\ \text{kN}\end{cases}$$

具体计算时，可列表进行(表 3－1)。根据表(3－1)中的数值，绘出内力图，如图 3－47a、b、c 所示。

表 3－1 三铰拱内力计算

截面几何参数						F_{Q}^{0}	弯矩计算			剪力计算			轴力计算		
x	y	$\tan\varphi$	φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$		M^{0}	$-F_{H}y$	M	$F_{Q}^{0}\cos\varphi$	$-F_{H}\sin\varphi$	F_{Q}	$-F_{Q}^{0}\sin\varphi$	$-F_{H}\cos\varphi$	F_{N}
0	0	1	45°	0.707	0.707	7	0	0	0	4.95	−4.24	0.71	−4.95	−4.24	−9.19
2	1.75	0.75	36°52′	0.600	0.800	5	12	−10.5	1.5	4.00	−3.60	0.40	−3.00	−4.80	−7.80
4	3.00	0.50	26°34′	0.447	0.894	3	20	−18.0	2	2.68	−2.68	0	−1.34	−5.36	−6.70
6	3.75	0.25	14°2′	0.243	0.970	1	24	−22.5	1.5	0.97	−1.46	−0.49	−0.24	−5.82	−6.06
8	4.00	0	0	0	1	−1	24	−24.0	0	−1.00	0	−1.00	0	−6.00	−6.00
10	3.75	−0.25	−14°2′	−0.243	0.970	−1	22	−22.5	−0.5	−0.97	1.46	0.49	−0.24	−5.82	−6.06
						−1				−0.89		1.79	−0.45		−5.81
12	3.00	−0.50	−26°34′	−0.447	0.894	−5	20	−18.0	2	−4.47	2.68	−1.79	−2.24	−5.36	−7.60
14	1.75	−0.75	−36°52′	−0.600	0.800	−5	10	−10.5	−0.5	−4.00	3.60	−0.40	−3.00	−4.80	−7.80
16	0	−1	−45°	−0.707	0.707	−5	0	0	0	−3.54	4.24	0.70	−3.54	−4.24	−7.78

注：表中尺寸单位为 m，弯矩单位为 kN·m，剪力、轴力单位为 kN。

为了将拱与梁进行比较，在图 3－47d 中用实线画出了同跨度、同荷载的简支梁的弯矩图(M^{0} 图)，图中还用虚线画出了三铰拱的 $F_{H}y$ 曲线。虚实两条曲线的纵坐标差值($M^{0}-F_{H}y$)即为三铰拱的弯矩值，因此两条曲线之间所围的狭窄图形即代表三铰拱的弯矩图。由此看出，三铰拱与对应的简支梁相比，弯矩要小得很多(简支梁的最大弯矩为 24.5 kN·m，而三铰拱的最大弯矩则下降为

2 kN·m)。还可看出,三铰拱弯矩的下降完全是由于推力造成的。因此,在竖向荷载作用下存在推力,是拱式结构的基本特点。由于这个缘故,拱式结构也称为推力结构。

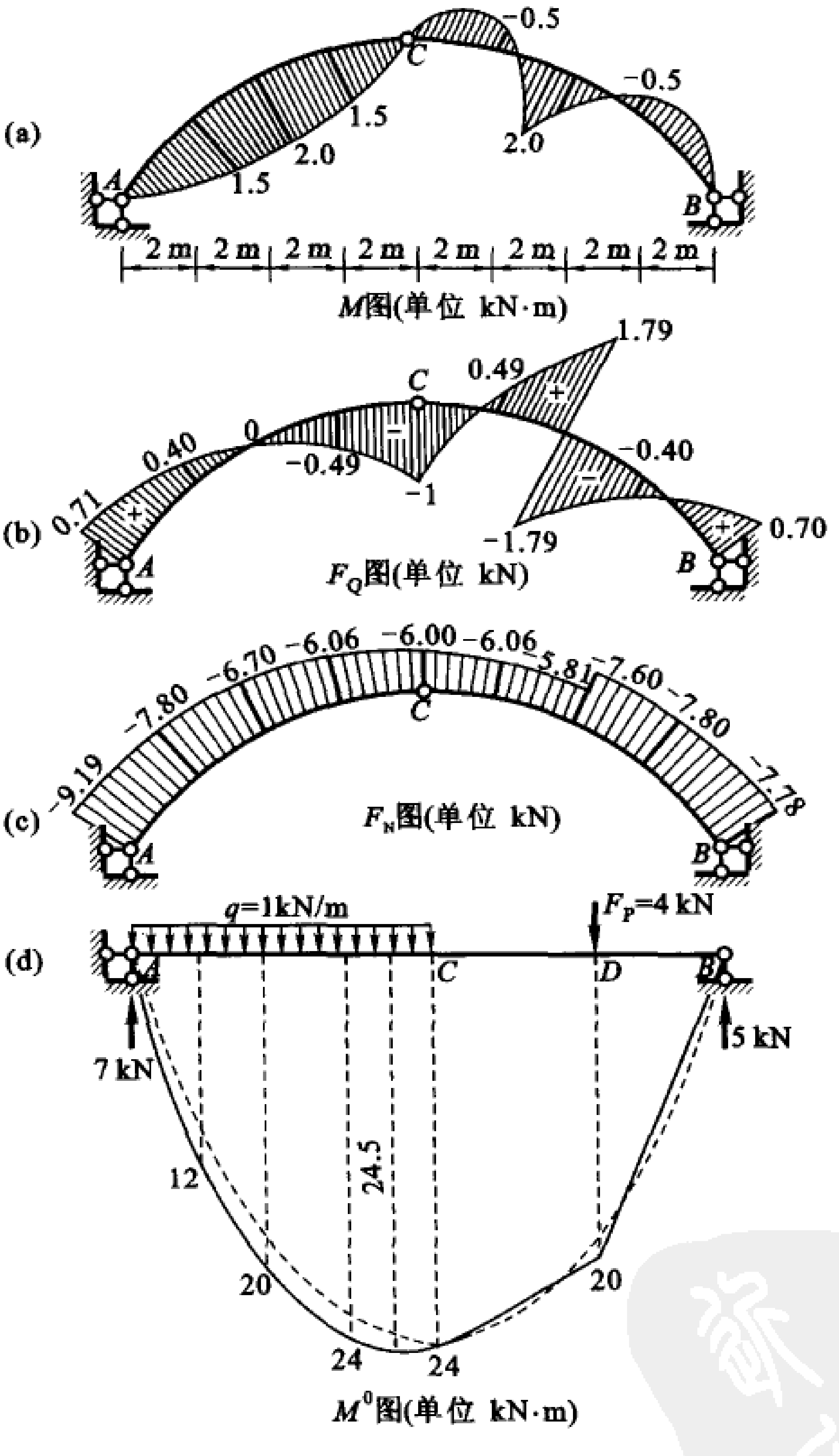


图　3-47

2. 三铰拱的压力线

如果三铰拱中某截面 D 左边(或右边)所有外力的合力 F_{RD} 已经确定(图 3-48a),则由此合力便可确定该截面的弯矩、剪力、轴力(图 3-48b)如下:

$$M_D = F_{RD} r_D$$

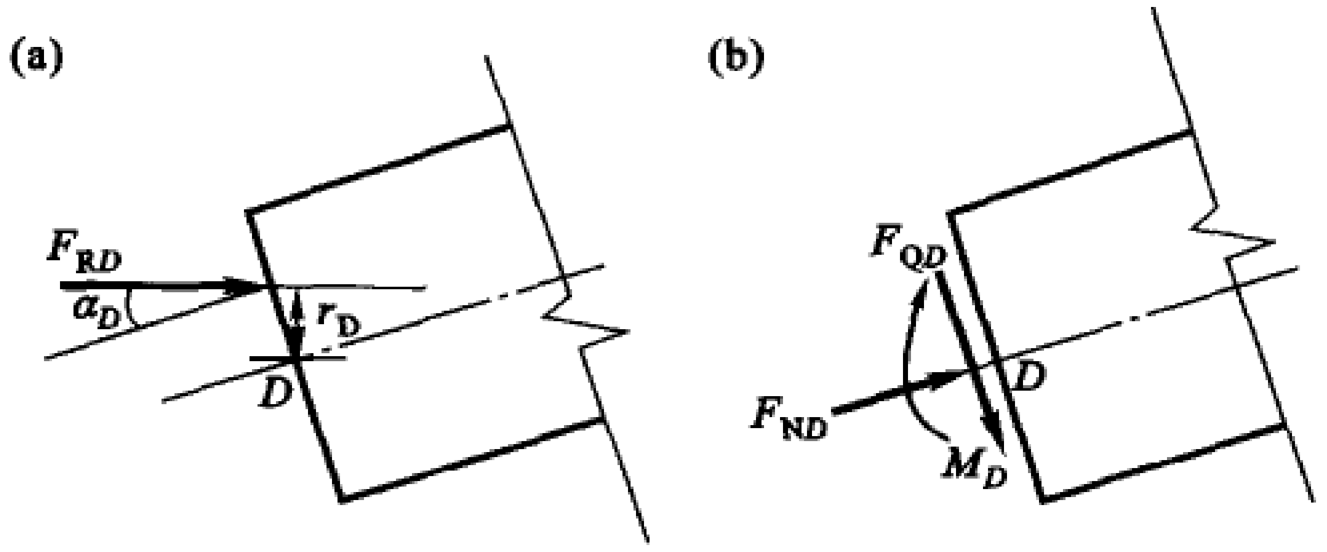


图　3－48

$$F_{QD}=F_{RD}\sin\alpha_D$$

$$F_{ND}=F_{RD}\cos\alpha_D$$

这里，r_D 是由截面形心到合力 F_{RD} 的垂直距离，α_D 是合力 F_{RD} 与 D 点拱轴切线间的夹角。由此看出，确定截面内力的问题可归结为确定截面一边所有外力的合力的问题，包括确定合力的大小、方向和作用线。

现以图 3－49a 所示三铰拱为例，说明求截面合力的图解作法。

第一步，确定各截面合力的大小和方向。

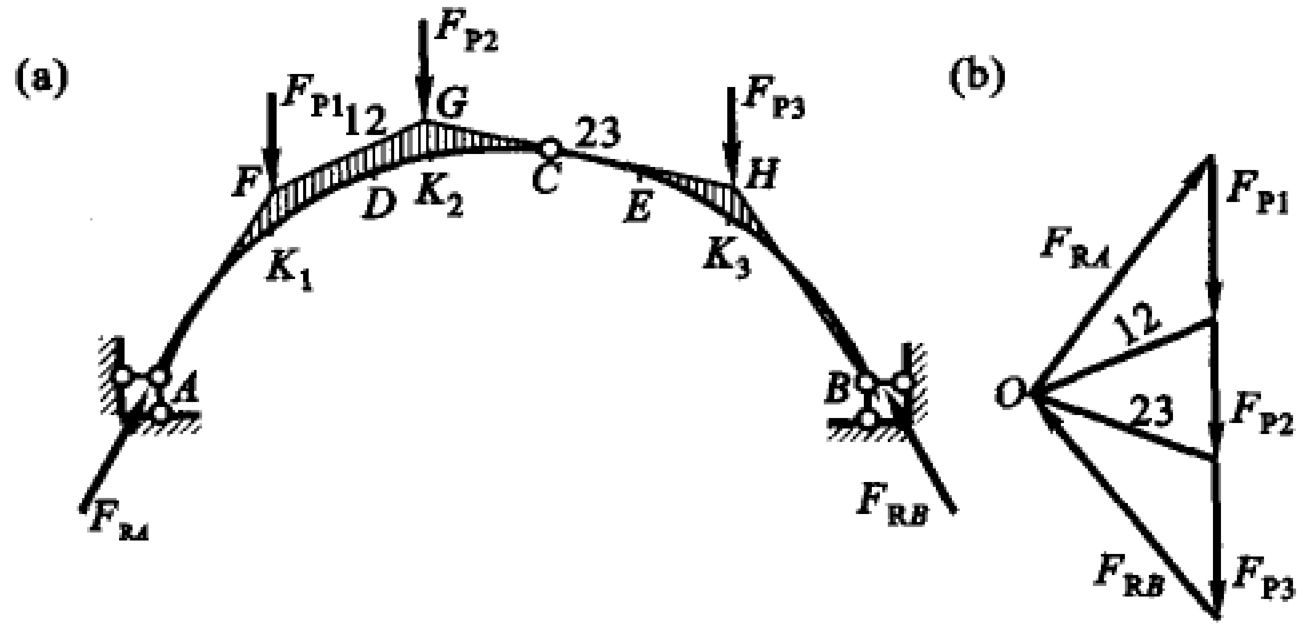


图　3－49

首先，用数解法求支座 A、B 的竖向和水平反力及其合力 F_{RA} 和 F_{RB}。然后，按 F_{RA}、F_{P1}、F_{P2}、F_{P3}、F_{RB} 的顺序画出闭合力多边形。最后，以 F_{RA} 和 F_{RB} 的交点 O 为极点，画出射线 12 和 23（由极点到力多边形顶点的连线称为射线），如图 3－49b 所示。现说明各条射线的意义。例如，在拱的 AK_1 段中，任一截面左边只有一个外力 F_{RA}，因此射线 F_{RA} 表示 AK_1 段中任一截面左边外力的合力。又如，射线 12 表示 K_1K_2 段中任一截面左边所有外力 F_{RA} 与 F_{P1} 的合力，同时也代表该截面右边所有外力 F_{P2}、F_{P3}、F_{RB} 的合力。总之，四个射线 F_{RA}、12、23、F_{RB} 分别表示 AK_1、K_1K_2、K_2K_3、K_3B 四段中任一截面所受的合力，即截面左

边(或右边)所有外力的合力。显然,射线只表示合力的大小和方向,并不表示合力的作用线。

第二步,确定各截面合力的作用线。

由图3-49b已经知道四个合力 F_{RA}、12、23、F_{RB} 的方向,如果再在拱图中分别确定一个作用点,则每个合力的作用线就确定了。现参照图3-49a说明作法如下:

首先,F_{RA} 应通过支点 A,故由 A 点作射线 F_{RA} 的平行线,即为合力 F_{RA} 的作用线。

其次,F_{RA} 与 F_{P1} 的作用线相交于 F 点,它们的合力12也应通过 F 点。因此,由 F 点作射线12的平行线 FG,即为合力12的作用线。

再次,12与 F_{P2} 的作用线交于 G 点,因此由 G 点作射线23的平行线 GH,即为合力23的作用线。

最后,由23与 F_{P3} 作用线的交点 H 作射线 F_{RB} 的平行线,即为合力 F_{RB} 的作用线。显然,此线应当通过支座 B 点。这个性质可作为校核条件,用以检验作图的精确程度。

以上依次得出了四个合力的作用线,它们组成一个多边形 $AFGHB$,称作索多边形,其中每个边称为索线。四个索线 F_{RA}、12、23、F_{RB} 分别表示 AK_1、K_1K_2、K_2K_3、K_3B 各段中任一截面左边(或右边)所有外力的合力作用线。因此,这个索多边形又称为合力多边形。对拱来说,由于截面轴力一般都是压力,故称为压力多边形或三铰拱的压力线。

总结起来,利用压力线和力多边形这两个图形,即可确定拱中任一截面一边外力的合力:合力的大小和方向可由力多边形中的射线确定,合力的作用线则由压力线中的索线确定。合力确定之后,再参照图3-48,即可求出截面的弯矩、剪力和轴力。以图3-49a中的截面 D 为例,它的合力 F_{RD} 由索线12和射线12共同表示。求弯矩 M_D 时,可先在图3-49b中量出射线12的长度,从而得出合力 F_{RD} 的数值;然后在图3-49a中量出截面形心 D 到索线12的垂直距离 r_D;最后根据二者的乘积 $F_{RD} \cdot r_D$ 便得出弯矩 M_D。求剪力 F_{QD} 和轴力 F_{ND} 时,可在图3-49b中将射线12沿平行和垂直于截面 D 的方向投影,即得出 F_{QD} 和 F_{ND}。在铰 A、B、C 处,弯矩为零,因而相应的距离 r 应为零。可见,压力线应当与杆轴在铰 A、B、C 处相交。这一性质也可用于压力线图的校核。

压力线在砖石和混凝土拱的设计中是很重要的概念。由于这些材料的抗拉强度低,通常要求各个截面不出现拉应力。因此,压力线不应超出截面的核心。如拱的截面为矩形,因矩形截面的截面核心高度为截面高度的三分之一,故压力线不应超出截面对称轴上三等分的中段范围。

3. 三铰拱的合理轴线

当拱的压力线与拱的轴线重合时，各截面形心到合力作用线的距离为零，则各截面弯矩为零，从而各截面的剪力也为零，只受轴力作用，正应力沿截面均匀分布，拱处于无弯矩状态。这时，材料的使用最经济。在固定荷载作用下使拱处于无弯矩状态的轴线称为合理拱轴线。

式(3-9)表明，在竖向荷载作用下，三铰拱的弯矩 M 是由简支梁的弯矩(M^0)与($-F_H y$)叠加而得，而后一项与拱的轴线有关。因此，如果对拱的轴线形式加以选择，则有可能使拱处于无弯矩状态。实际上，在竖向荷载作用下，三铰拱合理轴线的方程可由下列公式求得

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

故

$$y(x) = \frac{M^0(x)}{F_H} \tag{3-12}$$

其中 $y(x)$和 $M^0(x)$是 x 的函数，F_H 是常数这就是说，在竖向荷载作用下，三铰拱的合理轴线的纵坐标与简支梁弯矩图的纵坐标成正比。

了解合理轴线这个概念，有助于设计中选择拱轴的合理形式，更好地发挥人的主观能动作用。

例 3-12 设三铰拱承受沿水平方向满跨均匀分布的竖向荷载，试求其合理轴线(图 3-50a)。

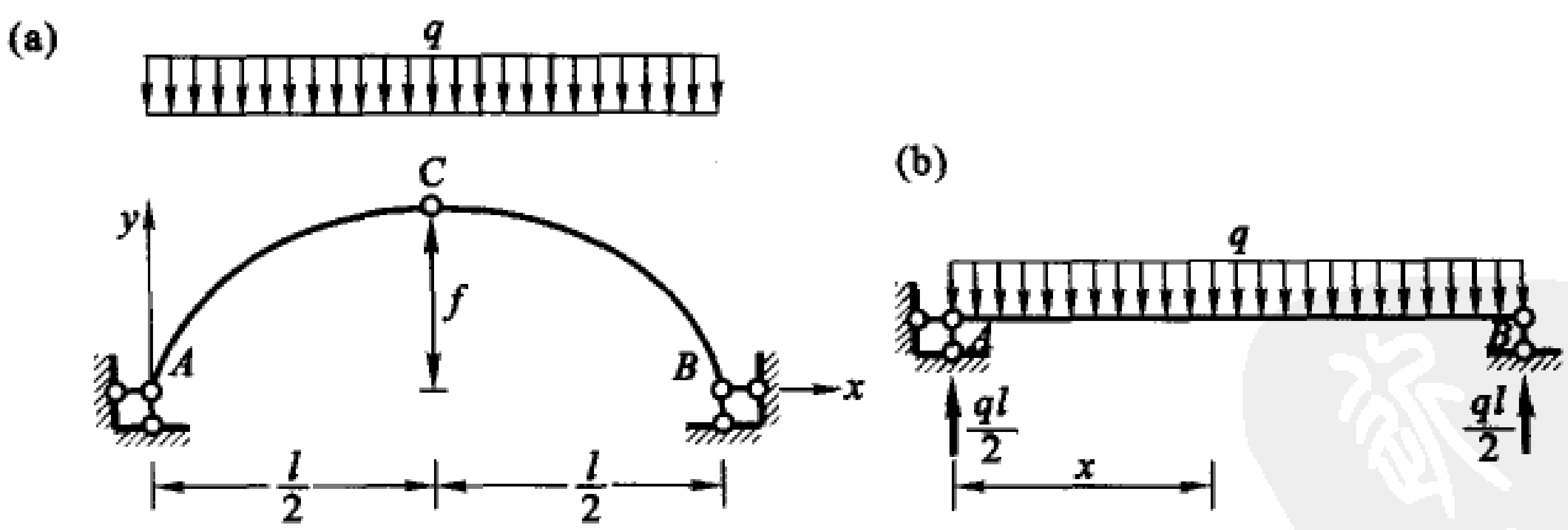


图 3-50

解 由式(3-12)得知

$$y = \frac{M^0}{F_H}$$

简支梁(图 3-50b)的弯矩方程为

$$M^0 = \frac{q}{2}x(l-x)$$

拱的推力为

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

所以

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x)$$

由此可知,三铰拱在沿水平线均匀分布的竖向荷载作用下,合理轴线为一抛物线。正因为如此,所以房屋建筑中拱的轴线常用抛物线。

在合理拱轴的抛物线方程中,拱高 f 没有确定。具有不同高跨比的一组抛物线都是合理轴线。

例 3-13 设三铰拱承受均匀水压力作用,试证明其合理轴线是圆弧曲线(图 3-51)。

证 在证明之前,先根据平衡条件推导曲杆内力的微分关系式。

从曲杆中取微段为隔离体,如图 3-52 所示。设微段杆轴的曲率半径为 R,两端截面的夹角为 $d\varphi$,微段轴线长度为 $ds = Rd\varphi$。用 s 和 r 分别表示杆轴的切线和法线方向。沿 s 和 r 方向的荷载集度分别为 q_s 和 q_r。

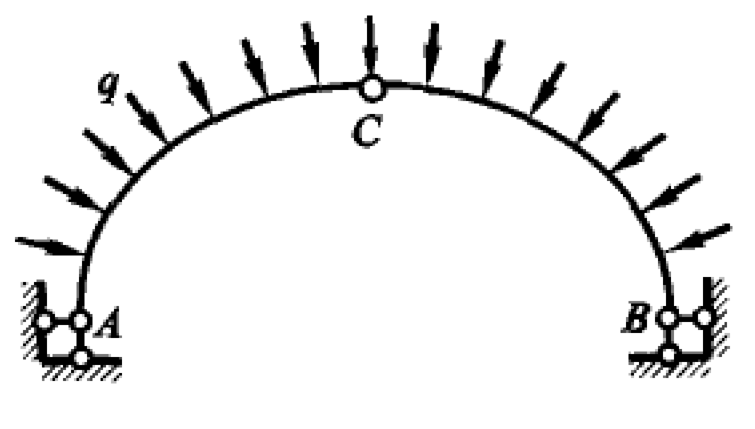


图 3-51

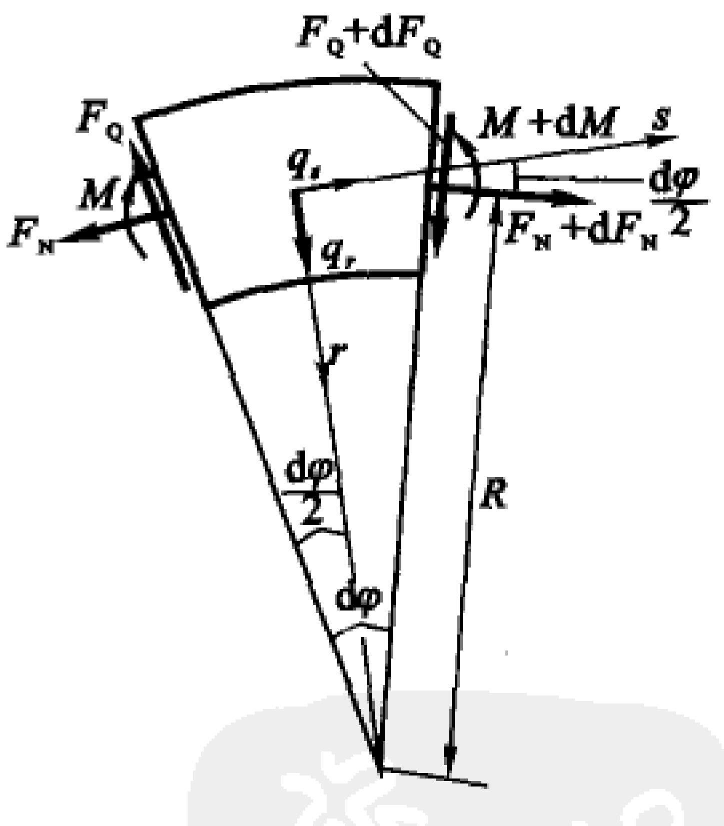


图 3-52

由$\sum F_s = 0$,得

$$(F_N + dF_N)\cos\frac{d\varphi}{2} - F_N\cos\frac{d\varphi}{2} - (F_Q + dF_Q)\sin\frac{d\varphi}{2} - F_Q\sin\frac{d\varphi}{2} + q_s ds = 0$$

因为 $d\varphi$ 很小,可令 $\cos\frac{d\varphi}{2} = 1, \sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$,并忽略高价微量,得

$$dF_N - F_Q d\varphi + q_s ds = 0$$

除以 ds，并考虑到 $ds = R d\varphi$，故得

$$\frac{dF_N}{ds} = \frac{F_Q}{R} - q_s$$

同理，由 $\sum F_r = 0$，得

$$dF_Q + F_N d\varphi + q_r ds = 0$$

即

$$\frac{dF_Q}{ds} = -\frac{F_N}{R} - q_r$$

再由 $\sum M = 0$，得

$$dM - F_Q ds = 0$$

即

$$\frac{dM}{ds} = F_Q$$

综合起来，得

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF_N}{ds} &= \frac{F_Q}{R} - q_s \\ \frac{dF_Q}{ds} &= -\frac{F_N}{R} - q_r \\ \frac{dM}{ds} &= F_Q \end{aligned}\right\} \qquad (3-13)$$

式(3-13)就是曲杆内力的微分关系。当 $R\to\infty$ 时，曲杆即变为直杆，而曲杆公式(3-13)即变为直杆的公式。

在本问题中，由于拱受均匀水压力 q 作用，故切线荷载 $q_s = 0$，法向荷载 $q_r = q$（常数）。因此，曲杆内力的微分关系式(3-13)可写成：

$$\begin{cases} \dfrac{dF_N}{ds} = \dfrac{F_Q}{R} & \text{(a)} \\ \dfrac{dF_Q}{ds} = -\dfrac{F_N}{R} - q & \text{(b)} \\ \dfrac{dM}{ds} = F_Q & \text{(c)} \end{cases}$$

设拱处于无弯矩状态，即 $M = 0$，将此式代入式(c)，即得

$$F_Q = 0 \qquad \text{(d)}$$

再将式(d)代入式(a)，即得 $\frac{dF_N}{ds} = 0$，因此

$$F_N = C\text{（常数）} \qquad \text{(e)}$$

将式(d)代入式(b),得 $0=-\frac{F_N}{R}-q$,因此

$$R=-\frac{F_N}{q} \tag{3-14}$$

由式(e)已知各截面的轴力 F_N 是一个常数,且荷载 q 也是常数,因此各截面的曲率半径 R 也应是一个常数。这就是说,拱的轴线应是圆弧曲线。

总结起来,拱在均匀水压力作用下,合理轴线为圆弧,而轴力等于常数。因此,水管、高压隧洞和拱坝常采用圆形截面。

例 3-14 设在三铰拱的上面填土,填土表面为一水平面,试求在填土重量下三铰拱的合理轴线。设填土的重力密度为 γ,拱所受的竖向分布荷载为 $q=q_C+\gamma y$(图 3-53)。

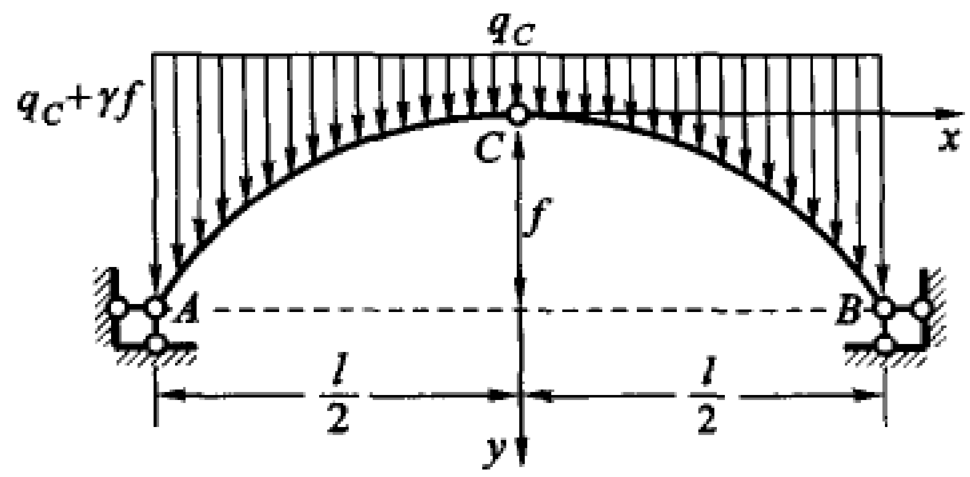


图 3-53

解 将式(3-12)对 x 微分两次,得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{F_H}\frac{d^2M^0}{dx^2}$$

用 $q(x)$ 表示沿水平线单位长度的荷载值,则

$$\frac{d^2M^0}{dx^2}=-q(x)$$

所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{q(x)}{F_H} \tag{3-15}$$

这就是在竖向荷载作用下拱的合理轴线的微分方程。式中规定 y 向上为正。在图 3-53 中,y 轴是向下的,故式(3-15)右边应改取正号,即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q(x)}{F_H} \tag{a}$$

在本题中,当拱轴线改变时,荷载也随之改变,M^0 图无法事先求得,因此求合理轴线时,不用式(3-12)而用式(a)。

将 $q=q_C+\gamma y$ 代入式(a),得

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\gamma}{F_H}y=\frac{q_C}{F_H}$$

这个微分方程的解答可用双曲线函数表示：

$$y=A\cdot \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\gamma}{F_H}}x+B\cdot \mathrm{sh}\sqrt{\frac{\gamma}{F_H}}x-\frac{q_C}{\gamma}$$

两个常数 A 和 B 可由边界条件求出如下：

在 $x=0$ 处，$y=0$，得

$$A=\frac{q_C}{\gamma}$$

在 $x=0$ 处，$\frac{dy}{dx}=0$，得

$$B=0$$

因此

$$y=\frac{q_C}{\gamma}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\gamma}{F_H}}x-1\right) \tag{b}$$

上式表明：在填土重量作用下，三铰拱的合理轴线是一悬链线。

在工程实际中，同一结构往往要受到各种不同荷载的作用，而对应不同的荷载就有不同的合理轴线。因此，根据某一固定荷载所确定的合理轴线并不能保证拱在各种荷载作用下都处于无弯矩状态。在设计中应当尽可能地使拱的受力状态接近无弯矩状态。通常是以主要荷载作用下的合理轴线作为拱的轴线。这样，在一般荷载作用下拱仍会产生不大的弯矩。

§3－7　隔离体方法及其截取顺序的优选

静定结构的受力分析，主要是利用平衡方程确定支座反力和杆件内力，作出结构的内力图。

求静定结构约束力（支座反力和内力）的基本方法是隔离体分析方法。其要点是：首先，在结构中人为地截断约束，取出隔离体，把约束力暴露出来，成为隔离体的外力。然后，建立平衡方程，以解出约束力。在§3－8中还要介绍另一方法——虚功法，即应用虚位移方程求约束力的方法。虚位移方程实际上是用虚功的形式表示的平衡方程。

受力分析与几何构造分析是密切相关的。要善于根据结构的几何构造特点来确定受力分析的步骤，要善于把整个结构的计算问题逐步分解为单个单元的计算问题，以收到化整为零、各个击破的效果。

1. 隔离体的形式、约束力及独立平衡方程

(1) 隔离体的形式

从结构中截取的隔离体(或简称为单元)有多种形式:结点(铰结点、刚结点、组合结点),杆件,刚片(内部几何不变体系),内部几何可变体系或杆件微段单元。

桁架的结点法以结点为隔离体。桁架截面法截取的隔离体通常是多杆体系。多跨静定梁以杆件为隔离体。在刚架分析中,常以杆件为隔离体计算杆端剪力,以结点为隔离体计算杆端轴力。推导荷载与内力之间的微分关系时取杆件微段为隔离体。

(2) 约束力的类型

选取隔离体时,在截断约束处暴露出来的约束力成为隔离体的外力。这些约束力的个数和类型是由所截断的约束的性质决定的。例如,在平面结构中:

截断链杆——有一个约束力(轴力);

截断简单铰结——一般有两个约束力;

截断简单刚结(或截断梁式杆)——一般有三个约束力。

截断滚轴支座、铰支座、定向支座、嵌固支座——分别有一个、二个、二个、三个约束力。

(3) 隔离体的独立平衡方程个数

对隔离体建立平衡方程时,其独立平衡方程的个数等于隔离体的自由度的个数。例如,在平面结构中:

取铰结点为隔离体——两个独立平衡方程;

取刚结点和组合结点为隔离体——三个独立平衡方程;

取刚片或内部几何不变体系为隔离体——三个独立平衡方程;

取内部几何可变体系为隔离体——S 个独立平衡方程(S 表示隔离体的自由度的个数)。

对隔离体的平衡方程应当进行优选,使求解时尽量不解或少解联立方程。最优情况是:每建立一个新的平衡方程时,只出现一个新的未知力。还要注意:不能选用彼此不独立的平衡方程。因此,对某个隔离体选用的平衡方程的个数不应超过其独立平衡方程个数。

为了举例说明关于隔离体的形式、约束力的类型和平衡方程的优选,可以图3-54a、b、c所示结构作为简例。

在图3-54a中,可选铰结点 C 作为隔离体。由于 AC 和 BC 都是链杆约束,因此截断链杆时暴露出来的约束力是轴力。隔离体上共作用两个未知力 F_{N1} 和 F_{N2}。由于铰结点 C 有两个自由度,因此可写出两个独立的平衡方程,正好可解出两个未知力。

在图3-54b中,可选刚片 AC 作为隔离体。截断链杆 BC 和铰支座 A,暴

露出来的待定约束力分别为轴力 F_N 和支座反力 F_{xA}、F_{yA}。由于刚片 AC 有三个自由度,因此可写出三个独立的平衡方程,正好可解出三个未知力。

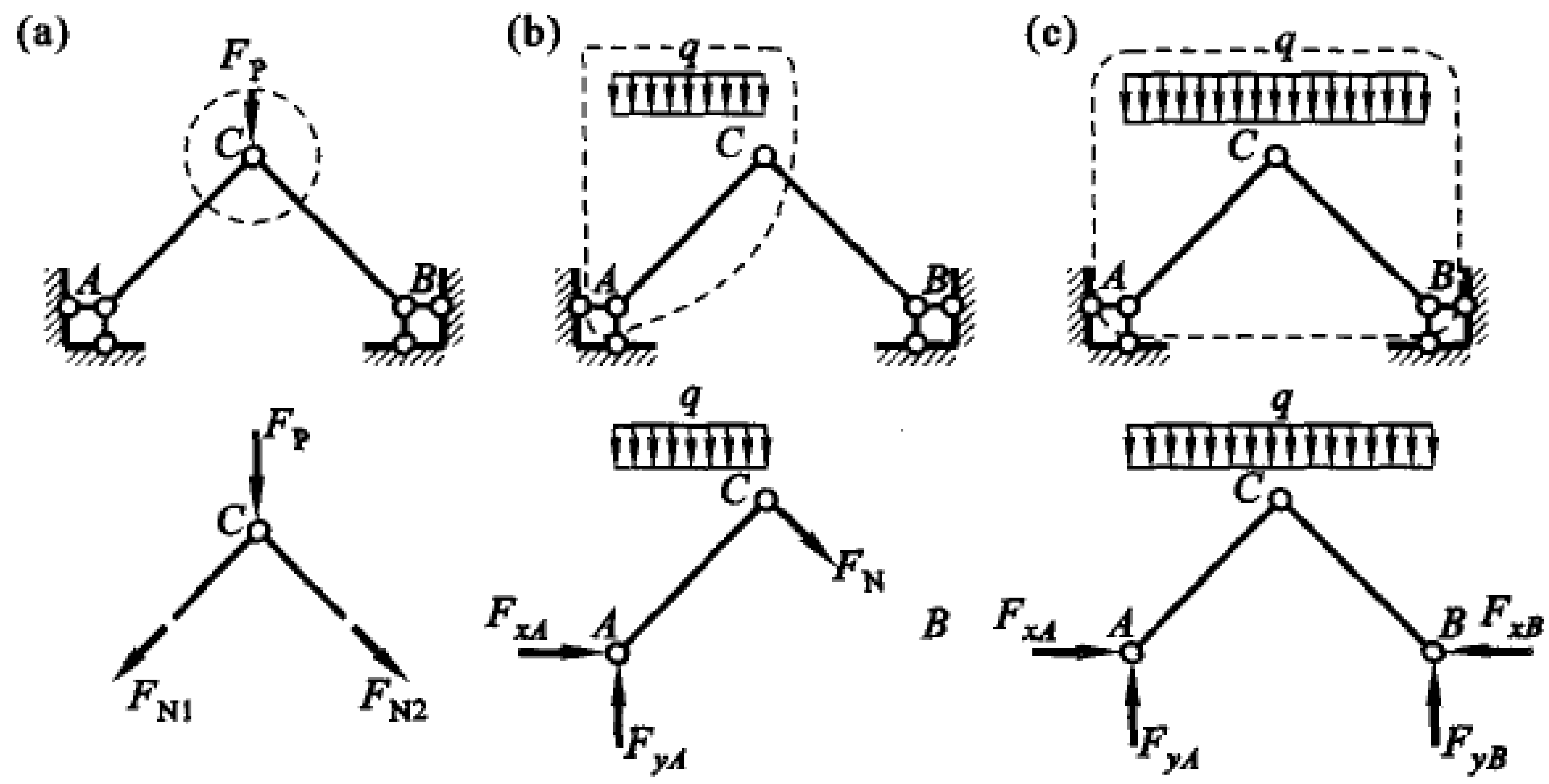


图 3-54

在图 3-54c 中,可选刚片 AC 和 BC 组成的铰结体系作为隔离体。截断两个铰支座 A 和 B,暴露出来的待定约束力为四个支座反力 F_{xA}、F_{yA}、F_{xB}、F_{yB}。由于隔离体是一个内部几何可变体系,共有四个自由度(其中有三个是整体自由度,另一个是两刚片相对转动的内部自由度),因此可写出四个独立的平衡方程(三个整体平衡方程 $\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$, $\sum M=0$ 及与上述内部自由度对应的平衡方程 $M_C=0$),正好可解出四个未知力。为了避免解四元联立方程,还可按照求三铰拱支座反力的作法,对使用四个平衡方程的先后进行优选。

在图 3-54a、b、c 中,虽然结构形式相同,但由于受力状态不同,因而所选的隔离体也不相同。这正好说明,对隔离体分析方法需要深入理解并能灵活地加以运用。

2. 计算的简化和隔离体截取顺序的优选

前已指出,对隔离体的平衡方程应当进行优选,尽量避免解联立方程。例如,在桁架结点法中,经常使用投影方程,但有时使用力矩方程更方便。在桁架截面法中,力矩中心和投影轴的选择就很重要,选择得好就可以不需解联立方程。

掌握了结构的受力特点,就能简化计算。例如,在图 3-54a 中,如认识到 AC 和 BC 都是链杆,就可以用结点法解决问题。如果不能看出 AC 和 BC 是链杆,就必须用三铰拱的方法计算反力。在桁架计算中,如能识别出零杆(轴力为零的杆件)或单杆,常常可以使计算简化。对称结构在对称荷载作用下,反力和内力也是对称的。利用这个规律,对于对称问题只计算半边结构就够了。图 3-55a 是一个简例,因为结构和荷载都是左右对称的,反力也是对称的,因而只需计算 A 点的反力 F_H 和 F_V。如果取杆 AC 为单元(图 3-55b),则在铰 C 处

只有水平未知力 F_{xC}，没有竖向未知力。

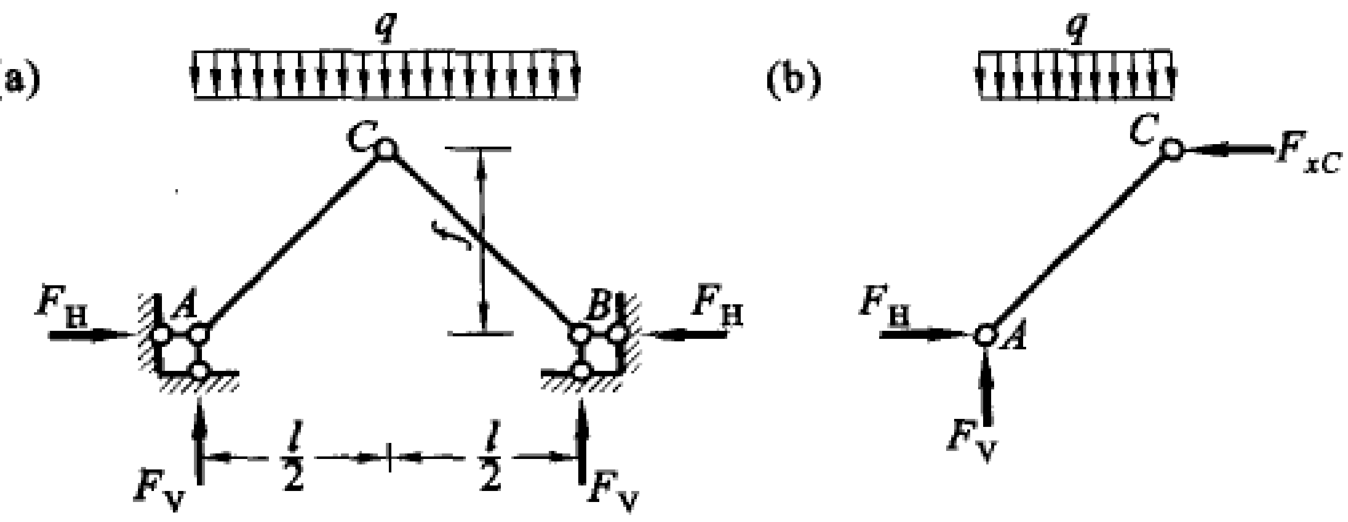


图 3-55

简化静定结构受力分析的最重要的手段，是合理选择截取单元的次序。对于多跨梁，应先计算附属部分，然后计算基本部分。

对于简单桁架，截取结点的次序，应与桁架组成时添加结点的次序相反。对于联合桁架，应先用截面法求出连接杆的轴力，然后计算其他杆件的内力。由此可知，为了选择合理的计算次序，必须分析结构的几何构造。在受力分析中，要解决结构如何分解为单元，即"如何拆"的问题；在几何构造分析中，要解决结构如何组成，即"如何搭"的问题。拆和搭是互相联系的，如果拆的次序与搭的次序正好相反，工作就可以顺利进行。因此，如果逐步截取单元的次序与结构组成过程中逐步添加单元的次序相反，结构的受力分析就比较简便。

图 3-56a 所示为一静定刚架，是按照Ⅰ，Ⅱ次序组成的。受力分析应按照相反的次序截取单元，如图 3-56b 所示。

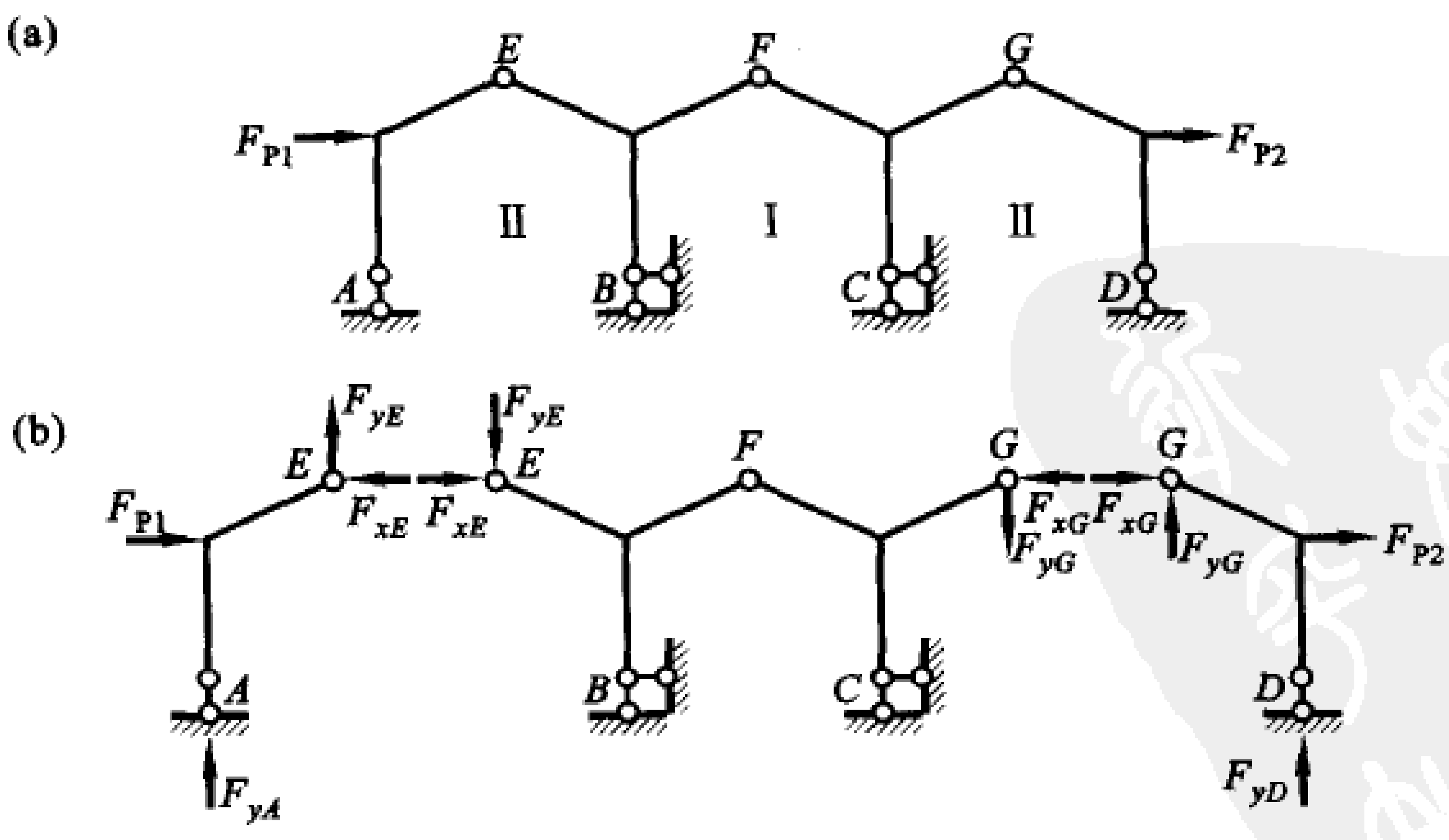


图 3-56

有时同一结构有几种不同的搭法，因此也就有几种不同的拆法。在桁架的结点法中，已遇到过这样的例子。

§3－8 刚体体系的虚功原理

在本章前面各节中，详细地讨论了静力分析的基本方法：选取隔离体，建立平衡方程。在本节中，补充介绍静力分析的另一个普遍方法：应用虚功原理，建立虚功方程。虚功原理在力学分析中有多方面的应用。在本节中，把虚功方程看作是平衡方程的另一种表示形式，用以求静定结构的约束力。

1. 虚功原理

对于具有理想约束的刚体体系，其虚功原理可表述如下：

设体系上作用任意的平衡力系，又设体系发生符合约束条件的无限小刚体体系位移，则主动力在位移上所作的虚功总和恒等于零。

这里，有两个彼此无关的状态：一是体系上作用的任意平衡力系，以后简称平衡力系；二是体系发生符合约束条件的无限小的刚体体系位移，以后简称可能位移。功的前面加一个"虚"字，只是用以指明作功的双方（平衡力系为一方，可能位移为另一方）彼此独立无关这一特征，而没有别的含义。

理想约束是指其约束力在可能位移上所作的功恒等于零的那种约束。光滑铰结与刚性链杆都是理想约束的例子。

在刚体中，任何两点间的距离保持不变，可以设想任何两点间有刚性链杆相连。因此，刚体是具有理想约束的质点系，刚体内力在刚体的可能位移上所作的功恒等于零。

既然虚功原理中的平衡力系与可能位移无关，因此不仅可以把位移看作是虚设的，而且也可以把力系看作虚设的。根据虚设对象的不同选择，虚功原理主要有两种应用形式，用来解决两类问题。

本节先讨论虚功原理的一种应用形式：虚设位移，求未知力。另一种应用形式：虚设力系，求位移，将在§5－1中讨论。

为了说明虚功原理的第一种应用形式，最简单的例子是图3－57a所示的杠杆，其中在B点作用已知荷载F_P，求杠杆平衡时在A点需加的未知力F_X[①]。

杠杆是一个几何可变体系，可绕C点自由转动，如图3－57b所示。我们把这个刚体位移取作虚位移，可得出虚功方程如下：

$$F_X\Delta_X + F_P\Delta_P = 0 \tag{a}$$

① F_X表示广义未知力。下同。

式中 Δ_X 和 Δ_P 分别是沿 F_X 和 F_P 方向的虚位移。

令 δ_P 表示位移 Δ_P 和 Δ_X 之间的比例系数：

$$\delta_P = \frac{\Delta_P}{\Delta_X} \qquad \text{(b)}$$

由图 3－57b，得

$$\delta_P = \frac{\Delta_P}{\Delta_X} = -\frac{b}{a} \qquad \text{(c)}$$

由图 3－57b 看出，如果 Δ_X 为正（与 F_X 方向一致），则 Δ_P 为负（与 F_P 方向相反），因此 δ_P 应为负值，且是一个纯数值。

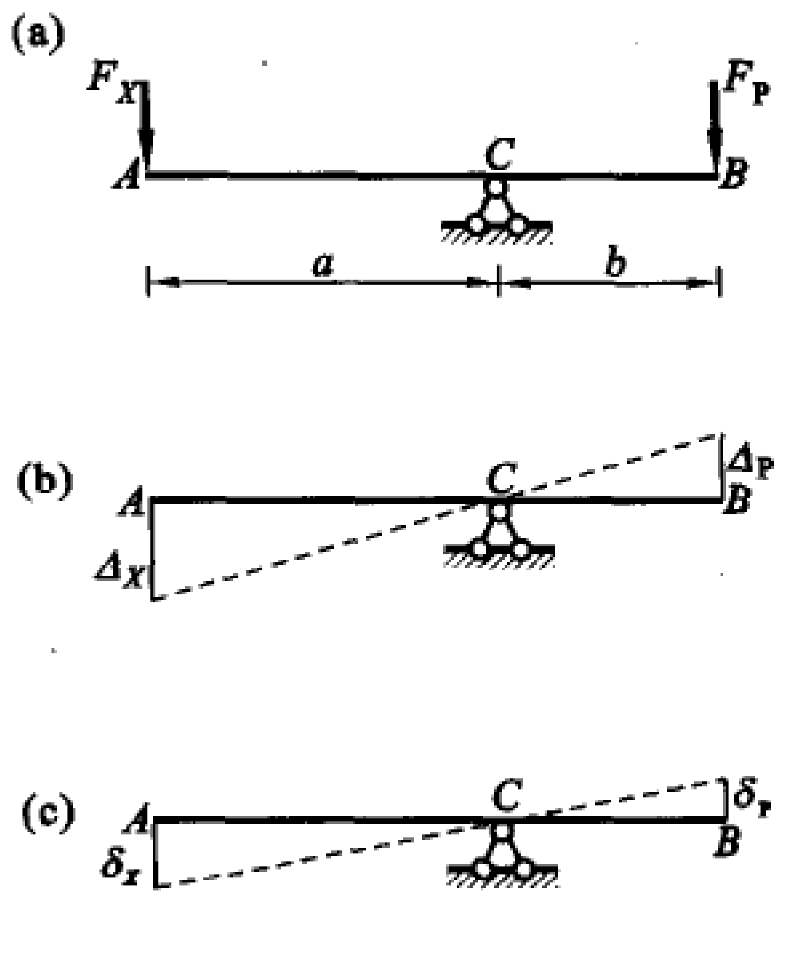


图 3－57

将式(a)除以 Δ_X，得

$$F_X \times 1 + F_P \delta_P = 0 \qquad \text{(d)}$$

由此即可求得

$$F_X = -F_P \delta_P = \frac{b}{a} F_P$$

为了计算上的方便，可将图 3－57b 所示位移图除以 Δ_X，得到图 3－57c 所示广义位移图，其中沿 F_X 方向的位移为虚设的单位位移 $\delta_X = 1$（数值为 1，δ_X 为量纲一的量[①]），沿 F_P 方向的位移即为 δ_P。令图 3－57a 的力系在图 3－57c 的虚位移上作虚功，同样可得到式(d)。这种作法更为直接和简便。

由此简例，可归纳出以下几点：

第一，式(d)就是以 C 点为矩心的力矩平衡方程 $\sum M_C = 0$。由此可见，虚功方程形式上是功的方程，实际上就是平衡方程。

第二，虚位移是人为虚设的，为了方便，可以随意虚设 $\delta_X = 1$。显然，虚位移与实际力系是彼此独立无关的。

第三，求解时的一个重要步骤是得出位移之间的几何关系[式(c)]，由此即可得出力系之间的静力平衡关系[式(d)]。因此，这里用虚功原理求解问题的特点是采用几何方法来解静力平衡问题。这种用虚功原理求解问题的方法称为虚功法。

① 所有量纲指数为零的量，其量纲为 $A^0 = 1$，称为量纲一的量（以往称为无量纲量）。

例 3-15　图3-58所示为一机构，在 F 点作用已知荷载 F_P。试求机构平衡时在 B 点需加的力 F_X。已知 CA、CB、CD、CE、FD、FE 各线段的长度都是 a。

解　(1) 建立虚功方程

图中虚线表示这个机构的可能位移，虚功方程为

$$F_X\Delta_X + F_P\Delta_P = 0 \tag{a}$$

(2) 建立位移之间的几何关系

取杆 ACE 的转角 $d\theta$ 作为位移参数，各点位移可用 $d\theta$ 来表示。由图得知

$$b = 2a\cos\theta,\quad c = a\sin\theta$$

其导数为

$$db = -2a\sin\theta d\theta,\quad dc = a\cos\theta d\theta$$

由于 $\Delta_X = -db$，$\Delta_P = -3dc$，故得

$$\Delta_X = 2a\sin\theta d\theta,\quad \Delta_P = -3a\cos\theta d\theta$$

由此可得出位移比值如下：

$$\frac{\Delta_P}{\Delta_X} = -\frac{3}{2}\cot\theta \tag{b}$$

(3) 求未知力 F_X

将几何关系式(b)代入虚功方程(a)，可得

$$F_X = -\frac{\Delta_P}{\Delta_X}F_P = \frac{3}{2}\cot\theta F_P$$

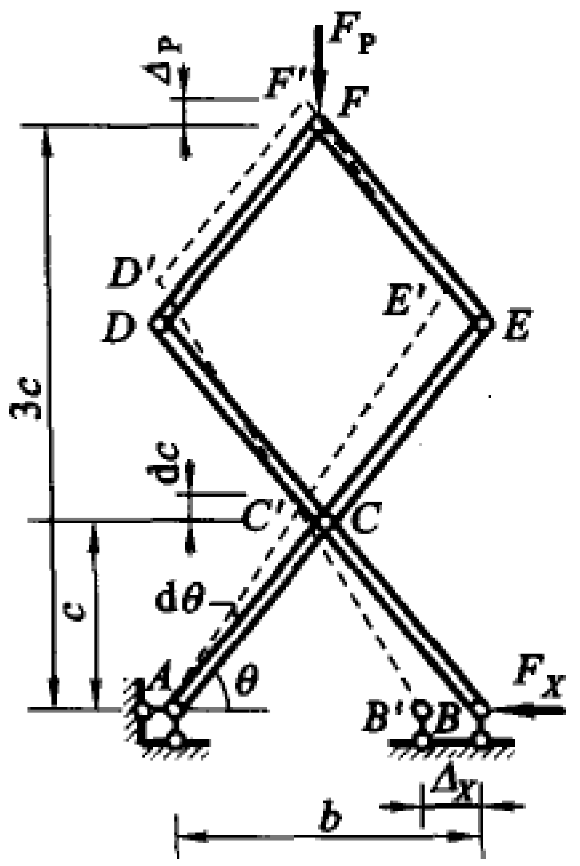


图　3-58

从本例中可指出几点：

第一，这里的计算工作量主要花在几何关系式(b)的推导上面。本来是一个静力平衡问题，可是从计算角度来看，主要归结为一个几何问题，这就是虚功法的特点。

第二，此题如果按照截取隔离体的方法求解，则需分两步进行：第一步，在铰 D 和 E 处切开，取上部为隔离体，求出铰 D 和 E 处的约束力。第二步，取下部为隔离体，根据铰 D 和 E 处的约束力再来推算 F_X。总之，要先求出某些约束力，然后借助这些约束力才能间接地求出 F_X。虚功法与此不同。在虚功方程(a)中，可以直接由荷载 F_P 来求未知力 F_X。这种解法的优点是可以直接求出拟求的未知力，而不需要先求别的约束力。虚功法的这个优点实际上是与虚功方程的下述特点相连的，即在理想约束的情况下，虚功方程中只出现主动力，而不出现约束力。

2. 应用虚功原理求静定结构的约束力——单位支座位移法

上面应用虚功原理讨论了机构(具有一个自由度的几何可变体系)的平衡问题。由于机构本身可能发生刚体体系的位移，这种位移即取作虚位移。

现进一步应用虚功原理求静定结构的约束力。

图 3－59a 所示为一静定梁，拟求支座 A 的反力 F_X。静定结构与机构不同，在符合约束的条件下，不可能发生刚体体系位移。因此，应用虚功原理求 F_X 时，首先要把静定结构变成机构。为此，撤除与 F_X 相应的约束（即支座 A），得到图 3－59b 所示的机构。这就是图 3－57a 中的机构。因此，求图 3－59a 中静定梁支座未知反力 F_X 的问题即转化为求图 3－57a 中机构的平衡问题。

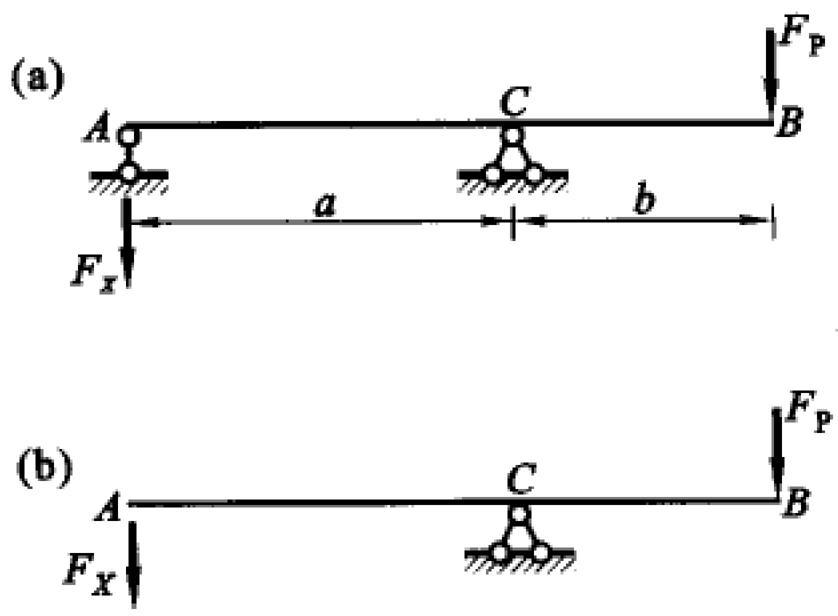


图 3－59

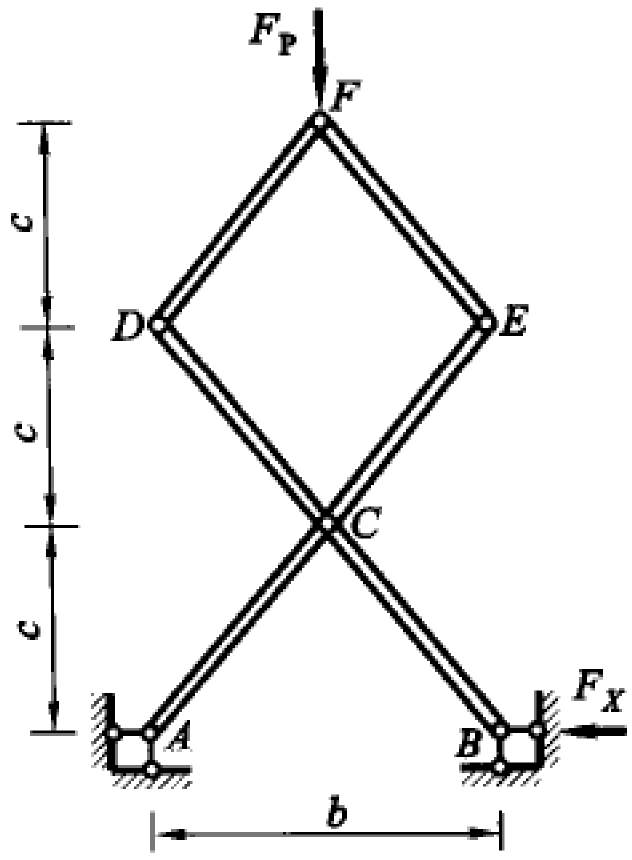


图 3－60

又如，图 3－60 所示为一静定结构，拟求支座 B 的水平反力 F_X。为此，把与 F_X 相应的约束撤除，即把支座 B 处的水平支杆撤除，于是问题便归结为求图 3－58所示机构的平衡问题。

一般说来，应用虚功原理求静定结构某一约束力 F_X（支座反力或内力）时，可按如下方法进行。

（1）撤除与 F_X 相应的约束，使原来的静定结构变成具有一个自由度的机构，使原来的约束力 F_X 变成主动力 F_X。

（2）把机构可能发生的刚体体系位移当作虚位移，这样才有可能应用虚功原理。设与未知力 F_X 和荷载 F_P 相应的虚位移分别为 Δ_X 和 Δ_P，则可写出虚功方程如下：

$$F_X\Delta_X + \sum F_P\Delta_P = 0 \tag{a}$$

这里，由于 F_X 已经变成主动力，因此 F_X 才有可能在虚功方程中出现，从而才有可能由虚功方程来求 F_X。

（3）求出 Δ_X 与 Δ_P 之间的几何关系，代入式(a)，即可求出 F_X，即

$$F_X = -\frac{\sum F_P\Delta_P}{\Delta_X} \tag{b}$$

为了计算上的方便，沿 F_X 方向的位移可虚设为单位位移。在这种状态下，如用 $\delta_P=\dfrac{\Delta_P}{\Delta_X}$ 表示沿 F_P 方向的位移，则虚功方程为

$$F_X\times 1+\sum F_P\cdot\delta_P=0 \tag{c}$$

由此求得

$$F_X=-\sum F_P\cdot\delta_P \tag{d}$$

基本方程(c)形式上是虚功方程，实质上是约束力 F_X 与荷载 F_P 之间的平衡方程。

关键步骤是在拟求未知力 F_X 方向虚设单位位移，并利用几何关系求出 δ_P。因此，这个解法可称为单位支座位移法，或者称为单位约束位移法，简称为单位位移法。其特点是采用几何方法来解静力平衡问题。

例 3－16　试求图 3－61a 所示静定多跨梁在 C 点的支座反力 F_X。设荷载 F_{P1} 和 F_{P2} 等于常数 F_P。

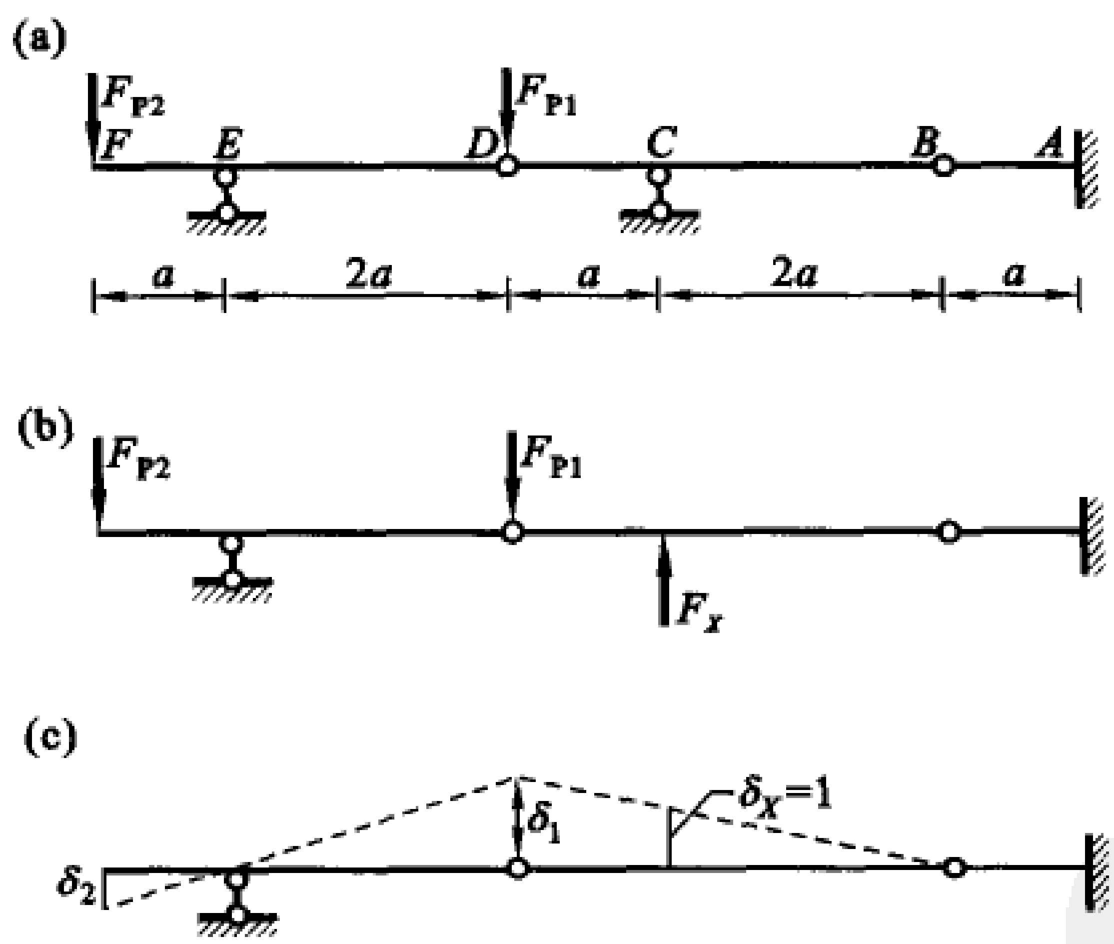


图　3－61

解　(1) 撤除支杆 C，把支座反力变成主动力 F_X。这时，体系已变成一个机构，如图 3－61b 所示。

(2) 取图 3－61c 中虚线所示机构的刚体体系的位移作为虚位移，并设沿 F_X 方向的位移 $\delta_X=1$。根据几何关系，可求出与 F_{P1} 和 F_{P2} 相应的位移：

$$\delta_1=-\frac{3}{2},\qquad \delta_2=\frac{3}{4}$$

注意，δ_1 与 F_{P1} 的方向相反，故 δ_1 为负值。

(3) 虚功方程为

$$F_X \times 1 + F_{P1}\delta_1 + F_{P2}\delta_2 = 0$$

即

$$F_X \times 1 + F_P \times \left(-\frac{3}{2}\right) + F_P \times \left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

由此求得

$$F_X = \frac{3}{4}F_P$$

例 3－17 试求简支梁截面 C 的弯矩 M_C。设在 A 端作用力偶荷载 M(图 3－62a)。

解 (1) 撤除与弯矩 M_C 相应的约束,即将截面 C 由刚接改为铰接。同时,弯矩 M_C 由约束力变成主动力,由一对大小相等,方向相反的力偶所组成,如图 3－62b 所示。

(2) 取虚位移如图 3－62c 所示。设 C 点竖向位移为 Δ_C,则 AC 和 BC 两段的转角 α 和 β 分别为

$$\alpha = \frac{\Delta_C}{a}, \quad \beta = \frac{\Delta_C}{b}$$

(3) 令图 3－62b 中的主动力在图 3－62c 所示虚位移上作功,虚功方程为

$$M_C(\alpha + \beta) - M\alpha = 0$$

即

$$M_C\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\Delta_C - M\frac{\Delta_C}{a} = 0$$

约去 Δ_C,可求得 M_C 如下:

$$M_C = M\frac{b}{a+b} = M\frac{b}{l}$$

例 3－18 试求简支梁截面 C 的剪力 F_{QC}。设全跨作用均布竖向荷载 q(图 3－63a)。

解 (1) 撤除与剪力 F_{QC} 相应的约束,即将截面 C 切开,加上两个平行梁轴的链杆。这时,两侧截面 C_1 和 C_2 可发生相对剪切位移,但不能发生相对轴向位移和相对转角。同时,剪力 F_{QC} 由约束力变成主动力,由一对大小相等、方向相反的竖向力所组成,如图 3－63b 所示。

(2) 取虚位移如图 3－63c 所示。由于两侧截面 C_1 和 C_2 没有相对转动,因此 AC_1 和 C_2B 两段梁仍保持平行。两段梁的转角为 θ,则截面 C_1 和 C_2 的竖向位移分别为 $a\theta$(向下)和 $b\theta$(向上),C_1 和 C_2 的相对竖向位移为 $a\theta + b\theta$。

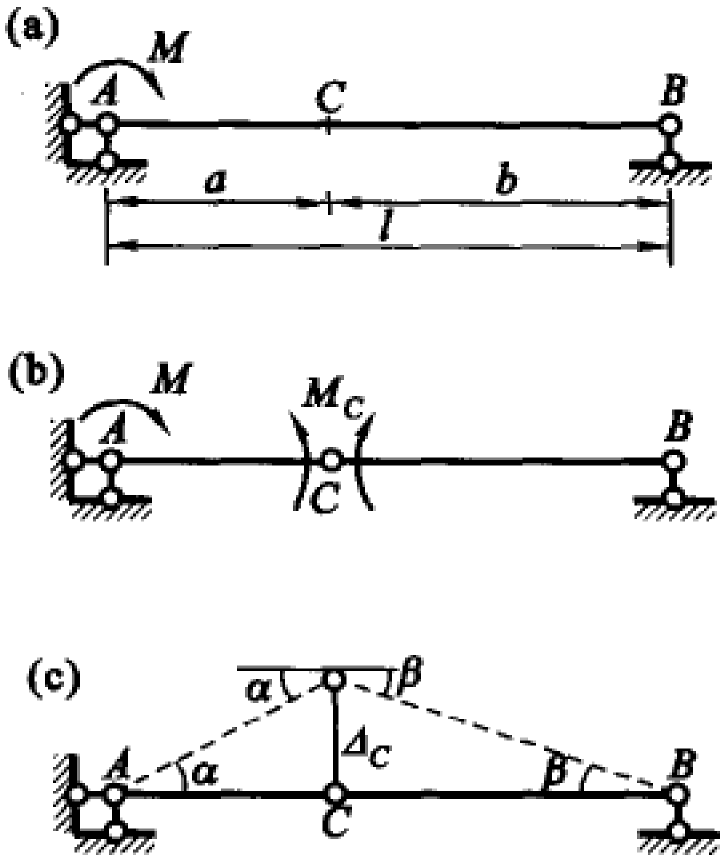


图 3-62

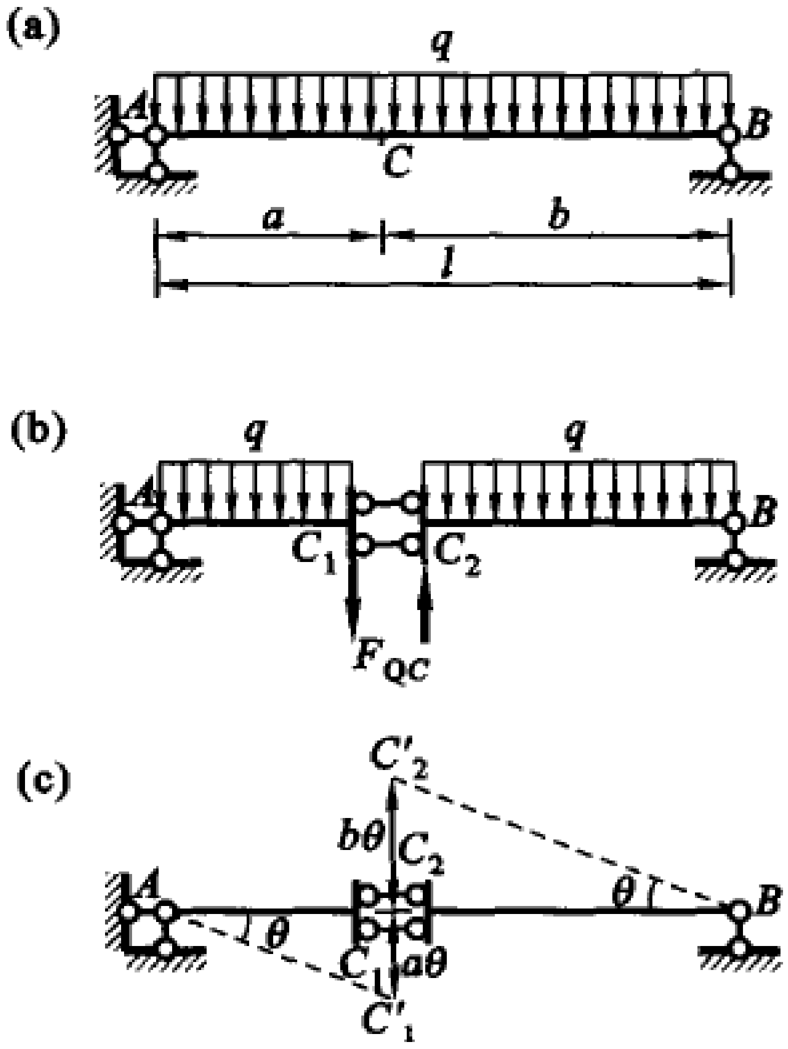


图 3-63

(3) 令图 3-63b 中的主动力在图 3-63c 所示虚位移上作功，其中剪力 F_{QC}作的虚功为

$$F_{QC}(a\theta+b\theta)=F_{QC}l\theta$$

微段 dx 上的均布荷载 q 在竖向位移 y 上作的虚功为(q 和 y 均以向下为正)

$$q\mathrm{d}x\cdot y$$

梁段 AC_1 上均布荷载 q 作的虚功为

$$q\int_A^{C_1}y\mathrm{d}x=q\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\theta\right)=\frac{q}{2}a^2\theta$$

梁段 C_2B 上均布荷载 q 作的虚功为

$$-\frac{q}{2}b^2\theta$$

因此，虚功方程为

$$F_{QC}l\theta+\frac{q}{2}a^2\theta-\frac{q}{2}b^2\theta=0$$

约去 θ，可求得 F_{QC}如下：

$$F_{QC}=\frac{b^2-a^2}{2l}q=\frac{q}{2}(b-a)$$

例 3-19 试求图 3-64a 所示桁架 FG 杆的未知力 F_X。

解 (1) 撤除链杆 FG，代以轴力 F_X。原来的桁架变成由两个刚片 ACF 与 ECG 在 C 点用铰相连而组成的机构，如图 3-64b 所示。

(2) 取虚位移如图 3-64c 所示。设两个刚片分别绕 A 点和 E 点的转角为

θ,则荷载作用点 B、C、D 的竖向位移为

$$\Delta_B = \Delta_D = -\theta a\,,\quad \Delta_C = -2\theta a$$

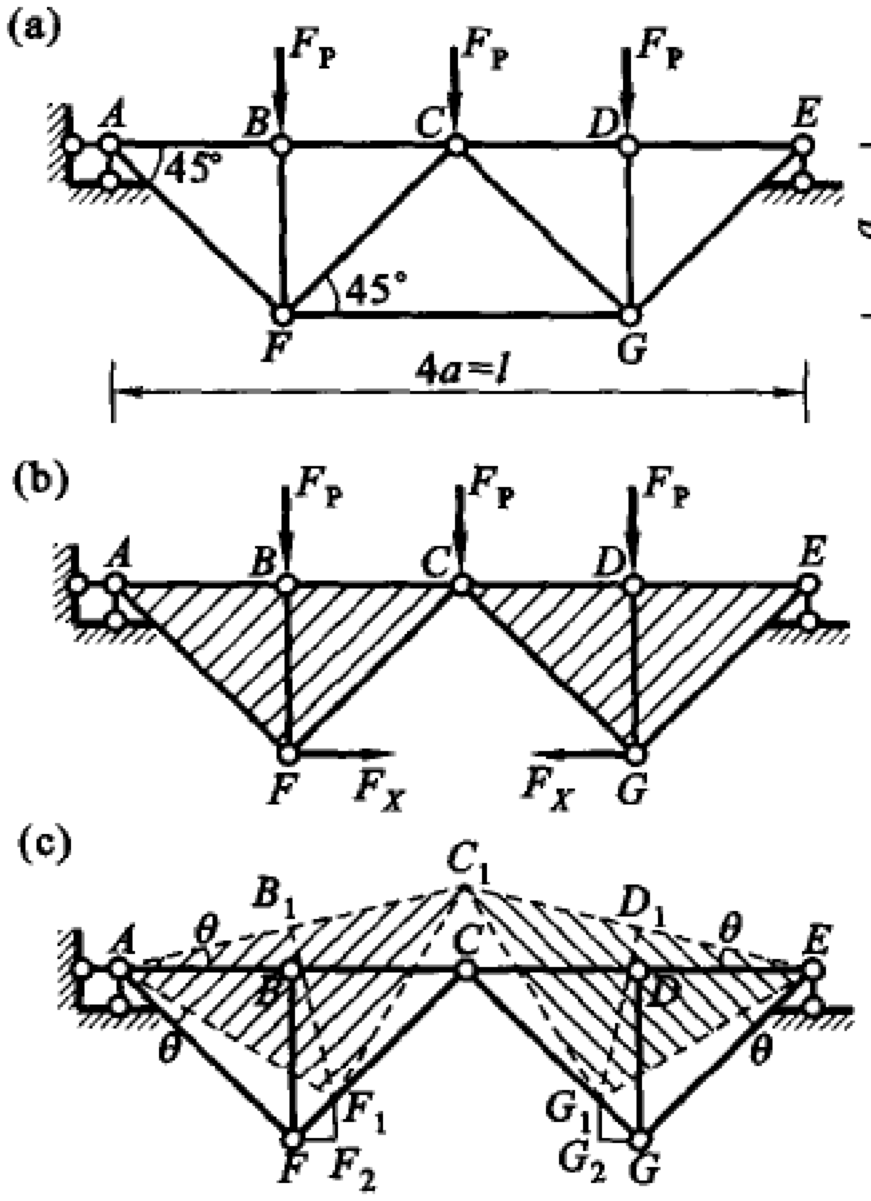


图　3－64

又 F 点绕 A 点转动 θ 时产生的总位移为

$$\overline{FF_1} = \overline{AF}\cdot\theta = \sqrt{2}a\cdot\theta$$

F 点的水平位移分量为

$$\overline{FF_2} = \overline{FF_1}\cos 45^\circ = a\theta$$

同理 G 点的水平位移分量为

$$\overline{GG_2} = a\theta$$

因此,F 和 G 两点的相对水平位移为

$$a\theta + a\theta = 2a\theta$$

(3) 令图3－64b中的主动力在图3－64c所示虚位移上作功,虚功方程为

$$F_X(2a\theta) + F_P(-a\theta - 2a\theta - a\theta) = 0$$

由此求得

$$F_X = 2F_P$$

*§3－9　用求解器确定截面单杆

对于桁架结构,求解器为截面法提供了一个很有用的功能,即截面单杆的搜

寻和确定。利用求解器的这一功能，对于任意的平面桁架（静定或超静定），求解器均可以找出使指定杆件成为截面单杆的所有截面。

本节具体介绍了求解器的这一功能，详细内容见所附光盘相应章节。

*§3－10　用求解器求解组合结构

人工求解组合结构的要点是避免求解联立方程，所以求解策略和步骤很重要。求解策略得当的话，每一步解出一个未知力，无须求解联立方程。求解器为组合结构提供了智能求解功能，可以为用户自动找出最快捷的求解步骤。

本节具体介绍了求解器的这一功能，详细内容见所附光盘相应章节。

*§3－11　用求解器求解一般静定结构

本节讨论如何用求解器的自动求解模式求解一般的静定结构，包括静定桁架、刚架、多跨梁以及各样的组合结构。若结构是静定的，则无须输入杆件刚度等材料性质即可求得所有内力结果。若结构是超静定的，求解器将自动给出提示。

详细内容见所附光盘相应章节。

§3－12　小　　结

本章讨论静定结构的受力分析。基本方法是隔离体平衡方法。其要点是：选取隔离体，建立平衡方程，解方程求出支座反力和杆件内力。

受力分析和位移计算是静定结构分析的两个主题。静定结构受力分析同时又是静定结构位移计算的基础，也是超静定结构分析的基础。因此，本章内容是结构力学的一个十分重要的基础性内容，应当熟练掌握。

静定结构常见的结构形式有五种，可分为三组：

(1) 梁和刚架——由受弯直杆（称为梁式杆）组成。

(2) 桁架和组合结构——桁架由只受轴力的链杆组成，组合结构由链杆和梁式杆组合而成。

(3) 三铰拱——拱是在竖向荷载作用下具有水平支座反力的结构，主要受压。

本章各节结合上述结构形式，分别讨论隔离体平衡方法的具体应用。方法虽然同源，但应用形式却多种多样。通过多样化的应用，可以加深对基本方法的

理解和培养灵活运用的能力。

下面将各种结构形式的分析要点及静定结构各种受力分析方法的比较简述如下。主要结合平面结构来讲。

1. 梁和刚架的受力分析要点

梁和刚架中的杆件都是受弯直杆，弯矩是主要内力。受力分析的结果通常是画出结构各杆的内力图，包括 M 图以及相应的 F_Q图和 F_N图。

弯矩图的一般作法是分段叠加法。其要点是：首先根据结构的几何构造特点，求出支座反力。然后选取各杆两端截面作为控制截面，根据截面法求出控制截面的弯矩值。最后用分段叠加法，作各杆的弯矩图，也就是先根据杆件两端处控制截面的弯矩值作直线图形，再叠加上由于杆件上作用的荷载而产生的简支梁弯矩图。

作出内力图后要进行校核。对各杆内力图可检验是否满足荷载与内力之间的微分关系、增量关系和积分关系。在结点处，可取结点作隔离体，检验是否满足平衡条件。

2. 桁架和组合结构的受力分析要点

在结点荷载作用下，桁架中的杆件只受轴力，处于无弯矩状态，因而也处于无剪力状态。受力分析的结果是列出桁架各杆的轴力值。

结点法和截面法是计算桁架内力的基本方法，要熟练掌握，并会联合应用，还要善于识别结点单杆和截面单杆。根据几何构造分析，要会识别简单桁架和联合桁架，并会优选最简捷的分析方法和分析顺序。

分析组合结构时，最主要的是学会识别链杆和梁式杆，正确地画出隔离体的受力图。

3. 三铰拱的受力分析要点

三铰拱的受力分析比较简单。在竖向荷载作用下，三铰拱的弯矩 M 由下式给出：

$$M = M^0 - F_H y$$

这里，三铰拱的弯矩 M 用相应简支梁的弯矩 M^0 来表示。

进行力学分析，全面地讲，应该包含两方面的内容：一方面，根据力学分析，导出用数学公式表示的结论；另一方面，把数学公式翻译成力学语言，透过数学公式加深对结构力学性能的理解，并进一步提出如何改善力学性能的指导性意见。两方面都很重要，前者侧重于理论推导，后者侧重于实际应用。

从上述三铰拱弯矩公式来看，可以引出三铰拱力学性能的两点结论：

第一，由于推力 F_H的影响，在相同的竖向荷载作用下，三铰拱的最大弯矩一般比简支梁的要小。

第二，如果合理地选定三铰拱的轴线形状，如选定 $y(x)=\dfrac{M^0(x)}{F_H}$，则拱的各截

面弯矩为零,拱处于无弯矩状态,从而得到拱轴线形状的最优化结果。

4. 静定结构各种受力分析方法的比较

静定结构的受力分析方法有两类:

(1) 取隔离体、建立平衡方程的方法。

(2) 虚设位移、建立虚功方程的方法。

首先,要对每类方法深入学习,学懂会用。其次,还要把两类方法合在一起,加以研究和比较:

要了解两类方法之间的本质联系。为什么说虚位移方程实际上是平衡方程?

要了解两类方法各自的优缺点。在什么情况下某一类方法优于另一类方法?

本章对静定结构几种常见结构形式的受力分析和静定结构的受力分析方法分别进行了讨论,侧重于个性。关于静定结构的共性问题将在下面第11章进行综合性讨论。

§3-13　思考与讨论

§3-1　思考题

3-1　为什么对静定结构进行受力分析时,只需考虑平衡条件,而不需考虑变形条件?这样作出的受力分析的结果是否是唯一正确的结果?

3-2　如何根据内力的微分、积分关系对内力图进行校核?

3-3　用分段叠加法作弯矩图时,为什么要强调 M 图的叠加是指两个 M 图纵坐标的叠加,而不是两个 M 图图形的简单拼合?

§3-2　思考题

3-4　静定多跨梁当荷载作用在基本部分上时,对附属部分是否引起内力,为什么?

3-5　静定多跨梁的基本部分和附属部分的划分在有些情况下是否与所受的荷载有关系?

3-6　为什么说一般情况下,静定多跨梁的弯矩比一系列相应的简支梁的弯矩要小?

§3-3　思考题

3-7　刚架与梁相比,力学性能有什么不同?内力计算上有哪些异同?

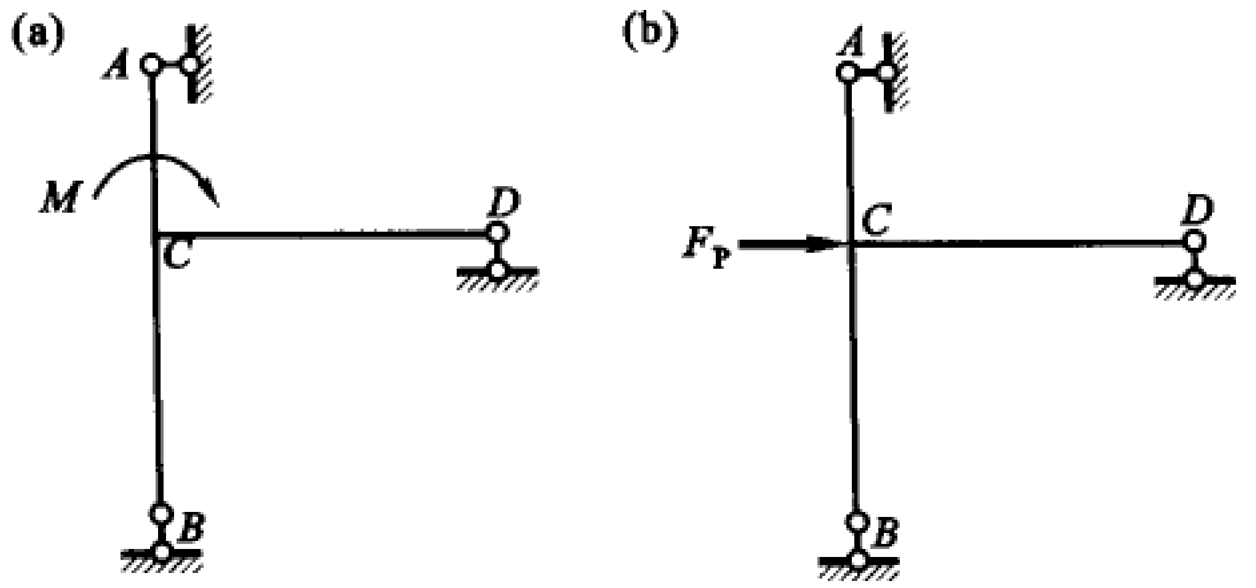
3-8　在图示刚架的刚结点处内力图有何特点?试列出图示刚架在结点 C 处各杆端内力应满足的关系式。

§3-4、§3-5　思考题

3-9　对于简单桁架和联合桁架,怎样利用桁架几何构造的特点简化计算,以避免解联立方程?

3-10　试由合力 F_N 与分力 F_x、F_y 之间的三角函数关系推出式(3-4)。

3-11　什么称为结点单杆和截面单杆?它们各有什么特点?在桁架的计算中它们各



思考题 3－8 图

有什么用处？

3－12 组合结构的计算与桁架的计算有什么不同？应注意哪些特点？

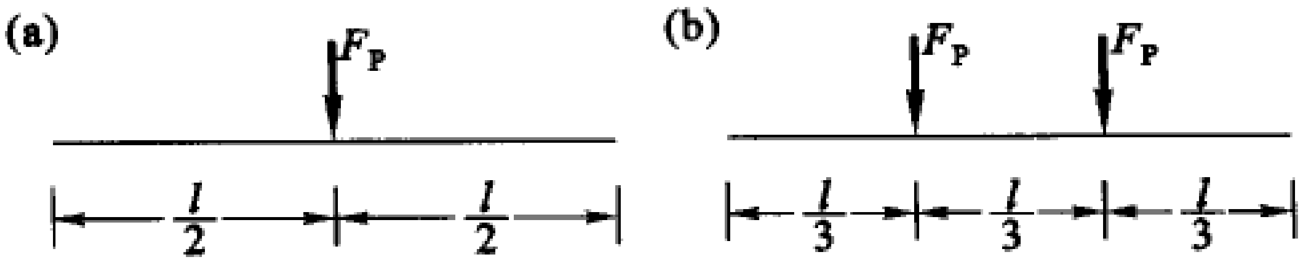
§3－6 思考题

3－13 在图 3－44 中吊杆起什么作用？

3－14 三铰拱式屋架常加拉杆，为什么？

3－15 能利用拱的反力和内力的计算公式求三铰刚架的反力和内力吗？

3－16 什么是拱的合理轴线？试求思考题 3－16 图所示荷载作用下三铰拱的合理轴线。拱高对合理轴线有无影响？



思考题 3－16 图

§3－7 思考题

3－17 按照"后搭的先拆"这个原则，试对习题 2－2 图 a、b、c 所示体系确定截取隔离体的合理顺序（结点荷载可任意给定，对图 c 体系可补充三根不共线的支杆）。又图 c 所示体系是否能维持平衡？

3－18 按照"后搭的先拆"这个原则，试对习题 2－3 图 a、b 所示体系确定截取隔离体的合理顺序（图 a 的结点荷载可任意给定，图 b 的荷载应为平衡力系）。

3－19 对习题 2－6 图 a、b、c 所示静定刚架进行受力分析，确定截取隔离体的合理顺序（荷载可任意给定）。

§3－8 思考题

3－20 应用虚功法求静定结构某一约束力 F_X 时，为什么必须撤去与 F_X 相应的约束，代之以未知的力 F_X？

3－21 应用虚功法求静定结构约束力时，是否可以同时撤去多个约束？这时虚功方程中一般含有几个未知力？可以得出几个独立的平衡方程？

3－22 求三铰拱的四个支座反力 F_{xA}、F_{yA}、F_{xB}、F_{yB}时，通常应用下列四个平衡方程，即

三个整体平衡方程：

(1) $\sum F_x = 0$。

(2) $\sum M_A = 0$。

(3) $\sum M_B = 0$。

以及铰 C 处弯矩为零的方程：

(4) $M_C = 0$。

如果采用虚功法来建立上述四个平衡方程，则四种相应的虚位移状态应如何选取？

综合思考讨论题

3-23 怎样提高静定结构计算的解题能力和解题的速度？结合静定梁、静定刚架、静定桁架、组合结构及三铰拱等多种结构形式自己进行这方面的总结，以增强自己的能力。

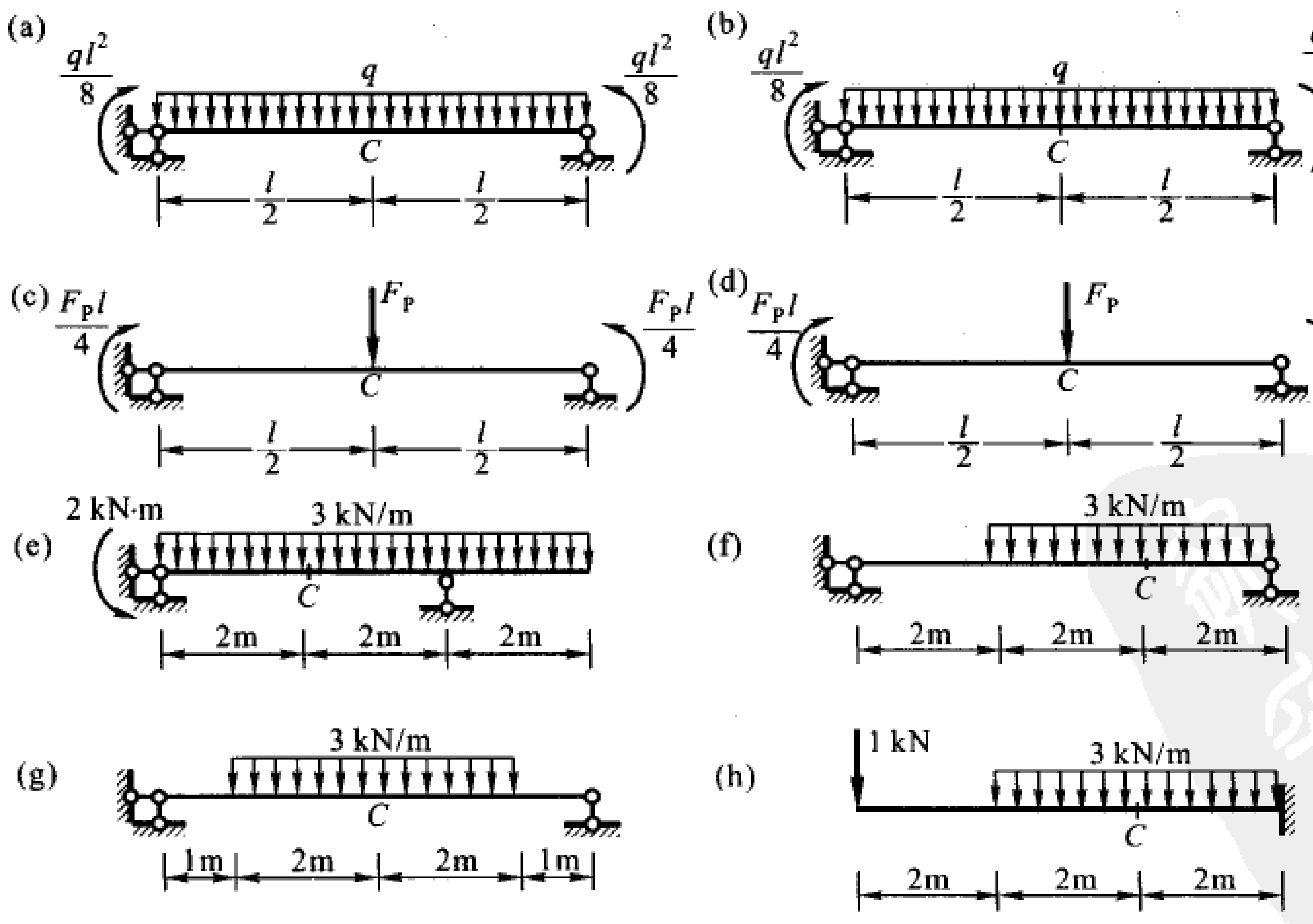
3-24 前一章讲的几何构造分析在本章中有哪些具体的应用？举例加以说明并总结出应用了几何构造分析的知识之后的效果。

3-25 本章中哪些地方应用了叠加原理？叠加原理在什么条件下可以应用，什么条件下不能应用。

3-26 怎样判断计算静定结构解答的正确性？

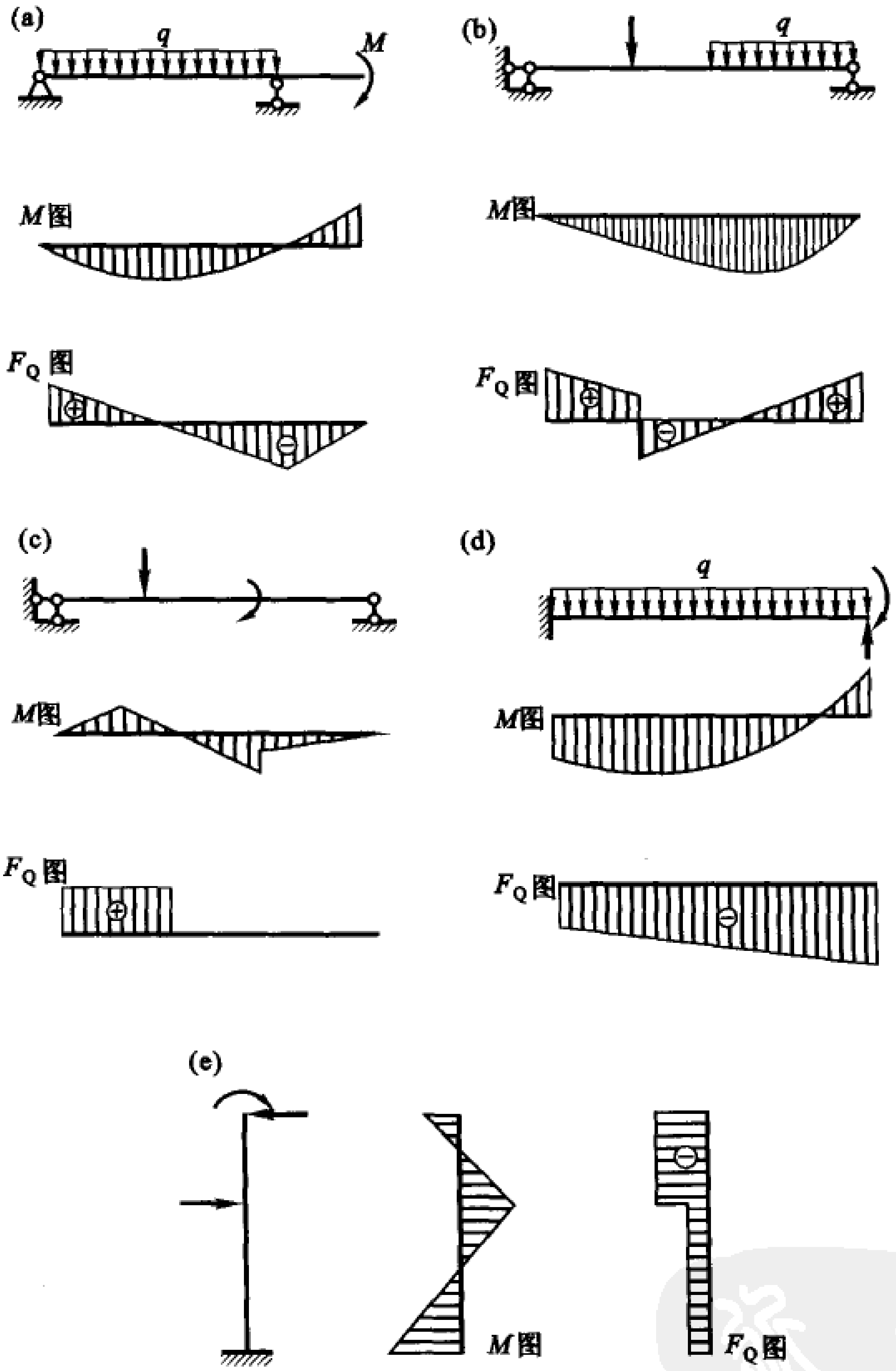
习　　题

3-1 试用分段叠加法作下列梁的 M 图。



题 3-1 图

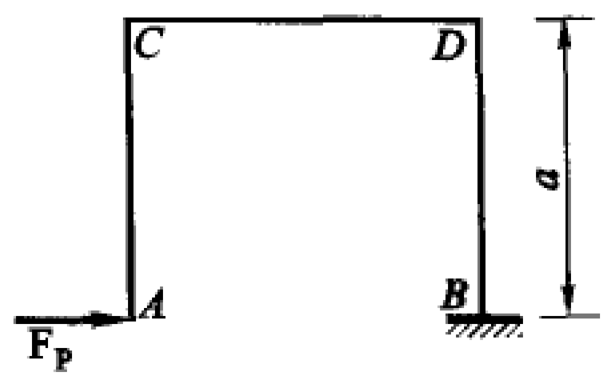
3－2 试判断内力图正确与否，将错误改正。



题 3－2 图

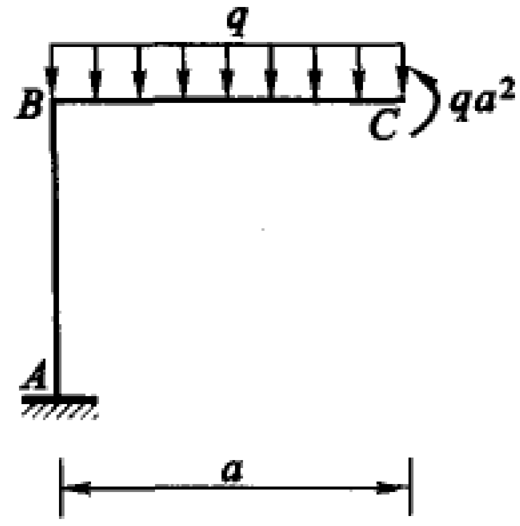
3-3　试速画 M 图。图下的提示说明供自我检查之用，作图前先不要查阅。

(a)



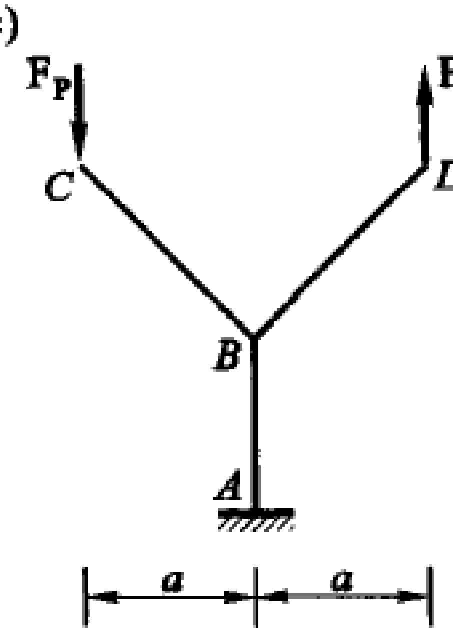
注意 F_P 通过 B，$M_B=0$

(b)



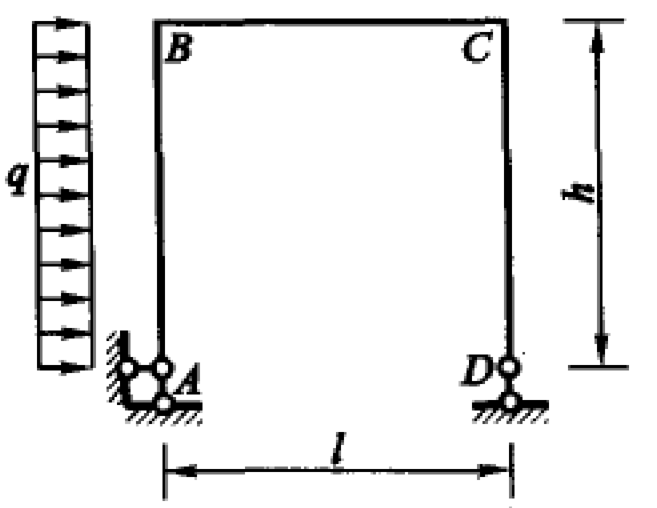
注意 C 有集中力偶荷载

(c)



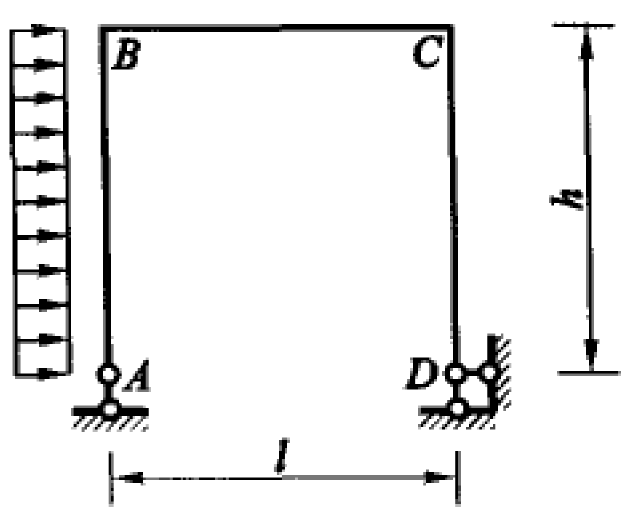
注意 B 结点的平衡

(d)



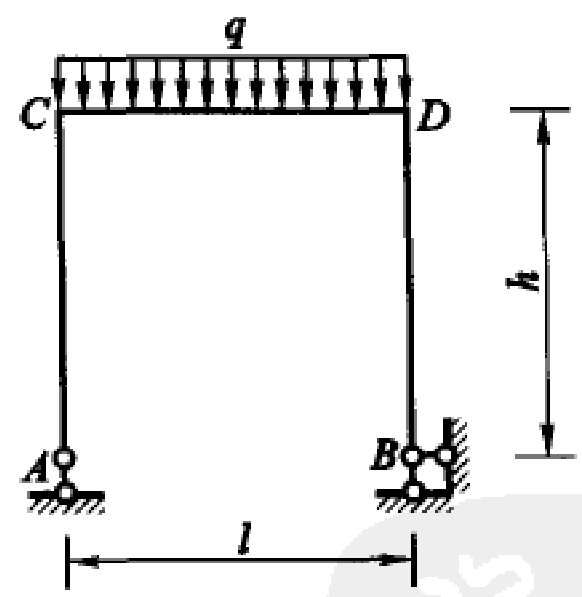
注意 D 无水平反力，CD 杆 M 图的特点，AB 段 M 图弧形朝向

(e)



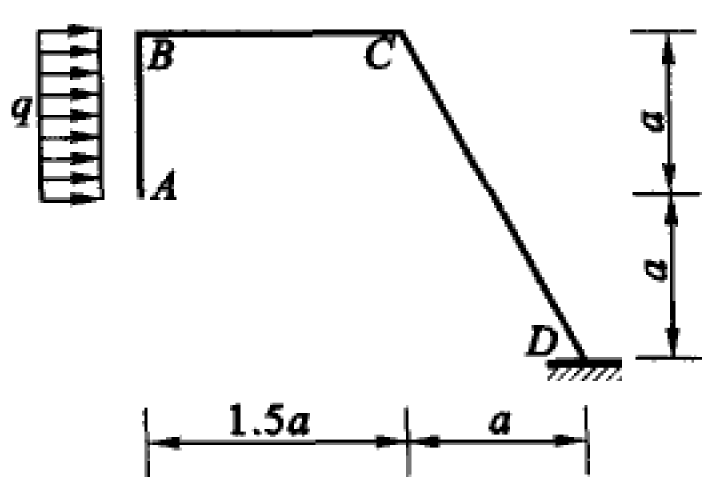
注意 M 图在 A 点的切线方向

(f)



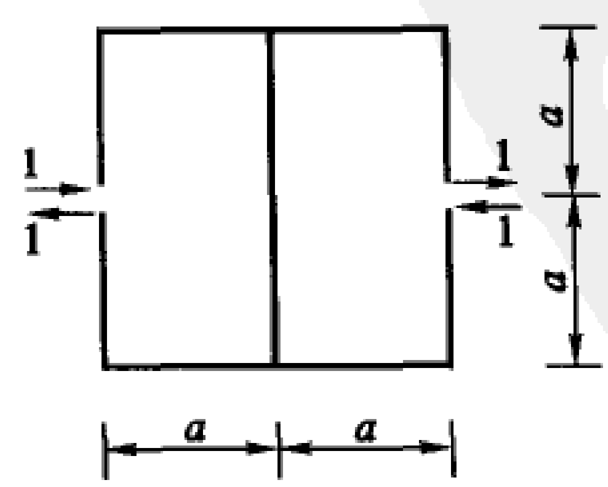
注意 A、B 无水平反力，$M_C=M_D=0$

(g)

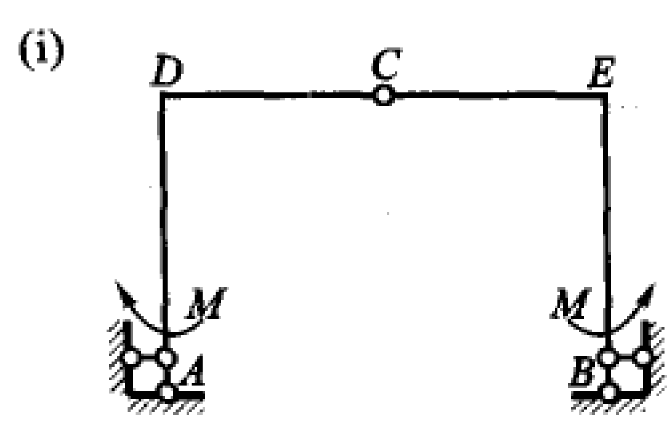


注意 CD 杆何处 $M=0$，CD 杆 M 的标距垂直 CD

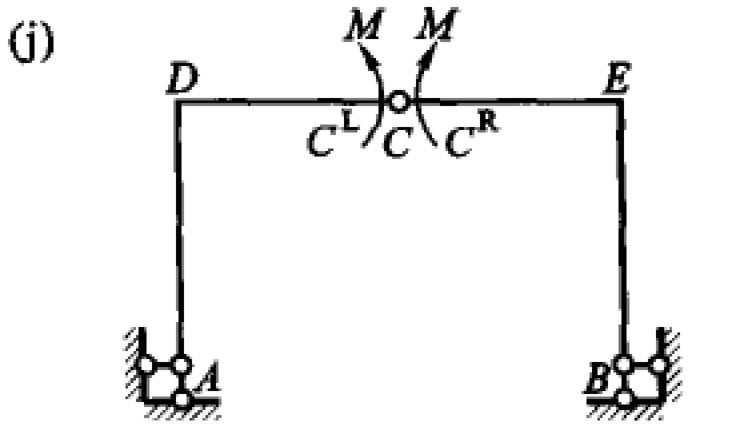
(h)



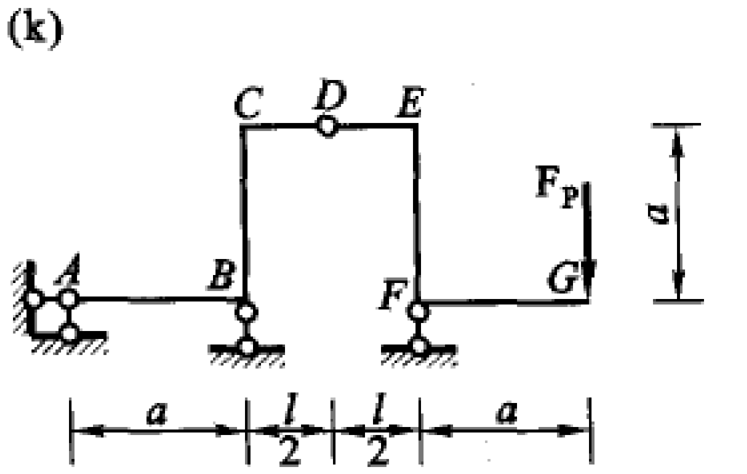
注意三杆刚结点的平衡



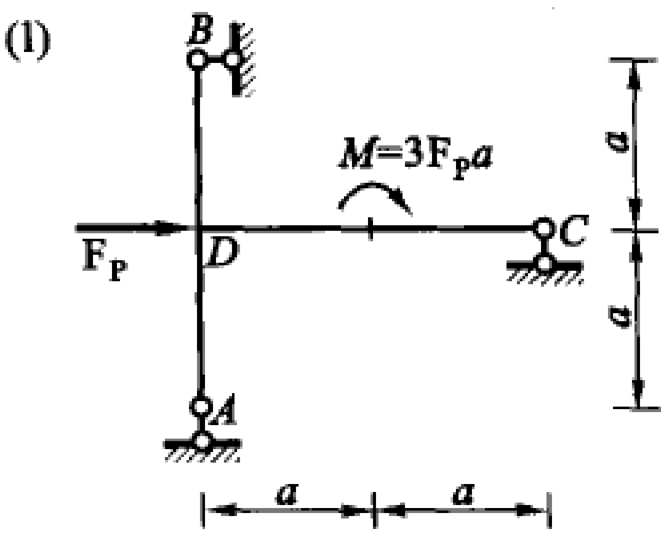
注意 M 图的对称性



C^L、C、C^R 三截面处的 M 各为多少



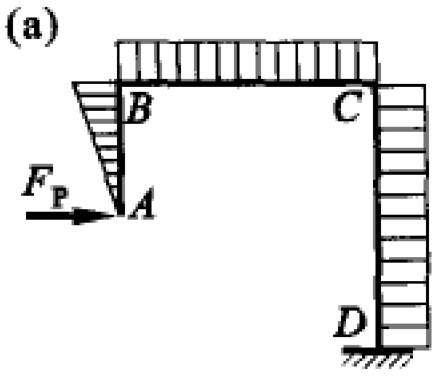
注意结点 B、F 处 M 特点，分清基本部分与附属部分。可不求反力



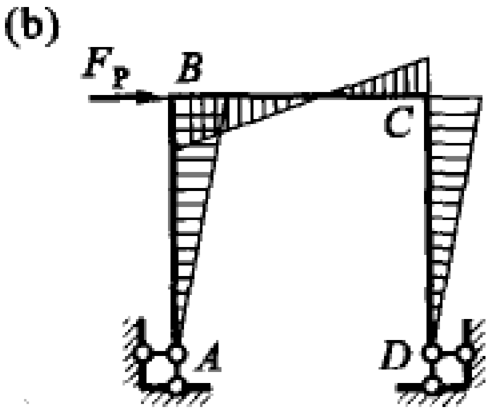
注意 AD 杆弯矩特点

题 3－3 图

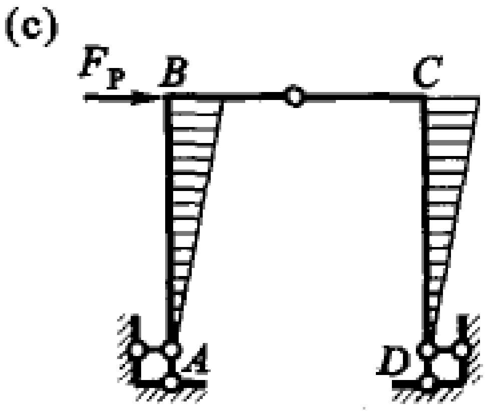
3－4　试检查图示 M 图的正误，并加以改正。检查前先不要看图下的提示说明。



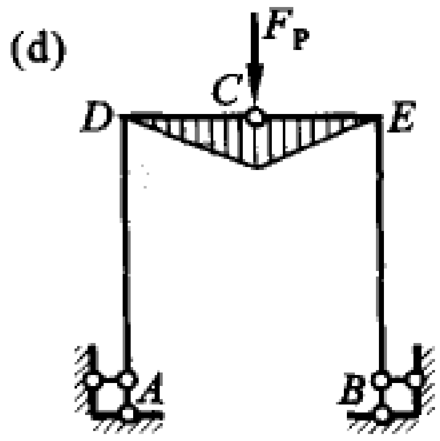
CD 杆上有弯矩零点（F_P 通过处）



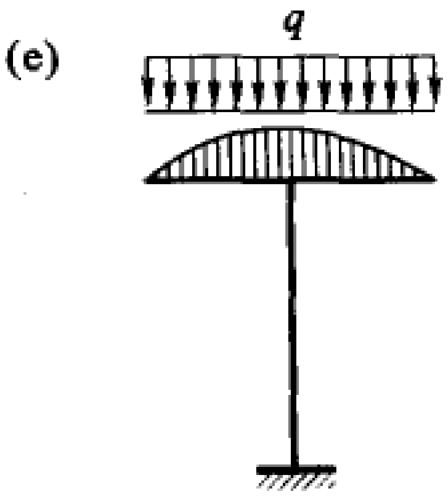
D 点无水平反力，$M_C=0$



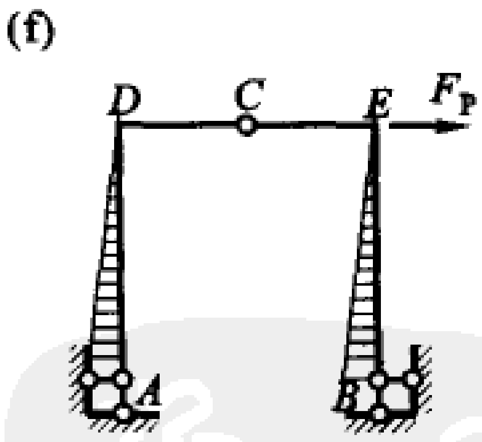
B、C 结点不平衡



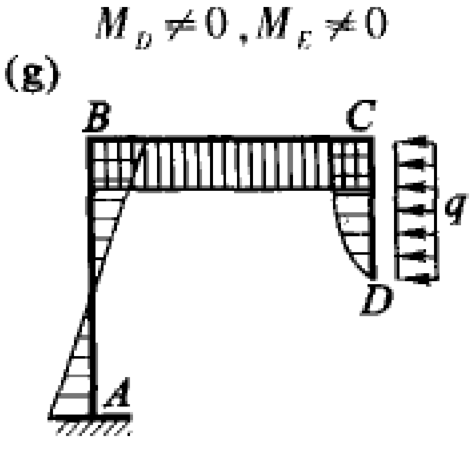
$M_C=0$，
A、B 有水平反力，
$M_D\neq 0$，$M_E\neq 0$



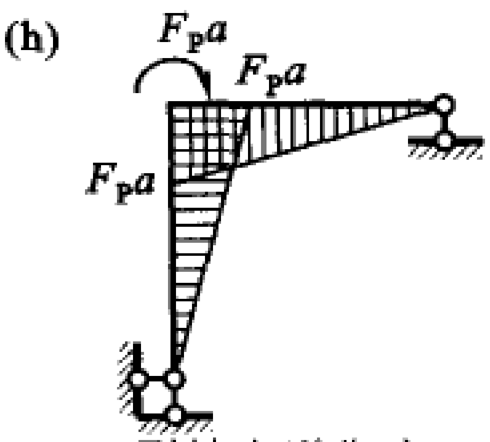
曲线凸出方向



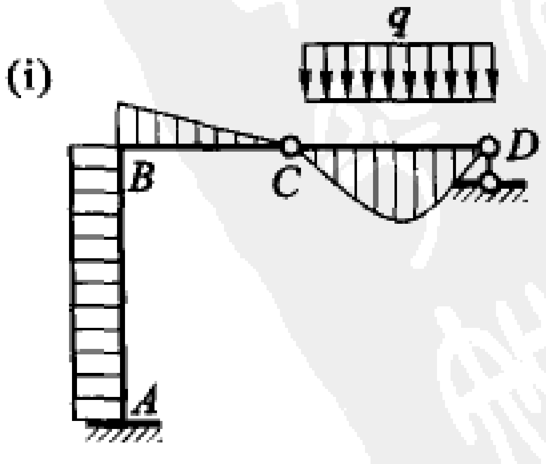
$M_A=M_B=0$



各杆哪一侧受拉？
AB 杆弯矩零点位置



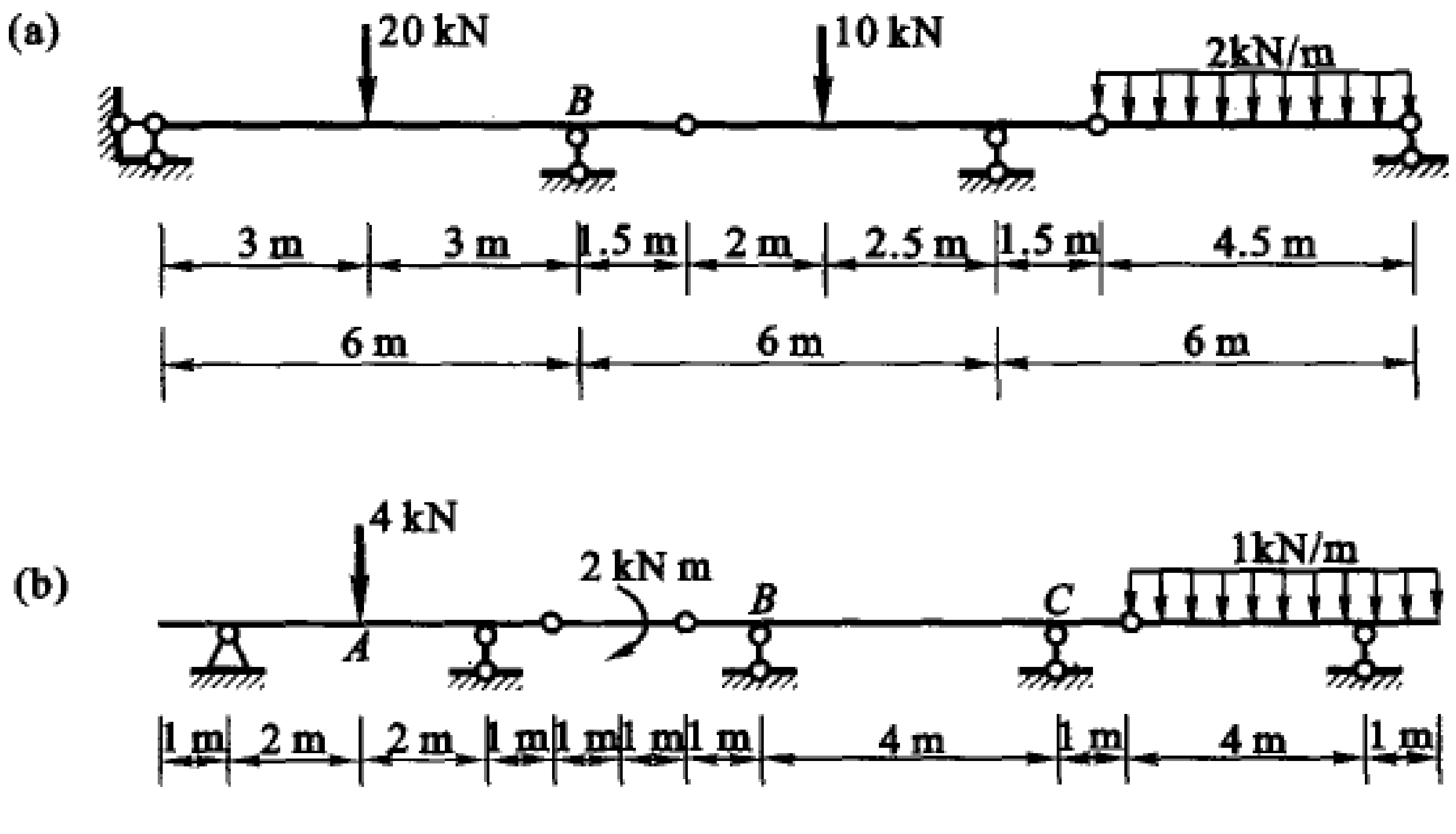
刚结点平衡应包含外力偶



C 点右侧的曲线斜率应与左侧直线斜率相同

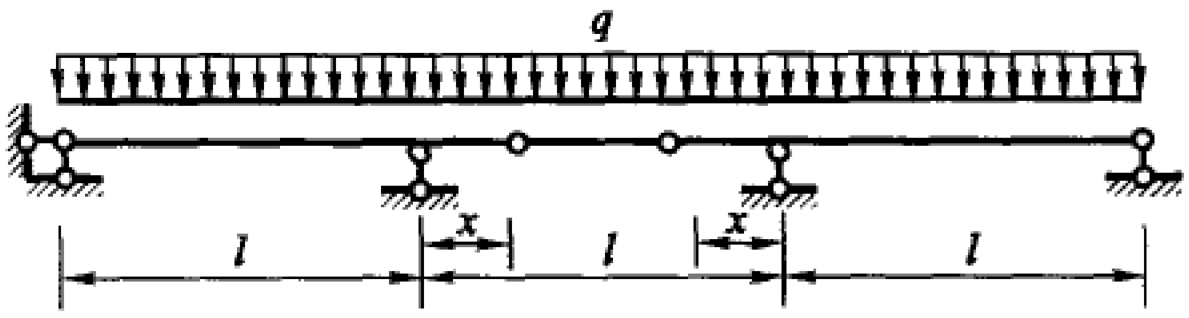
题 3－4 图

3－5　试求图示梁的支座反力，并作其的内力图。



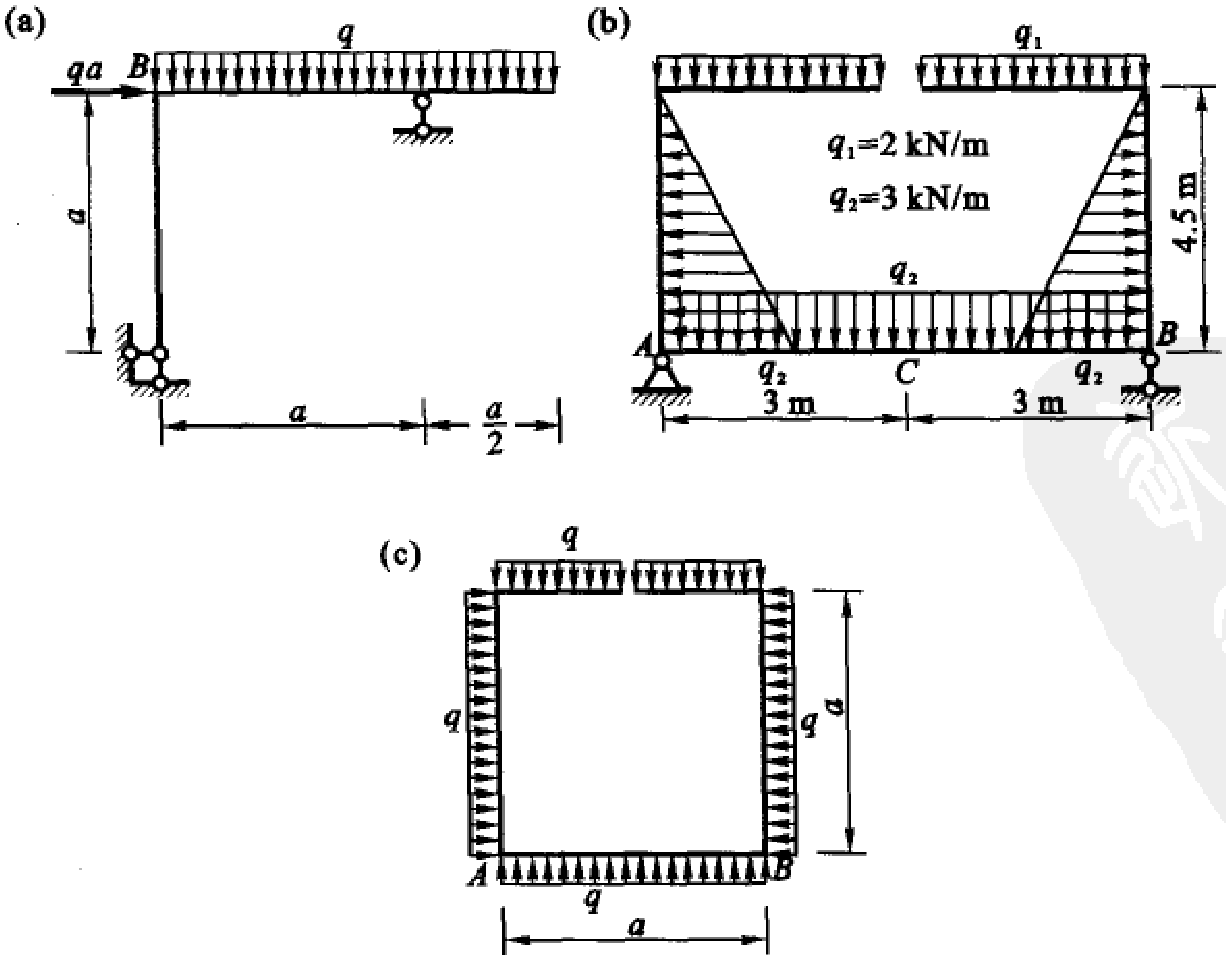
题 3－5 图

3－6　试选择图示梁中铰的位置 x，使中间一跨的跨中弯矩与支座弯矩绝对值相等。



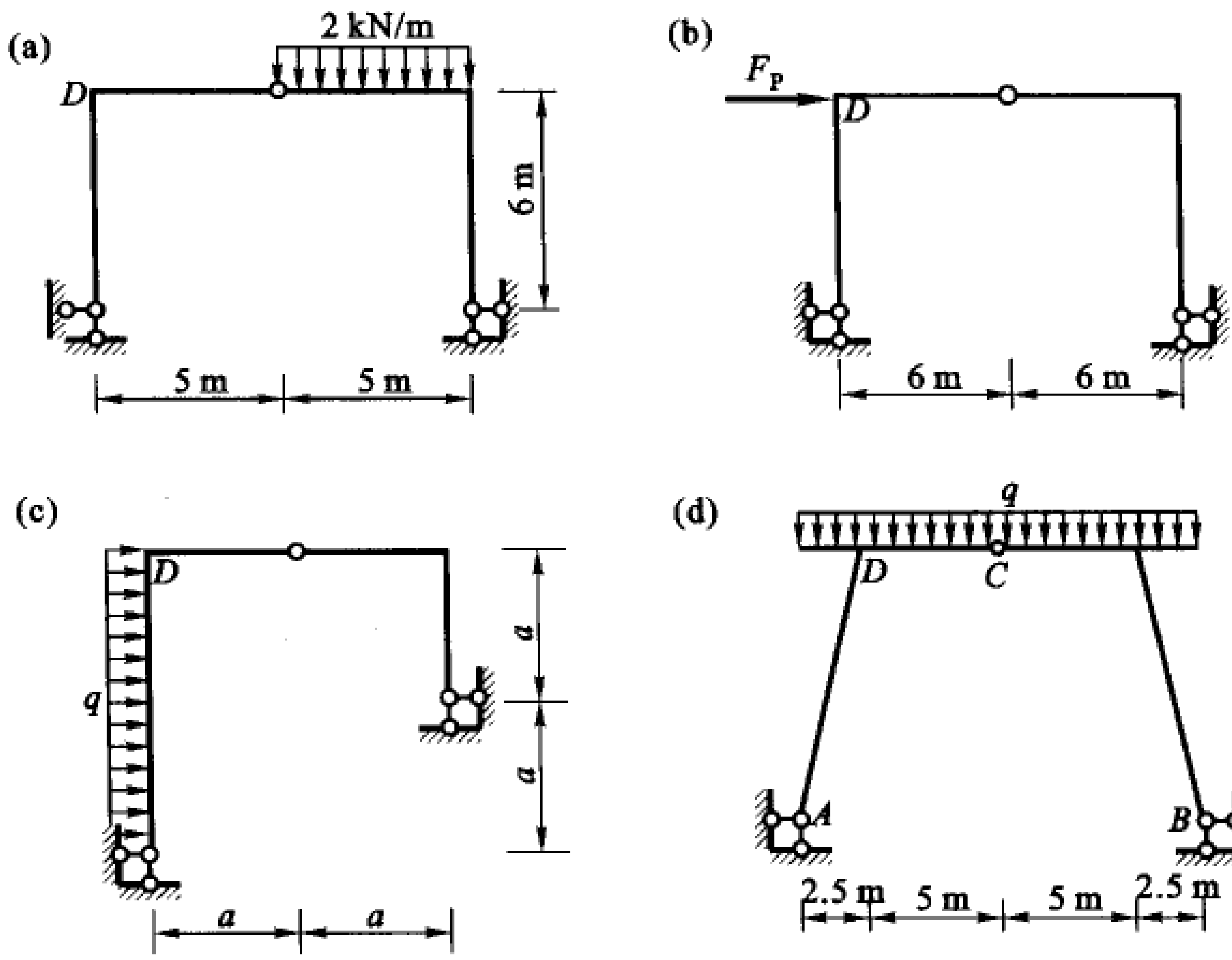
题 3－6 图

3－7　试作图示刚架的内力图。



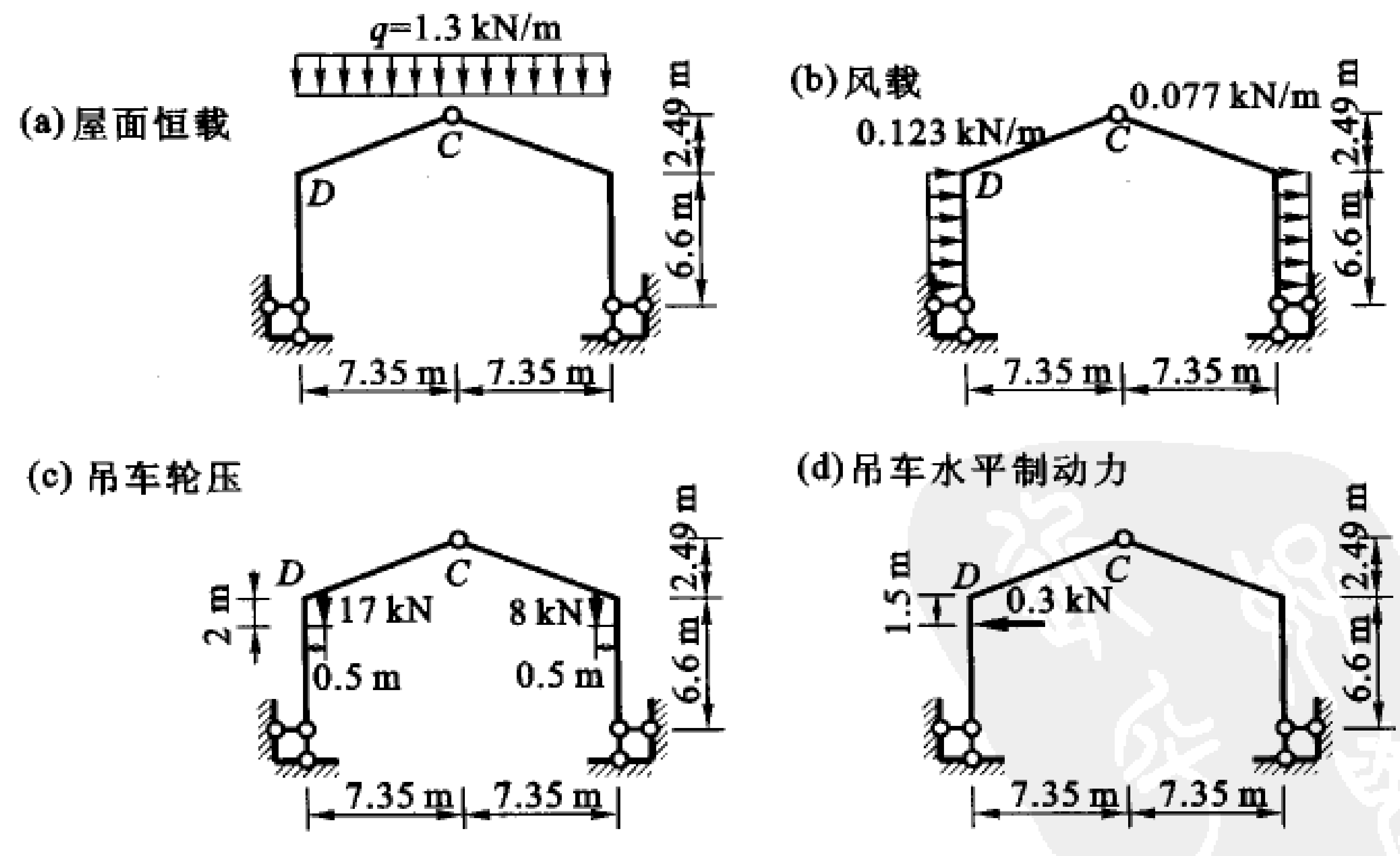
题 3－7 图

3-8　试作图示三铰刚架的内力图。



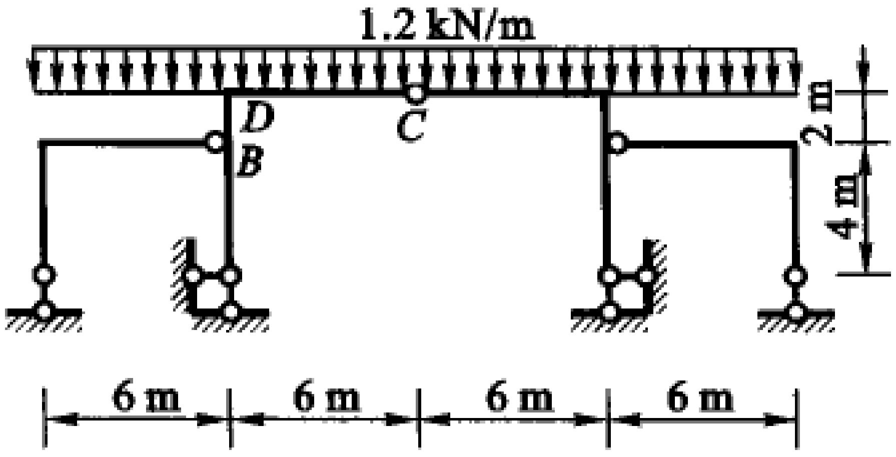
题 3-8 图

3-9　试求图示门式刚架在各种荷载作用下的弯矩图，并作图 a 刚架的 F_Q图和 F_N图。



题 3-9 图

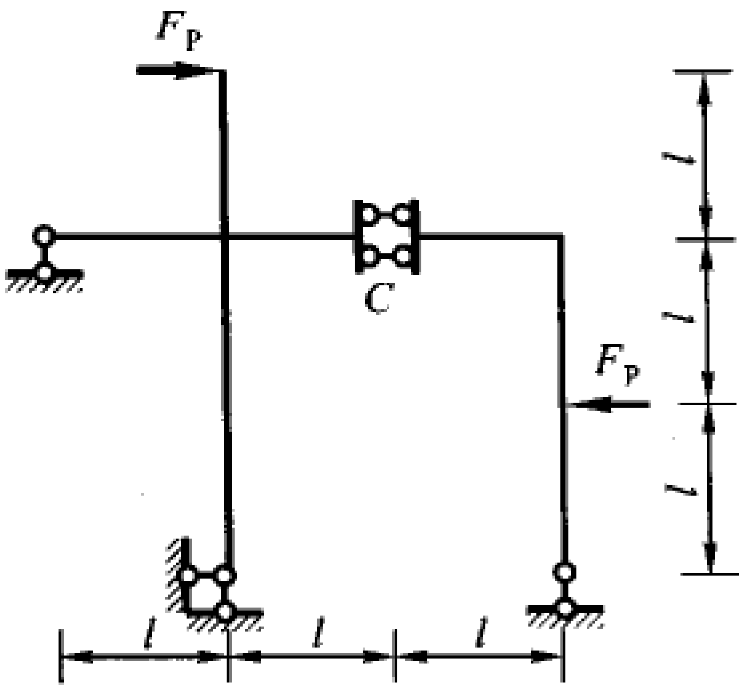
3-10　试对图示刚架进行构造分析，并作 M 图。



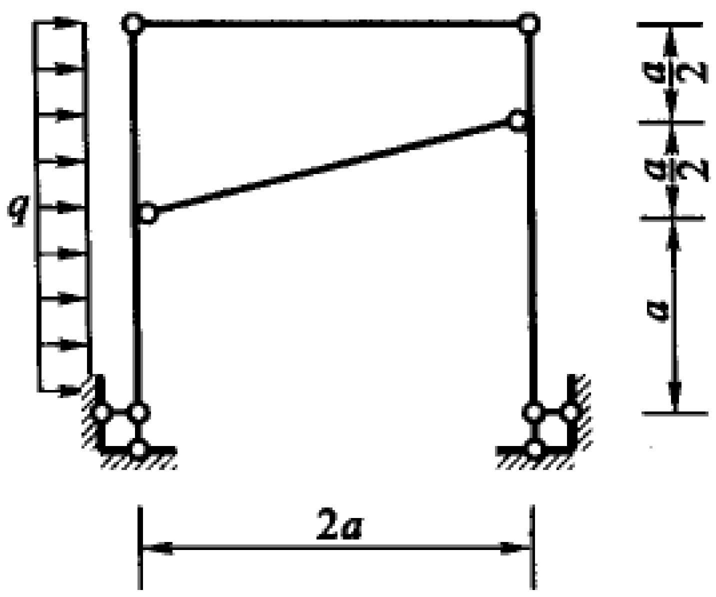
题 3－10 图

3－11　试作图示刚架的弯矩图。

3－12　试求图示刚架的支座反力。



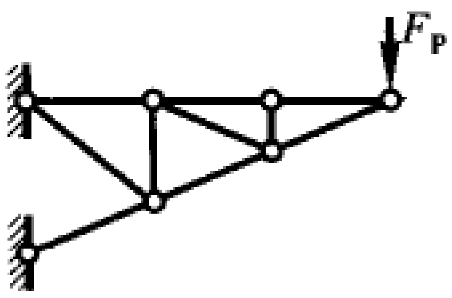
题 3－11 图



题 3－12 图

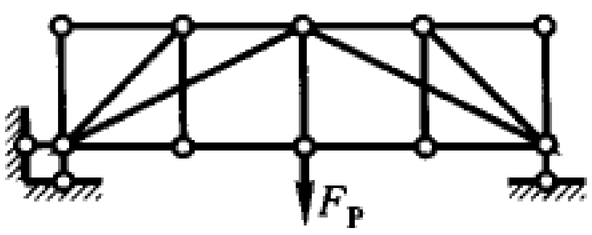
3－13　试分析图示桁架的类型，指出零杆。

(a)



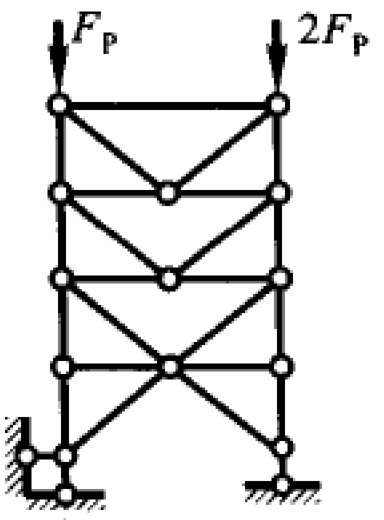
简单桁架，有 4 根零杆

(b)



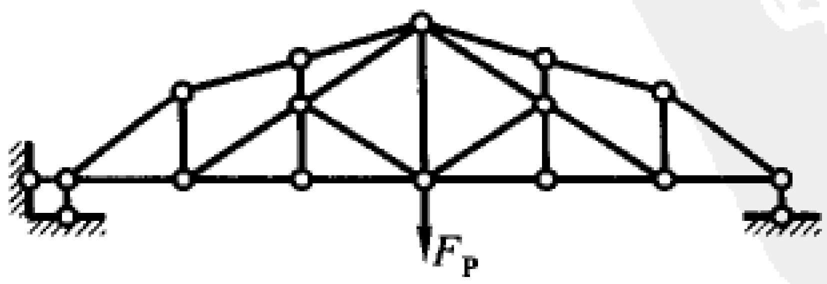
联合桁架，有 10 根零杆

(c)

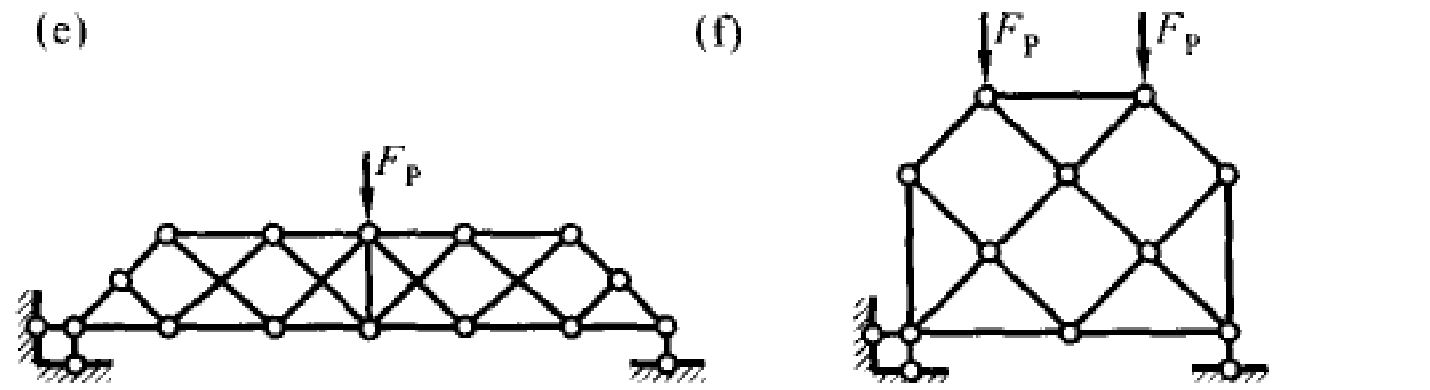


简单桁架，15 根零杆

(d)



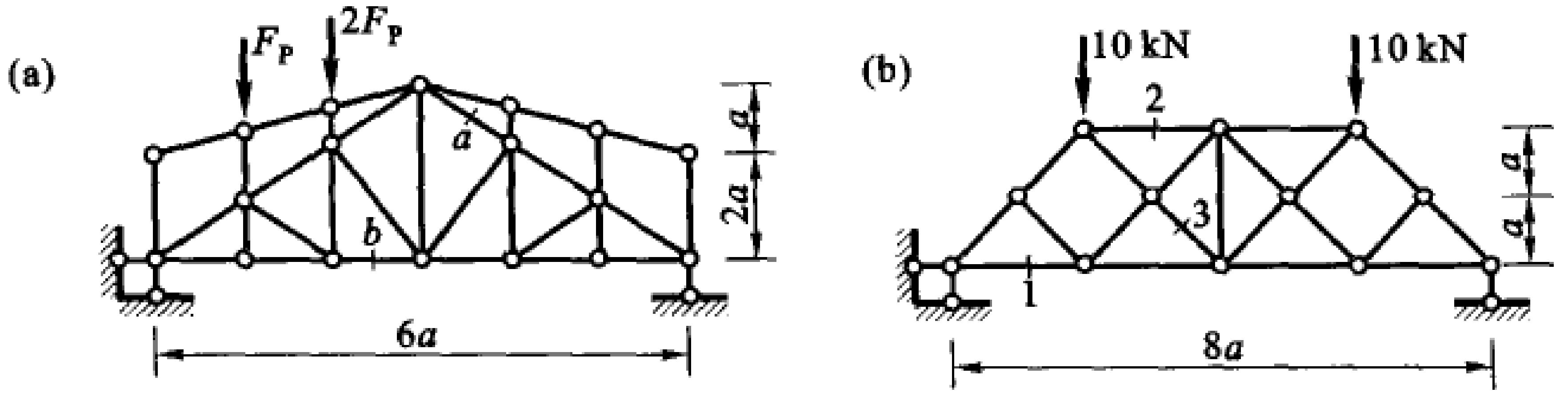
简单桁架，6 根零杆



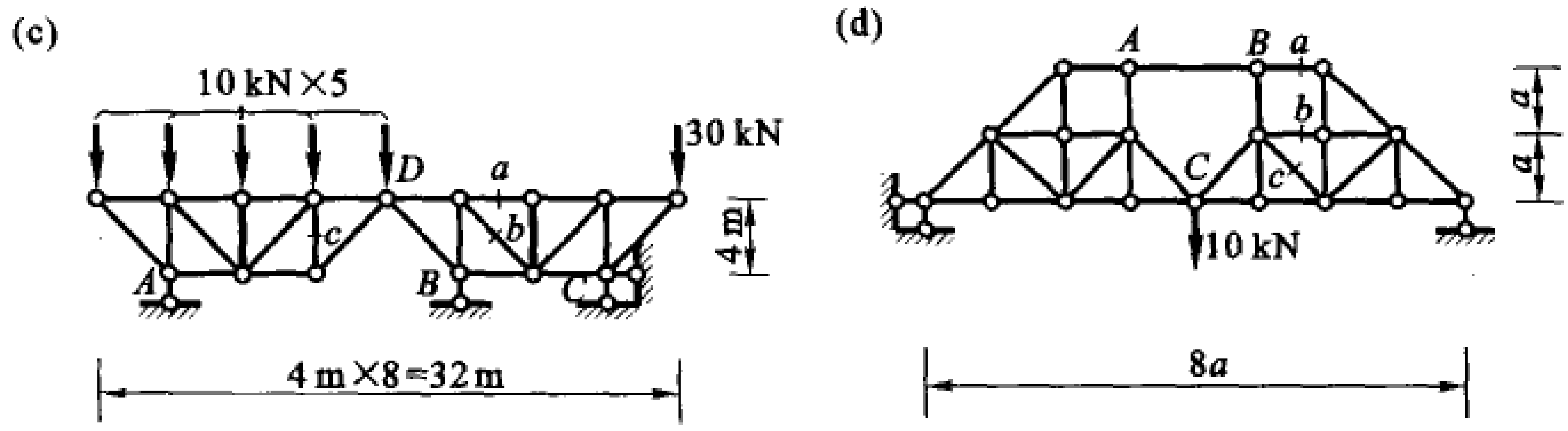
简单桁架,7 根零杆　　　复杂桁架,利用对称性,8 根零杆

题 3－13 图

3－14 试讨论图示桁架中指定杆内力的求法。



先求零杆,再作截面　　　先找零杆,再作截面



分清基本部分和附属部分,
先从附属部分开始

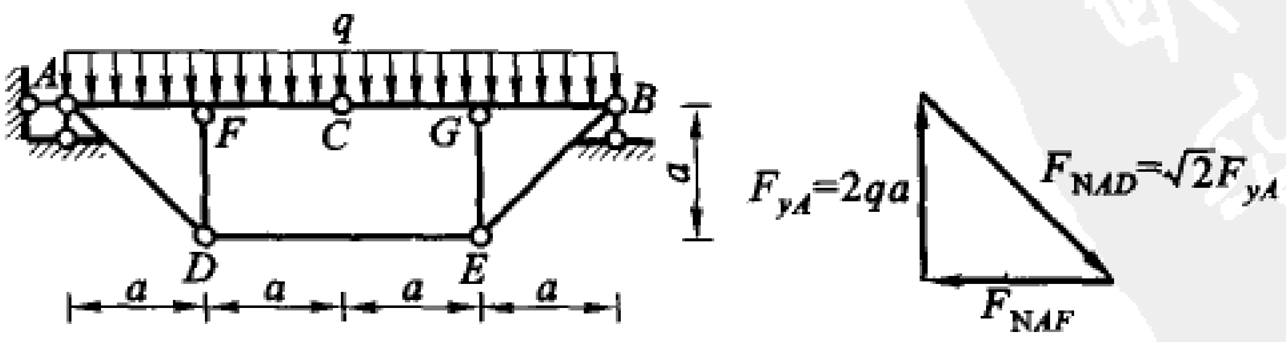
联合桁架,先求联合桁架,
中的联系杆 AB 的内力

题 3－14 图

3－15 在图示的组合结构中,试问:

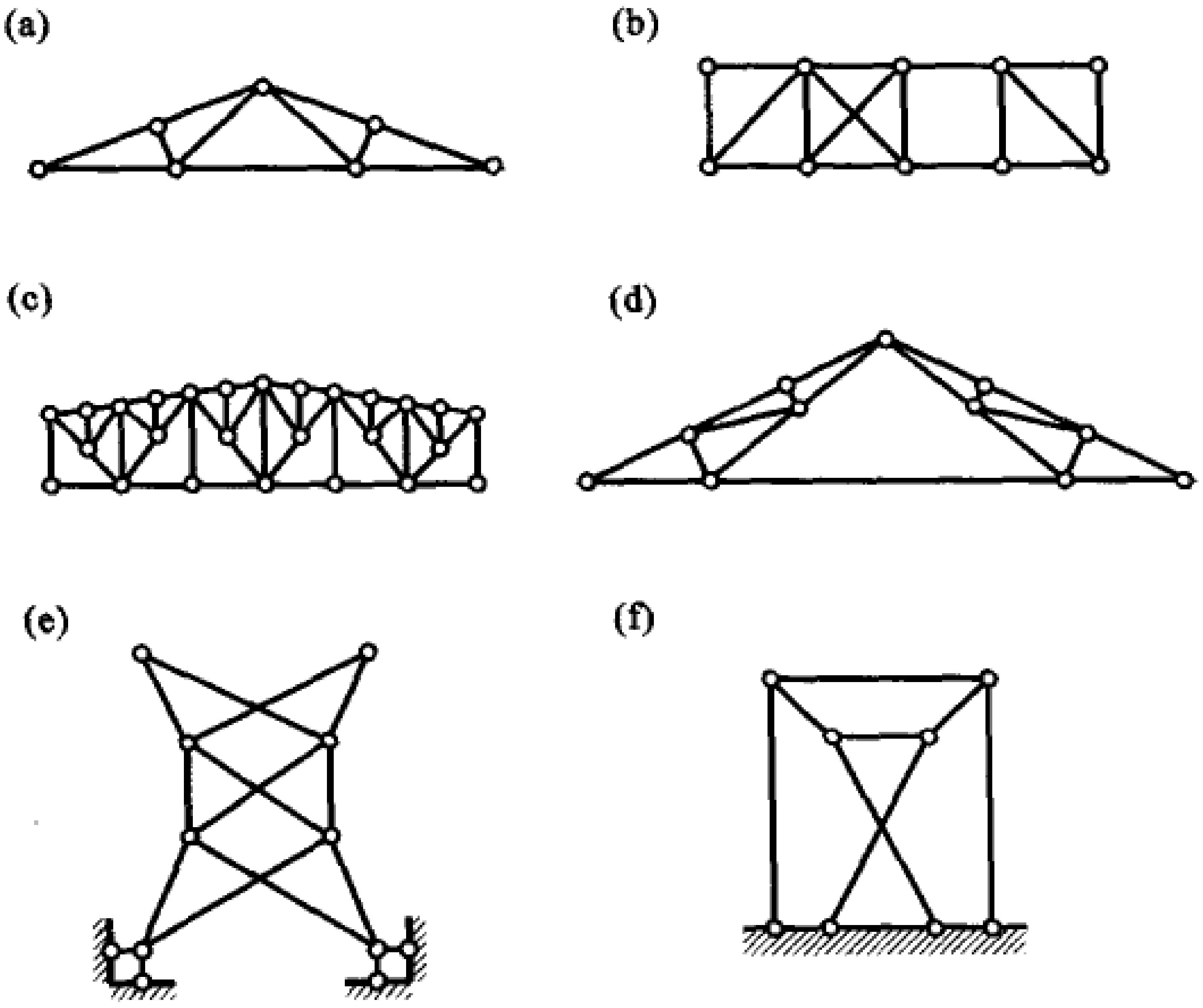
(a) DF 是零杆? 对吗? 为什么?

(b) 取结点 A,用结点法计算 AD、AF 的轴力,得 $F_{NAD}=2\sqrt{2}qa$,$F_{NAF}=-2qa$,这样做对吗? 为什么?



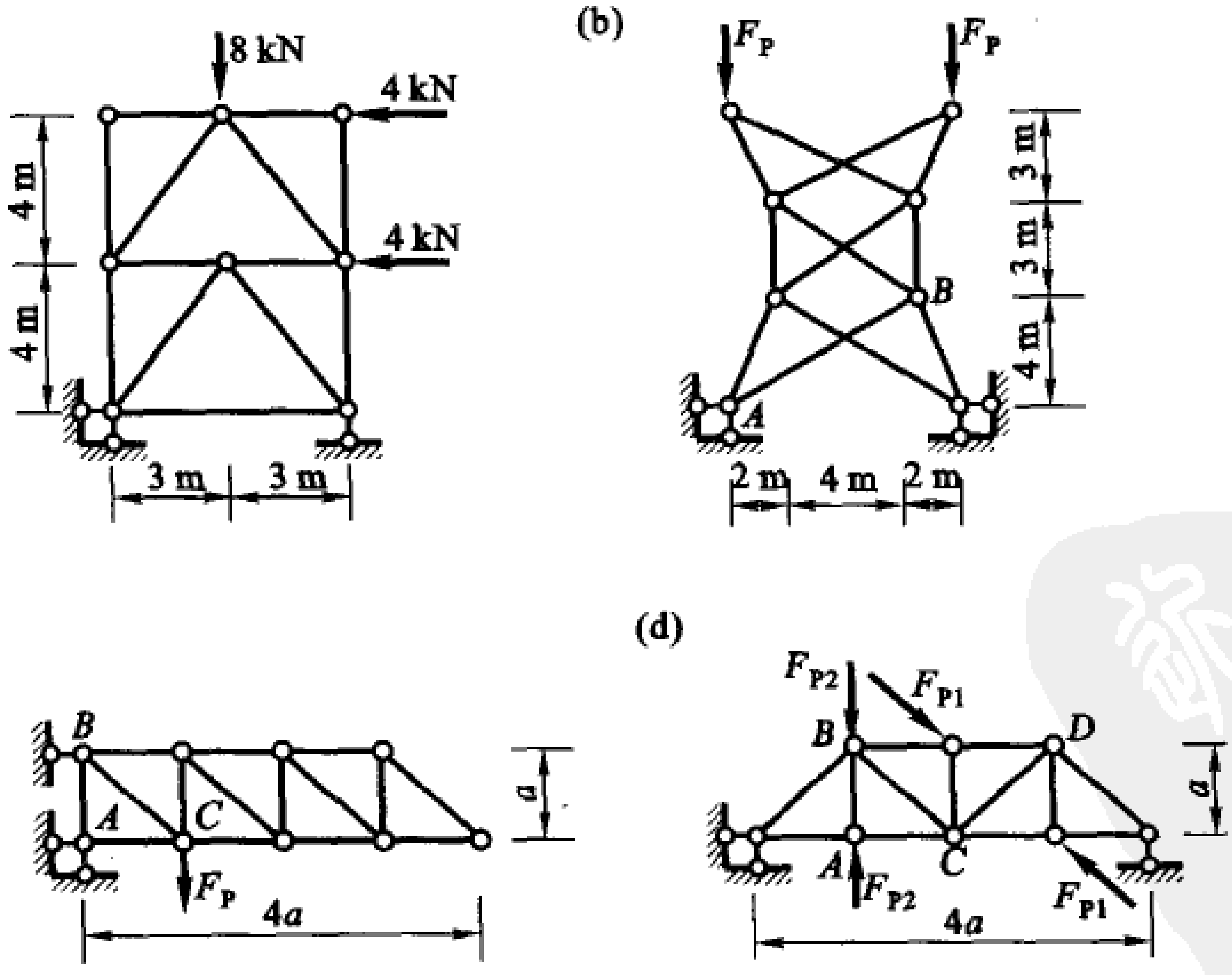
题 3－15 图

3－16 试分析图示桁架的几何构造,确定是否几何不变?



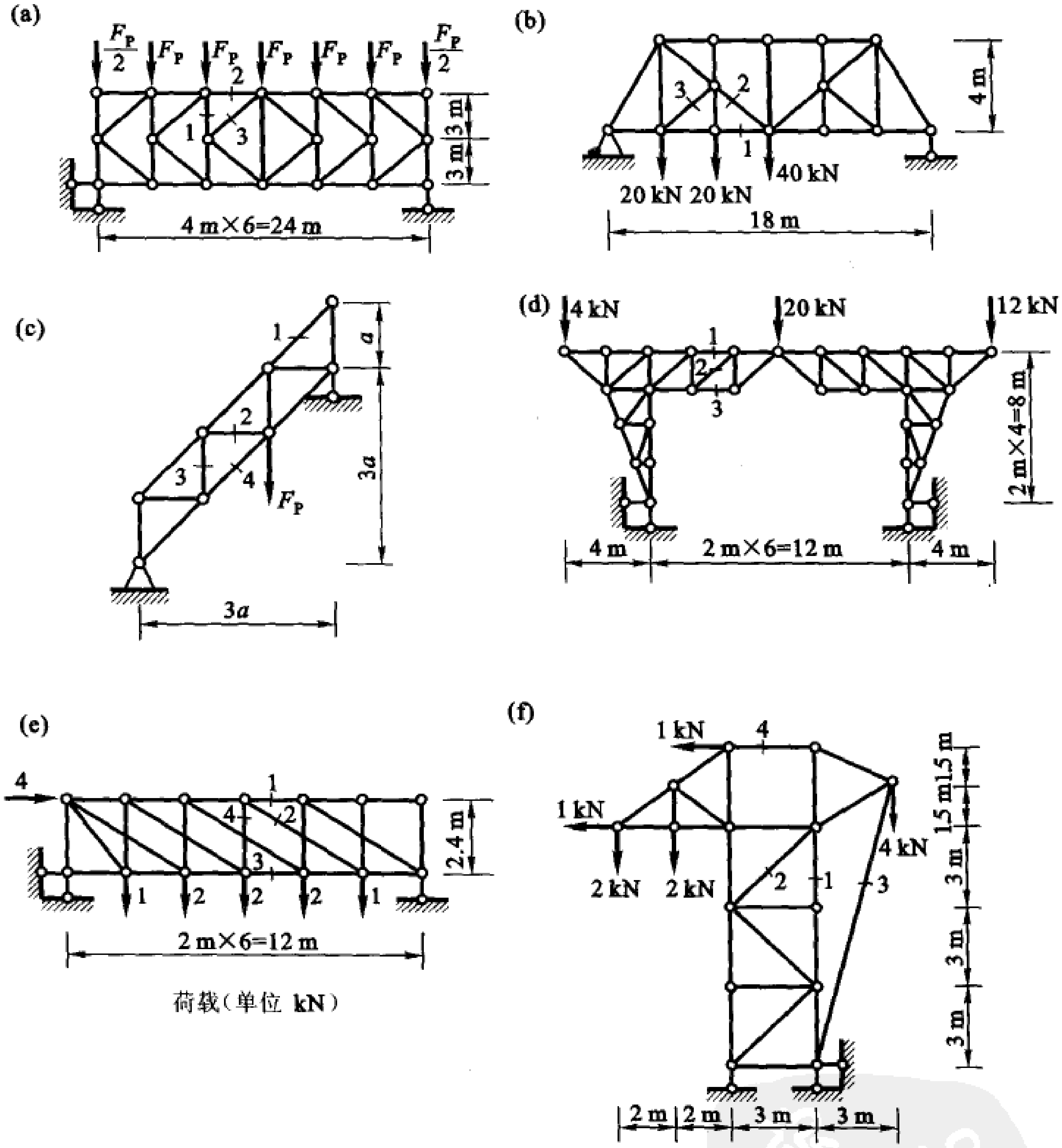
题 3－16 图

3－17　试用结点法或截面法求图示桁架各杆的轴力。



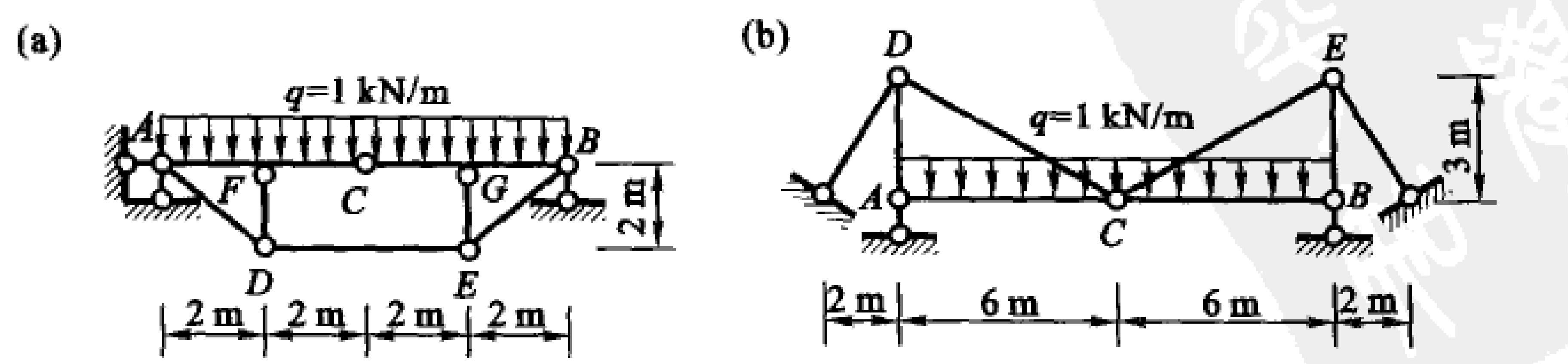
题 3－17 图

3－18　试求图示各桁架中指定杆的内力。



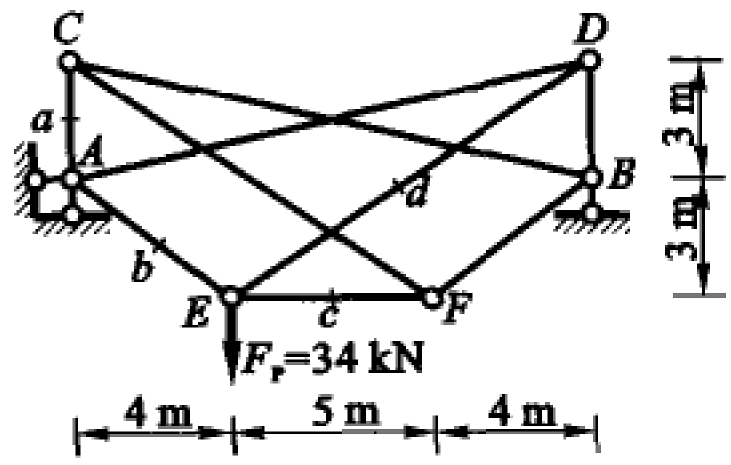
题 3－18 图

3－19 试作图示组合结构的内力图。



题 3－19 图

3－20 试求桁架杆 a、b、c、d 的轴力



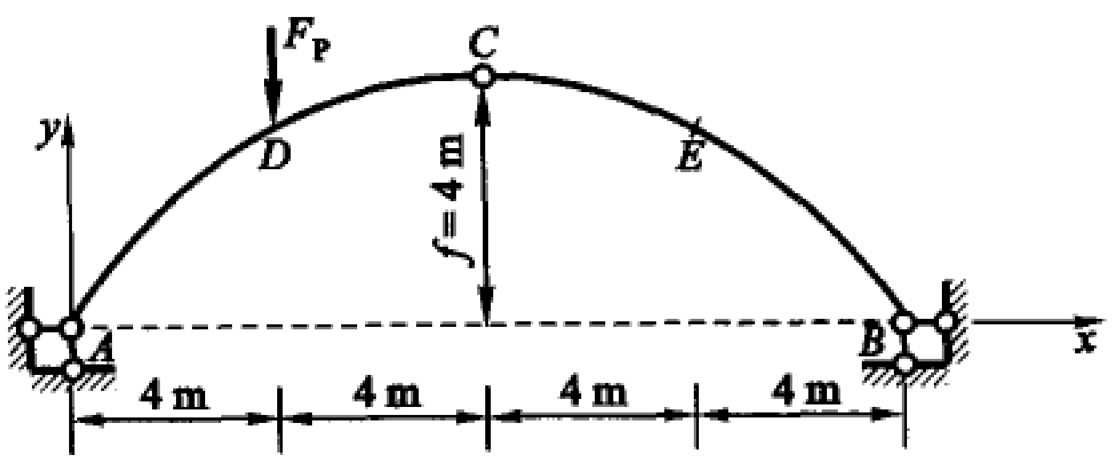
题 3－20 图

3－21　图示抛物线三铰拱轴线的方程为 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$，$l=16$ m，$f=4$ m。试：

(a) 求支座反力。

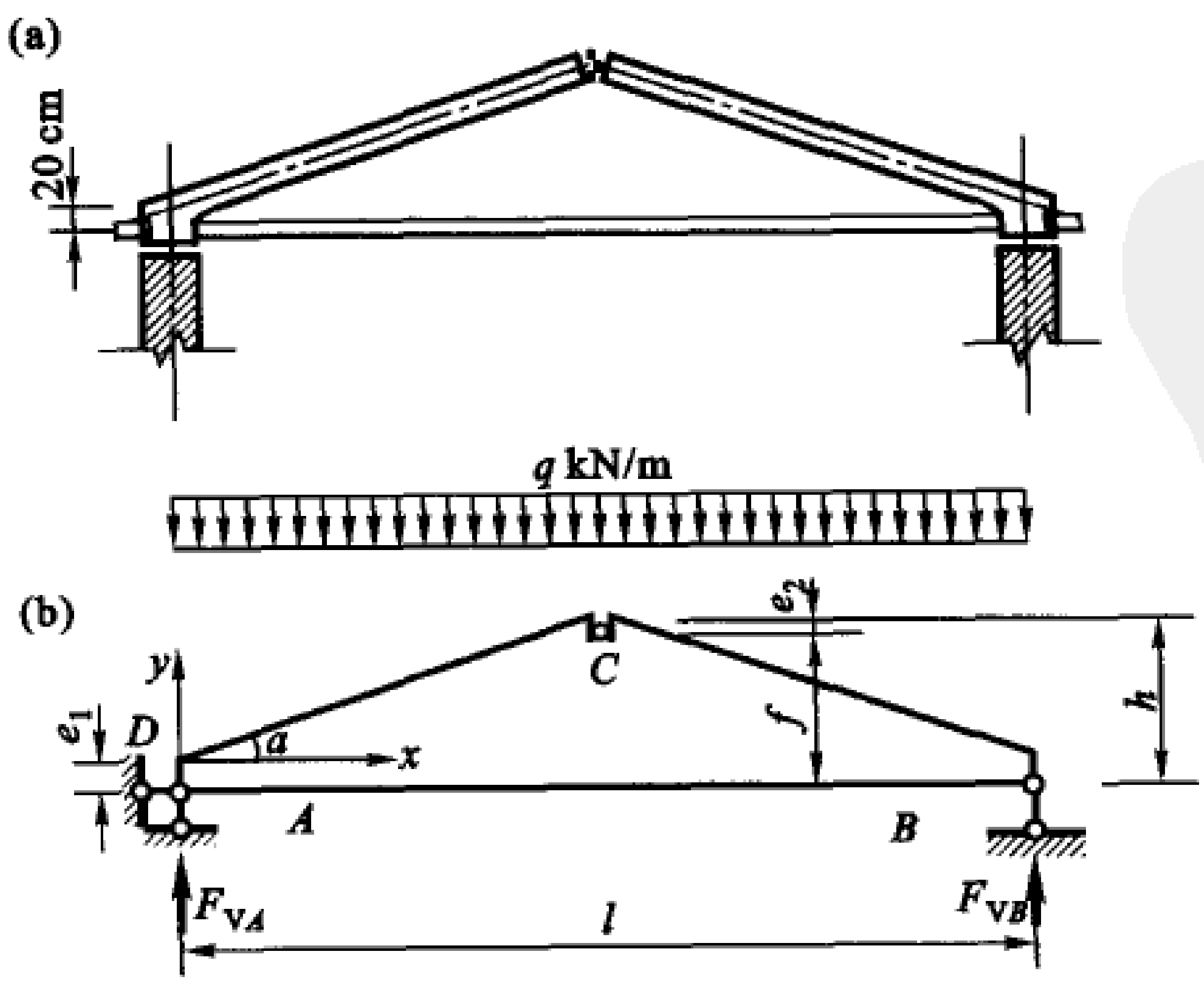
(b) 求截面 E 的 M、F_N、F_Q值。

(c) 求 D 点左右两侧截面的 F_Q、F_N值。



题 3－21 图

3－22　图 a 所示为一三铰拱式屋架。上弦通常用钢筋混凝土或预应力混凝土，拉杆用角钢或圆钢，结点不在上弦杆的轴线上而有偏心。图 b 为其计算简图。设 $l=12$ m，$h=2.2$ m，$e_1=0.2$ m，$e_2=0$，$q=1.2$ kN/m。试求支座反力和内力。



题 3－22 图

3-23　图示一三铰刚架，在所示荷载作用下，试：

(a) 求支座反力。

(b) 求截面 D 和 E 的弯矩。

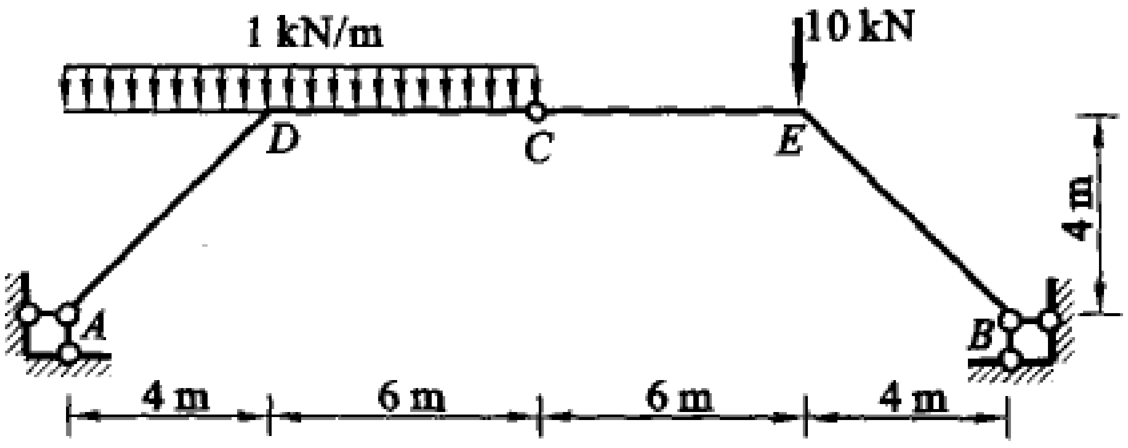
(c) 画出压力线的大致形状。

3-24　图示一抛物线三铰拱，铰 C 位于抛物线的顶点和最高点。试：

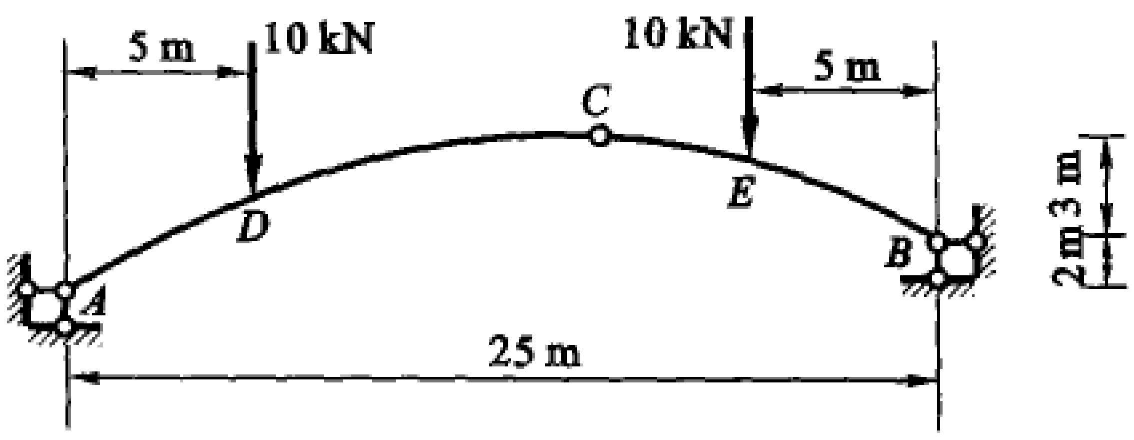
(a) 求由铰 C 到支座 A 的水平距离。

(b) 求支座反力。

(c) 求 D 点处的弯矩。



题 3-23 图



题 3-24 图

3-25　参见习题 3-21 中的三铰拱，试问：

(a) 如果改变拱高(设 $f=8$ m)，支座反力和弯矩有何变化？

(b) 如果拱高和跨度同时改变，但高跨比 $\frac{f}{l}$ 保持不变，支座反力和弯矩有何变化？

3-26　试求图示桁架指定杆的内力。

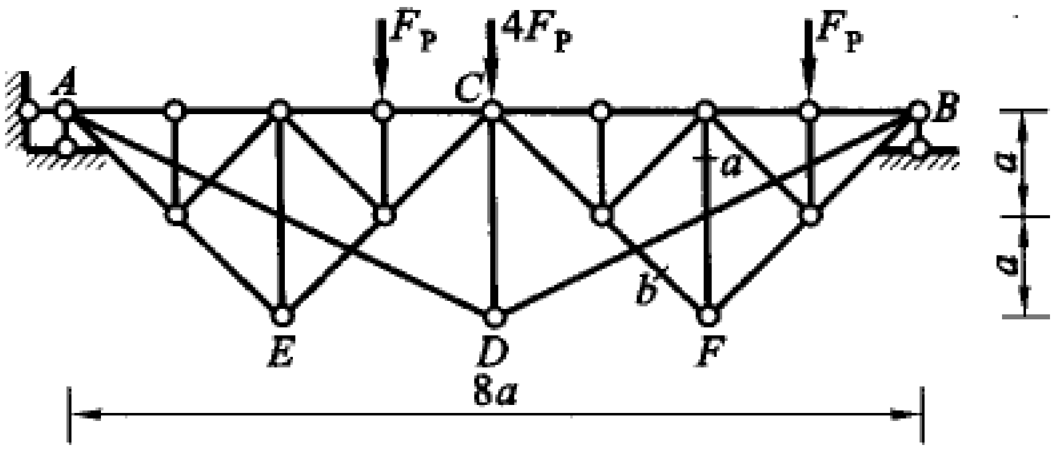
3-27　用虚功原理求图示静定结构的指定内力或支座反力。试：

(a) 求支座反力 F_{RC} 和 F_{RF} 以及弯矩 M_B 和 M_C。

(b) 求支座反力 F_H 和 F_V 以及杆 AC 的轴力 F_N。

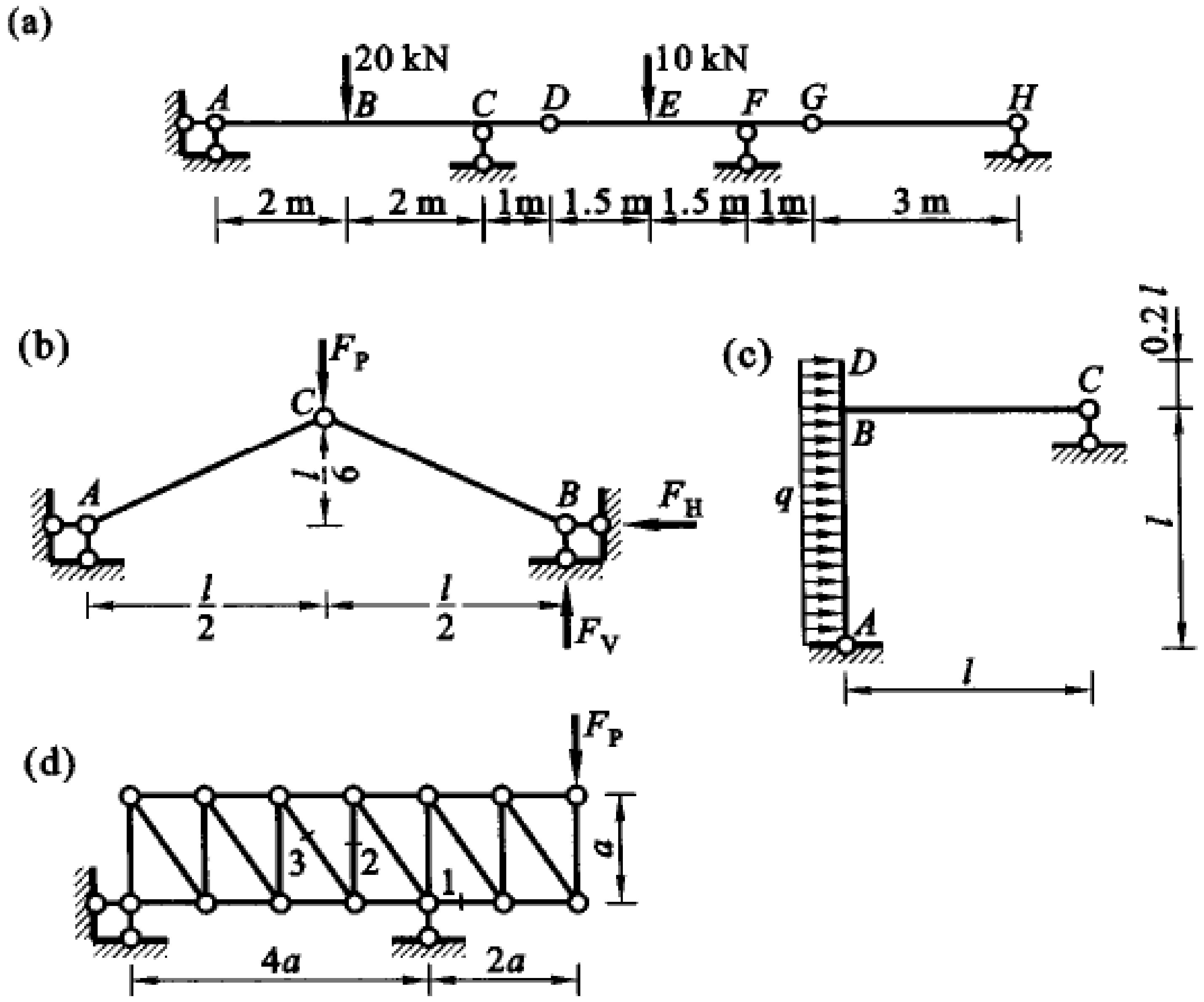
(c) 求支座反力 F_{RC} 以及弯矩 M_{BC} 和 M_{BA}。

(d) 求 1、2、3 杆的轴力 F_{N1}、F_{N2}、F_{N3}。



F_P
$4F_P$
F_P
A
C
B
a
b
E
D
F
8a
a
a

题 3－26 图



(a)
20 kN
10 kN
A
B
C
D
E
F
G
H
2 m
2 m
1m
1.5 m
1.5 m
1m
3 m
(b)
F_P
C
A
B
F_H
F_V
(c)
D
C
B
q
A
l
0.2l
(d)
F_P
3
2
1
a
4a
2a

题 3－27 图

第4章 影　响　线

§4-1　移动荷载和影响线的概念

前面各章讨论的荷载都是固定荷载，荷载作用点的位置是固定不变的。但是有些结构要承受移动荷载，荷载作用点在结构上是移动的。例如，在桥梁上行驶的火车和汽车，在吊车梁上行驶的吊车等，都是移动荷载。

在本章中，着重讨论结构在移动荷载作用下的内力计算问题。这个问题具有如下特点：荷载仍属静力荷载，但结构内力随荷载的移动而变化，为此需要研究内力的变化范围和变化规律。设计时必须以内力的最大值作为设计依据，为此需要确定荷载的最不利位置——即使结构某个内力或支座反力达到最大值的荷载位置。

移动荷载的类型很多，没有必要逐个地加以讨论，而只需抽出其中的共性进行典型分析。典型的移动荷载就是单位移动荷载 $F_P=1$①，它是从各种移动荷载中抽出来的最简单、最基本的元素。只要把单位移动荷载作用下的内力变化规律分析清楚，那么，根据叠加原理，就可以顺利地解决各种移动荷载作用下的内力计算问题及最不利荷载位置的确定问题。

表示单位移动荷载作用下内力变化规律的图形称为内力影响线。影响线是研究移动荷载作用的基本工具。下面举例说明影响线的概念。

图4-1a所示为一简支梁 AB，当单个竖向荷载 F_P 在梁上移动时，现讨论支座反力 F_{RB} 的变化规律。

取 A 点作坐标原点，用 x 表示荷载作用点的横坐标。如果 x 是常量，则 F_P 就是一个固定荷载。反之，如果把 x 看作变量，则 F_P 就成为移动荷载。

当荷载 F_P 在梁上任意位置 $x(0\leqslant x\leqslant l)$ 时，利用平衡方程可求出支座反力 F_{RB}：

$$F_{RB}=\frac{x}{l}F_P \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{a}$$

① 参见本书符号表说明3。

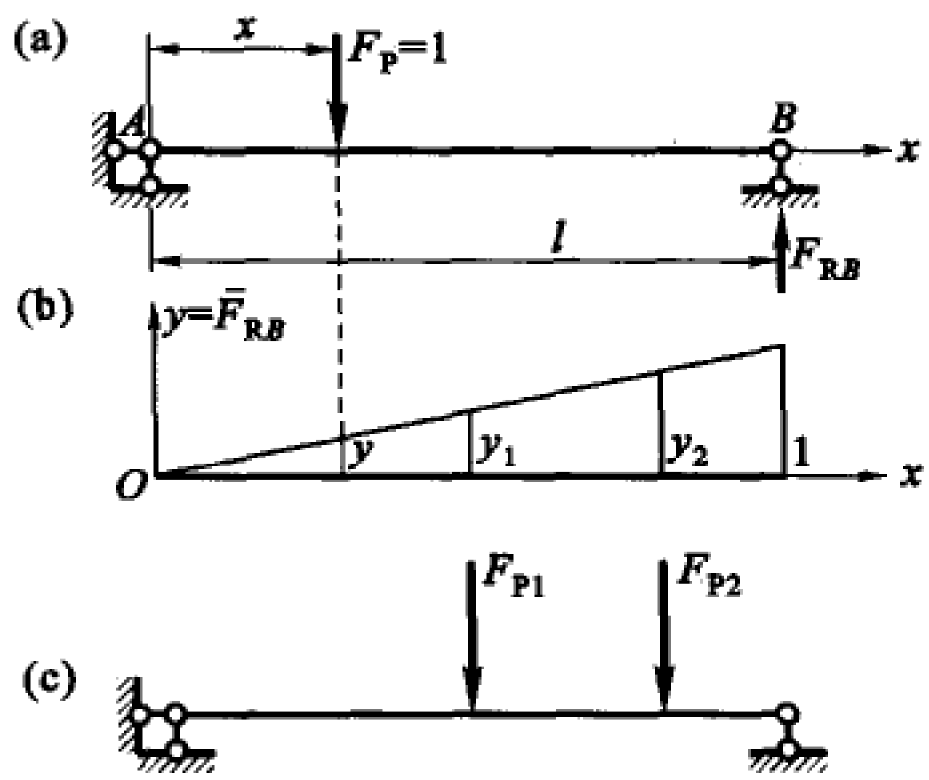


图　4 - 1

F_{RB}与F_P成正比，比例系数$\frac{x}{l}$称为F_{RB}的影响系数，用$\bar{F}_{RB}$表示，即

$$\bar{F}_{RB}=\frac{x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l)\tag{b}$$

显然，影响系数$\bar{F}_{RB}$在数值上等于当$F_P=1$时引起的支座反力F_{RB}。

式(b)表示影响系数$\bar{F}_{RB}$与荷载位置参数x之间的函数关系。这个函数的图形便称为F_{RB}的影响线。由于式(b)是一次式，故F_{RB}的影响线是直线。为了定出直线上的两点，可设$x=0$，得$\bar{F}_{RB}=0$。又设$x=l$，得$\bar{F}_{RB}=1$。由此定出两点，再连成直线，便得出F_{RB}的影响线，如图4-1b所示。

图4-1b中的影响线形象地表明支座反力F_{RB}随荷载$F_P=1$的移动而变化的规律：当荷载$F_P=1$从A点开始，逐渐向B点移动时，支座反力影响系数$\bar{F}_{RB}$则相应地从零开始，逐渐增大，最后达到最大值$\bar{F}_{RB}=1$。

F_{RB}的影响线还可用来求各种荷载作用下引起的支座反力F_{RB}。例如，图4-1c所示梁上有吊车轮压F_{P1}和F_{P2}作用，根据叠加原理，这时的支座反力F_{RB}应为

$$F_{RB}=F_{P1}y_1+F_{P2}y_2$$

这里，y_1和y_2分别为对应于荷载F_{P1}和F_{P2}位置的影响系数$\bar{F}_{RB1}$和$\bar{F}_{RB2}$。

概括说来，当单位集中荷载$F_P=1$沿结构移动时，表示结构某量Z变化规律的曲线，称为Z的影响线。影响线上任一点的横坐标x表示荷载的位置参数，纵坐标y表示荷载作用于此点时Z的影响系数Z。

影响系数$\bar{Z}$是Z与F_P的比例系数，即

$$Z = F_P \bar{Z}, \quad 或\ \bar{Z} = \frac{Z}{F_P}$$

当 $F_P = 1$ 时，$\bar{Z}$ 与 Z 在数值上彼此相等。但 $\bar{Z}$ 与 Z 的量纲不同，它们相差一个荷载 F_P 的量纲。如果 F_{RB} 的量纲是 LMT^{-2}，则 $\bar{F}_{RB}$ 的量纲是 $(LMT^{-2})/(LMT^{-2})$，即为量纲一的量。

§4－2 静力法作简支梁影响线

静定结构的内力或支座反力影响线有两种基本作法，静力法和机动法。本节通过求简支梁的内力(或支座反力)影响线说明静力法。

静力法是以荷载的作用位置 x 为变量，通过平衡方程，从而确定所求内力(或支座反力)的影响函数，并作出影响线。

1. 支座反力影响线

简支梁支座反力 F_{RB} 的影响线(图 4－2b)已在上节中讨论过(图 4－1)，现在讨论支座反力 F_{RA} 的影响线。

将 $F_P = 1$ 放在任意位置，距 A 为 x。由平衡方程求影响系数 $\bar{F}_{RA} = \frac{F_{RA}}{F_P}$：

$$\sum M_B = 0, \qquad \bar{F}_{RA} l - 1(l - x) = 0$$

得

$$\bar{F}_{RA} = \frac{l - x}{l} \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

这就是 $\bar{F}_{RA}$ 的影响线方程。由此方程可知，F_{RA} 的影响线也是一条直线。在 A 点，$x = 0$，$\bar{F}_{RA} = 1$。在 B 点，$x = l$，$\bar{F}_{RA} = 0$。利用这两个竖距便可以画出 F_{RA} 的影响线，如图 4－2c 所示

2. 剪力影响线

现在拟作指定截面 C 的剪力 F_{QC} 的影响线(图 4－2d)。当 $F_P = 1$ 作用在 C 点以左或以右时，剪力 F_{QC} 的影响系数具有不同的表示式，应当分别考虑。

当 $F_P = 1$ 作用在 CB 段时，取截面 C 的左边为隔离体，由 $\sum F_y = 0$，得

$$F_{QC} = F_{RA} \quad (F_P = 1\ 在\ CB\ 段)$$

由此看出，在 CB 段内，F_{QC} 的影响线与 F_{RA} 的影响线相同。因此，可先作 F_{RA} 的影响线，然后保留其中的 CB 段(至于 AC 段则舍弃不用)。C 点的竖距可按比例关系求得为 b/l。

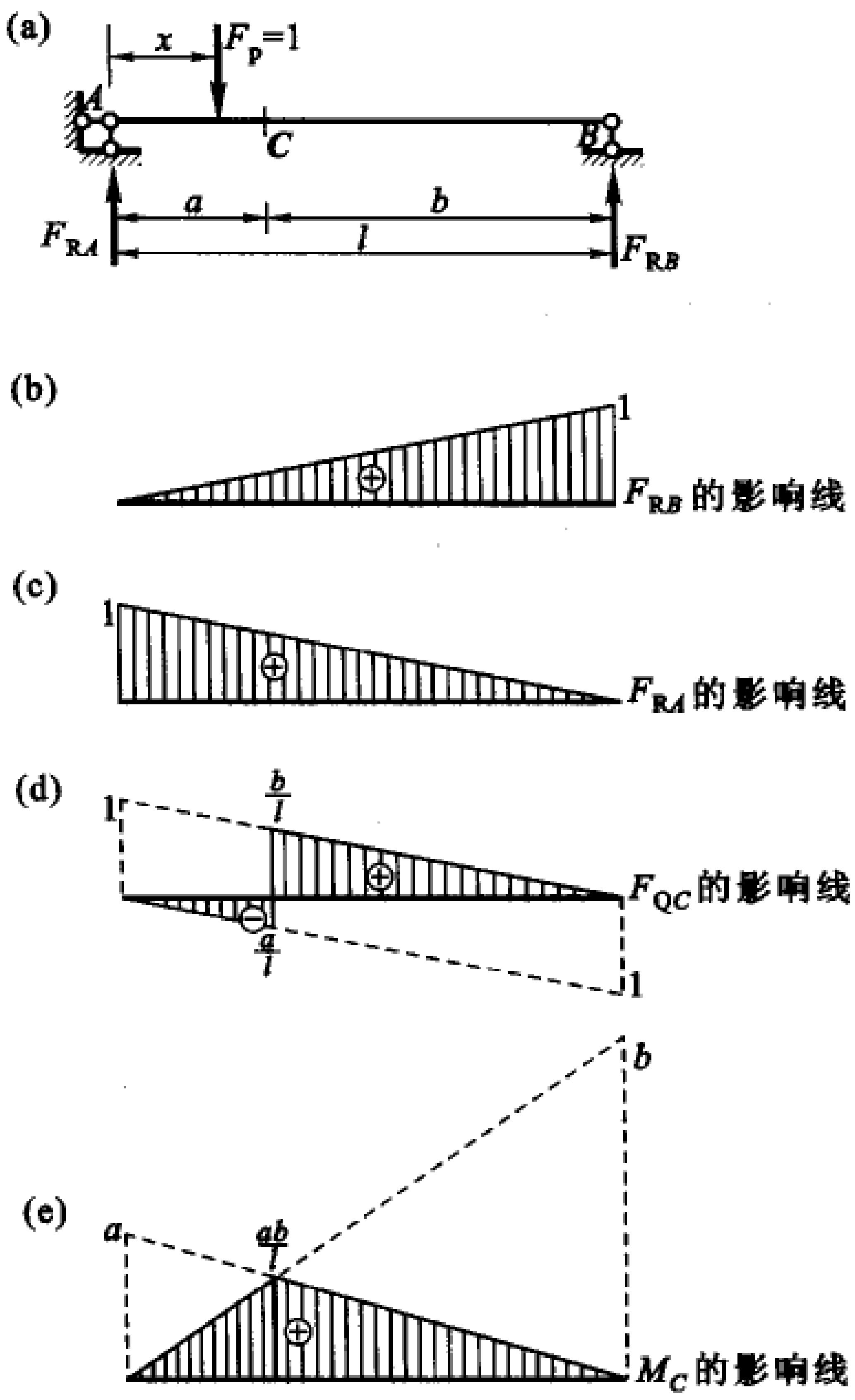


图 4－2

当 $F_P=1$ 作用在 AC 段时，取截面 C 的右边为隔离体，由 $\sum F_y=0$，得

$$F_{QC}=-F_{RB}\quad (F_P=1\text{ 在 }AC\text{ 段})$$

由此看出，在 AC 段内，F_{QC} 的影响线与 F_{RB} 的影响线相同，但正负号相反。因此，可先把 F_{RB} 的影响线翻过来画在基线下面，然后保留其中的 AC 段。C 点的竖距可按比例关系求得为 $-\frac{a}{l}$。

综合起来，F_{QC} 的影响线分成 AC 和 CB 两段，由两段平行线所组成，在 C 点形成台阶。由此看出，当 $F_P=1$ 作用在 AC 段任一点时，截面 C 为负号剪力。当 $F_P=1$ 作用在 CB 段任一点时，截面 C 为正号剪力。当 $F_P=1$ 越过 C 点由左侧移到右侧时，截面 C 的剪力将引起突变。当 $F_P=1$ 正好作用 C 点时，F_{QC} 的影响系数没有意义。

剪力影响系数 $\bar{F}_Q = \dfrac{F_Q}{F_P}$ 为比例系数，为量纲一的量。

3. 弯矩影响线

现在拟作指定截面 C 的弯矩 M_C 的影响线（图 4－2e）。仍分成两种情况（$F_P=1$ 作用在 C 点以左和以右）分别考虑。

当 $F_P=1$ 作用在 CB 段时，取 C 的左边为隔离体，得

$$M_C = F_{RA} \cdot a \quad (F_P = 1 \text{ 在 } CB \text{ 段})$$

由此看出，在 CB 段内，M_C 的影响系数等于 F_{RA} 的影响系数的 a 倍。因此，可先把 F_{RA} 的影响线的竖距乘以 a，然后保留其中的 CB 段，就得到 M_C 在 CB 段的影响线。这里 C 点的竖距应为 ab/l。

当 $F_P=1$ 作用在 AC 段时，取 C 的右边为隔离体，得

$$M_C = F_{RB} \cdot b \quad (F_P = 1 \text{ 在 } AC \text{ 段})$$

因此，可先把 F_{RB} 的影响线的竖距乘以 b，然后保留其中的 AC 段，就得到 M_C 在 AC 段的影响线。这里 C 点的竖距仍是 ab/l。

综合起来，M_C 的影响线分成 AC 和 CB 两段，每一段都是直线，形成一个三角形，如图 4－2e 所示。由此看出，当 $F_P=1$ 作用在 C 点时，弯矩 M_C 为极大值。当 $F_P=1$ 由 C 点向梁的两端移动时，弯矩 M_C 逐渐减小到零。

弯矩影响系数 $\bar{M} = \dfrac{M}{F_P}$ 为比例系数，其量纲为 L，单位为 m。

例 4－1　试作图 4－3a 所示伸臂梁的 F_{RA}、F_{RB}、F_{QC}、F_{QD} 的影响线。

解　(1) 作 F_{RA}、F_{RB} 的影响线

取 A 点为坐标原点，横坐标 x 以向右为正。当荷载 $F_P=1$ 作用于梁上任一点 x 时，由平衡方程求得支座反力的影响系数为

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_{RA} &= \frac{l-x}{l} \\ \bar{F}_{RB} &= \frac{x}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (-l_1 \leqslant x \leqslant l + l_2)$$

这两个支座反力影响线方程与简支梁的相同，只是荷载 $F_P=1$ 的作用范围有所扩大。在简支梁中，x 的变化范围为 $0 \leqslant x \leqslant l$，这里则为 $-l_1 \leqslant x \leqslant l + l_2$。影响线图形如图4－3b、c 所示。在 AB 段内的影响线与简支梁的完全相同，仍是直线。再将直线向两个伸臂部分延长，即得出整个影响线。

(2) 作剪力 F_{QC} 的影响线

当 $F_P=1$ 在 C 点以左时，得

$$F_{QC} = -F_{RB} \quad (F_P = 1 \text{ 在 } EC \text{ 段})$$

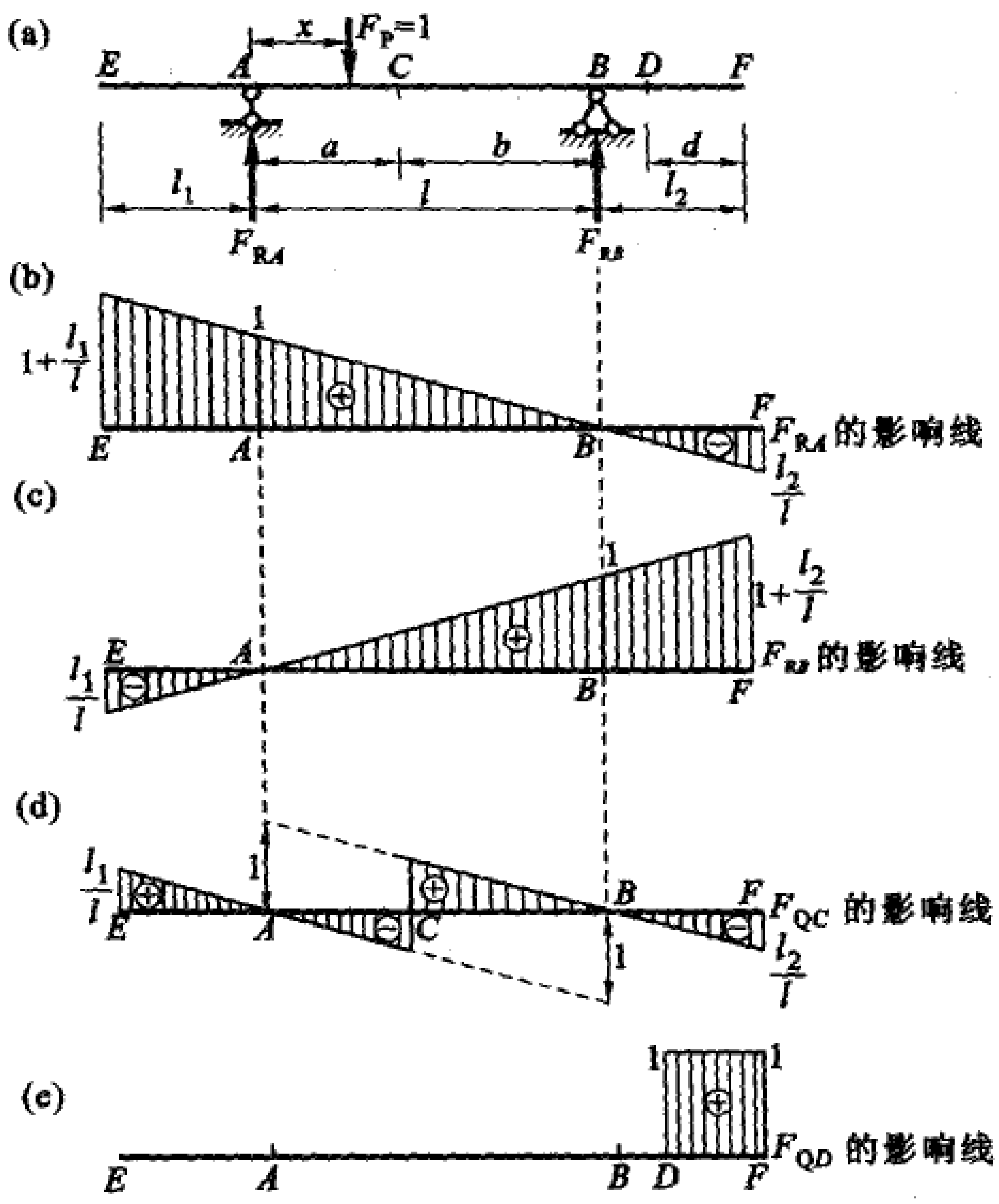


图 4-3

当 $F_P=1$ 在 C 点以右时，得

$$F_{QC}=F_{RA}\quad(F_P=1\text{ 在 }CF\text{ 段})$$

仿照简支梁作剪力影响线的作法，得出 F_{QC} 影响线如图 4-3d 所示。

(3) 作剪力 F_{QD} 的影响线

当 $F_P=1$ 在 D 点以左时，取 D 的右边为隔离体，得

$$\overline{F}_{QD}=0$$

当 $F_P=1$ 在 D 点以右时，仍取 D 的右边为隔离体，得

$$\overline{F}_{QD}=+1$$

由此可作出 F_{QD} 影响线如图 4-3e 所示。这里，只有 DF 段的影响系数不为零，也就是说，只有当荷载作用 DF 段时，才对 F_{QD} 产生影响。

§4-3 结点荷载作用下梁的影响线

图4-4a所示为一桥梁结构承载示意图。荷载直接加于纵梁。纵梁是简支梁，两端支在横梁上。横梁则由主梁支承；荷载通过纵梁下面的横梁传到主梁。不论纵梁承受何种荷载，主梁只在 A、C、E、F、B 等有横梁处（即结点处）承受集中力，因此主梁承受的是结点荷载。

下面研究主梁的影响线的作法。

（1）支座反力 F_{RA} 和 F_{RB} 的影响线

支座反力 F_{RA} 和 F_{RB} 的影响线，与图4-2所示完全相同，在图4-4中没有画出。

（2）M_C 的影响线

C 点正好是结点。$F_P=1$ 在 C 点以右时，利用 F_{RA} 求 M_C；$F_P=1$ 在 C 点以左时，利用 F_{RB} 求 M_C。由此可知，M_C 的影响线作法与图4-2完全相同，如图4-4b所示。C 点的竖距为

$$\frac{ab}{l}=\frac{d\times 3d}{4d}=\frac{3}{4}d$$

（3）M_D 的影响线

M_D 的影响线如图4-4c所示。先说明其作法，然后加以证明。

先假设 $F_P=1$ 直接加于主梁 AB，则 M_D 的影响线为一三角形（其中 CE 段为虚线）。D 点的竖距为

$$\frac{ab}{l}=\frac{\frac{3}{2}d\times\frac{5}{2}d}{4d}=\frac{15}{16}d$$

由比例可知，C、E 两点的竖距为

$$y_C=\frac{15}{16}d\times\frac{2}{3}=\frac{5}{8}d$$

$$y_E=\frac{15}{16}d\times\frac{4}{5}=\frac{3}{4}d$$

将 C、E 两点的竖距连一直线，就得到结点荷载作用下 M_D 的影响线，如图中实线所示。

为了证明上述作法的正确性，只需注意以下两点：

1）如果单位荷载加在 C 点或 E 点，则结点荷载与直接荷载完全相同，所以

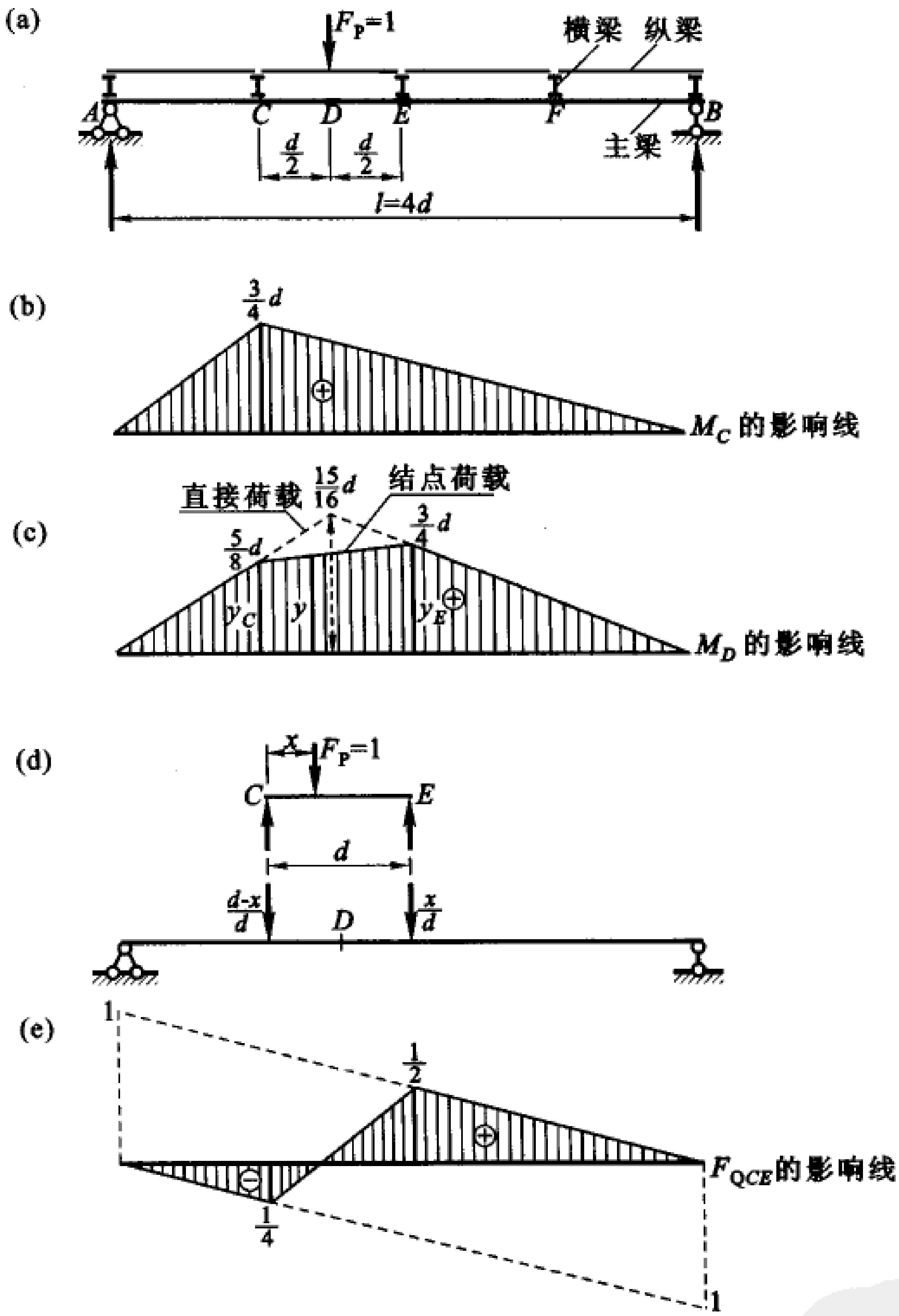


图　4－4

在结点荷载作用下 M_D 影响线在 C 点的竖距 y_C 和在 E 点的竖距 y_E 与直接荷载作用下相应的竖距相等。

2）如单位荷载作用在 C、E 两点之间，其到 C 点的距离以 x 表示，则纵梁 CE 的反力如图 4－4d 所示。主梁在 C 点受向下的荷载$\frac{d-x}{d}$作用，在 E 点受向下的荷载$\frac{x}{d}$作用。单位荷载作用在点 x 时对主梁 M_D 的影响系数 y 可用叠加原理求得如下：

$$\text{当 } F_P=1 \text{ 加在 } C \text{ 点时，}\quad \overline{M}_D=y_C$$

当 $F_P=1$ 加在 E 点时，　　$\overline{M}_D = y_E$

当 $F_P=1$ 距 C 点为 x 时，主梁 C 点荷载为$\frac{d-x}{d}$，E 点荷载为$\frac{x}{d}$，故

$$y = y_C\frac{d-x}{d} + y_E\frac{x}{d}$$

上式为 x 的一次式。由此可知在结点荷载作用下，M_D 的影响线在 CE 一段为一直线。

一般的结论可表达如下：

1）在结点荷载作用下，结构任何影响线在相邻两结点之间为一直线。

2）先作直接荷载作用下的影响线，用直线连接相邻两结点的竖距，就得到结点荷载作用下的影响线。

（4）F_{QCE} 的影响线

在结点荷载作用下，主梁在 C、E 两点之间没有外力，因此 CE 一段各截面的剪力都相等，通常称为结间剪力，以 F_{QCE} 表示。F_{QCE} 的影响线如图 4－4e 所示，是按照上述结论作出的。

§4－4　静力法作桁架的影响线

图 4－5a 所示为一平行弦桁架。设单位荷载沿桁架下弦 AG 移动，试作各杆轴力的影响线。桁架通常承受结点荷载，荷载传递的方式与图 4－5b 所示的梁相同。任一杆的轴力（例如 F_{Nbc}）的影响线在相邻结点之间为一直线。我们可以把单位荷载 $F_P=1$ 依次置于 A、B、C、D、E、F、G 诸点，计算 F_{Nbc} 的数值，用竖距表示出来，再连以直线，就得到 F_{Nbc} 的影响线。由此可知，绘制静定桁架各杆内力的影响线原则上没有什么困难。

下面结合图 4－5 说明桁架影响线的静力作法，其基础仍然是截面法和结点法。

1．F_{RA} 和 F_{RG} 的影响线

F_{RA} 和 F_{RG} 的影响线与简支梁相同，图中没有画出。

2．上弦杆轴力 F_{Nbc} 的影响线

作截面 I－I，以 C 为力矩中心，用力矩方程 $\sum M_C=0$，求 F_{Nbc}。

如单位荷载在 C 的右方，取截面 I－I 左部为隔离体，得

$$F_{RA}\times 2d + F_{Nbc}h = 0$$

$$F_{Nbc} = -\frac{2d}{h}F_{RA} \qquad \text{(a)}$$

如单位荷载在 C 点以左，取截面 Ⅰ-Ⅰ 以右部分为隔离体，得

$$F_{RG}\times 4d+F_{Nbc}h=0$$

$$F_{Nbc}=-\frac{4d}{h}F_{RG} \tag{b}$$

在图 4-5c 中，利用式(a)作出 F_{RA} 的影响线，将竖距乘以 $\frac{2d}{h}$，画于基线以下，取 C 以右一段；又利用式(b)作出 F_{RG} 的影响线，将竖距乘以 $\frac{4d}{h}$，画于基线以下，取 C 以左一段。这样，得到一个三角形。由于在相邻结点之间都是直线，因此得到的三角形就是 F_{Nbc} 的影响线。

式(a)和(b)可以合并为一个式子，即

$$F_{Nbc}=-\frac{M_C^0}{h} \tag{c}$$

式中 M_C^0 是相应的简支梁(图 4-5b)结点 C 的弯矩。由式(c)可知，F_{Nbc} 的影响线为一三角形，顶点的竖距为

$$-\frac{ab}{lh}=-\frac{2d\times 4d}{6dh}=-\frac{4d}{3h}$$

3. 下弦杆轴力 F_{NCD} 的影响线

作截面 Ⅱ-Ⅱ，以结点 c 为力矩中心，用力矩方程 $\sum M_c=0$，得

$$F_{NCD}=\frac{M_c^0}{h} \tag{d}$$

即 F_{NCD} 的影响线可由相应梁结点 C 的弯矩影响线得到，只需将后者的竖距除以 h。图 4-5d 所示为 F_{NCD} 的影响线。

4. 斜杆 bC 轴力的竖向分力 F_{ybC} 的影响线

仍然用截面 Ⅰ-Ⅰ，分三段考虑。

单位荷载在 C 点以右时，考虑截面 Ⅰ-Ⅰ 以左部分的平衡，由投影方程 $\sum F_y=0$，得

$$F_{ybC}=F_{RA} \tag{e}$$

单位荷载在 B 点以左时，考虑截面 Ⅰ-Ⅰ 以右部分的平衡，得

$$F_{ybC}=-F_{RG} \tag{f}$$

单位荷载在 B、C 之间，影响线为直线。

根据上述分析作出 F_{ybC} 的影响线如图 4-5e 所示。利用相应梁结间 BC 的剪力 F_{QBC}^0，可将上述分析概括成一个式子：

$$F_{ybC}=F_{QBC}^0 \tag{g}$$

图 4-5e 所示的影响线其实就是相应梁的结间剪力 F_{QBC}^0 的影响线。

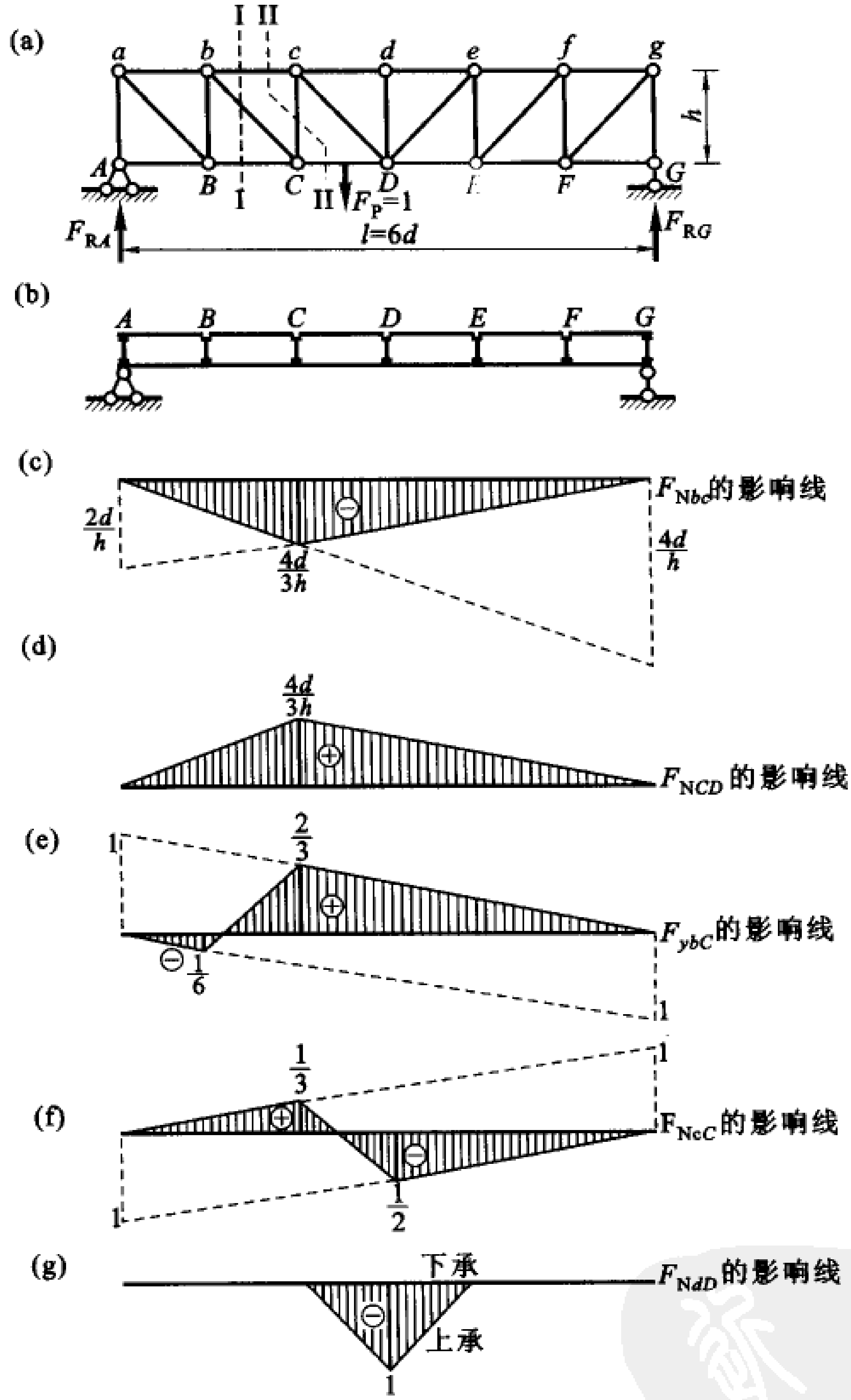


图 4-5

5．竖杆轴力 F_{NcC} 的影响线

作截面Ⅱ-Ⅱ，利用投影方程 $\sum F_y=0$，求 F_{NcC}。可利用相应梁结间 CD 的剪力 F^0_{QCD} 列出下列式子：

$$F_{NcC}=-F^0_{QCD} \tag{h}$$

图 7-5f 系 F_{NcC} 的影响线，是按结间剪力 F^0_{QCD} 的影响线作出的，但将正负号作了改变。

6. 竖杆轴力 F_{NdD} 的影响线

在上面的分析中，我们一直假设单位荷载沿下弦移动，即由桁架下弦结点承受荷载（下承桁架）作用。这样，由上弦结点 d 的平衡，可知

$$F_{NdD}=0$$

因此 F_{NdD} 的影响线与基线重合（图4－5g），不管单位荷载在什么位置，dD 永远是零杆。

如果假设单位荷载沿桁架的上弦移动，由桁架上弦结点承受荷载（上承桁架）作用，则由结点 d 的平衡，可知：

$$\text{当 } F_P=1 \text{ 在结点 } d \text{ 时，}\quad \bar{F}_{NdD}=-1$$

$$\text{当 } F_P=1 \text{ 在其他结点时，}\quad \bar{F}_{NdD}=0$$

由于结点之间是直线，因此 F_{NdD} 的影响线如图4－5g中实线所示，是一个三角形。

由此可知，作桁架的影响线时，要注意区分桁架是下弦承载，还是上弦承载。在本例中，如果桁架改为上承，则 F_{Nbc}、F_{NCD}、F_{ybC} 的影响线仍如图4－5c、d、e所示，但图4－5f中的 F_{NcC} 影响线需要修改，因为在上承桁架中，式(h)应用下式代替：

$$F_{NcC}=-F^0_{QBC}$$

而 F_{NcC} 影响线应按结间剪力 F^0_{QBC} 的影响作出，但正负号相反。

§4－5　机动法作影响线

作静定内力或支座反力影响线时，除可采用静力法外，还可采用机动法。机动法是以虚功原理为基础，把作内力或支座反力影响线的静力问题转化为作位移图的几何问题。

机动法有一个优点：不需经过计算就能很快地绘出影响线的轮廓。因此，对于某些问题，用机动法处理特别方便（例如在确定荷载最不利位置时，往往只需知道影响线的轮廓，而无需求出其数值）。此外，用静力法作出的影响线也可用机动法来校核。

下面以简支梁支座反力影响线为例，运用虚功原理说明机动法作影响线的概念和步骤。

现拟求图4－6a所示梁的支座 B 反力 $Z=F_{RB}$ 的影响线。为此，将与 Z 相应的约束——支杆 B 撤去，代以未知量 Z（图4－6b），使体系具有一个自由度。然后，给体系以虚位移，使梁绕 A 点作微小转动，列出虚功方程如下：

$$Z\delta_Z + F_P\delta_P = 0 \tag{4-1}$$

这里，δ_P 是与荷载 $F_P=1$ 相应的位移，由于 F_P 以向下为正，故 δ_P 也以向下为正；δ_Z 是与未知力 Z 相应的位移，δ_Z 以与 Z 正方向一致者为正。由式(4-1)求得

$$\bar{Z} = -\frac{\delta_P}{\delta_Z} \tag{4-2}$$

当 $F_P=1$ 移动时，位移 δ_P 随着变化，是荷载位置参数 x 的函数；而位移 δ_Z 则与 x 无关，是一个常量。因此，式(4-2)可表示为

$$\bar{Z}(x) = \left(-\frac{1}{\delta_Z}\right)\delta_P(x) \tag{4-3}$$

这里，函数 $\bar{Z}(x)$ 表示 Z 的影响线，函数 $\delta_P(x)$ 表示荷载作用点的竖向位移图(参见图4-6b)。由此可知，Z 的影响线与荷载作用点的竖向位移图成正比。也就是说，根据位移 δ_P 图就可以得出影响线的轮廓。

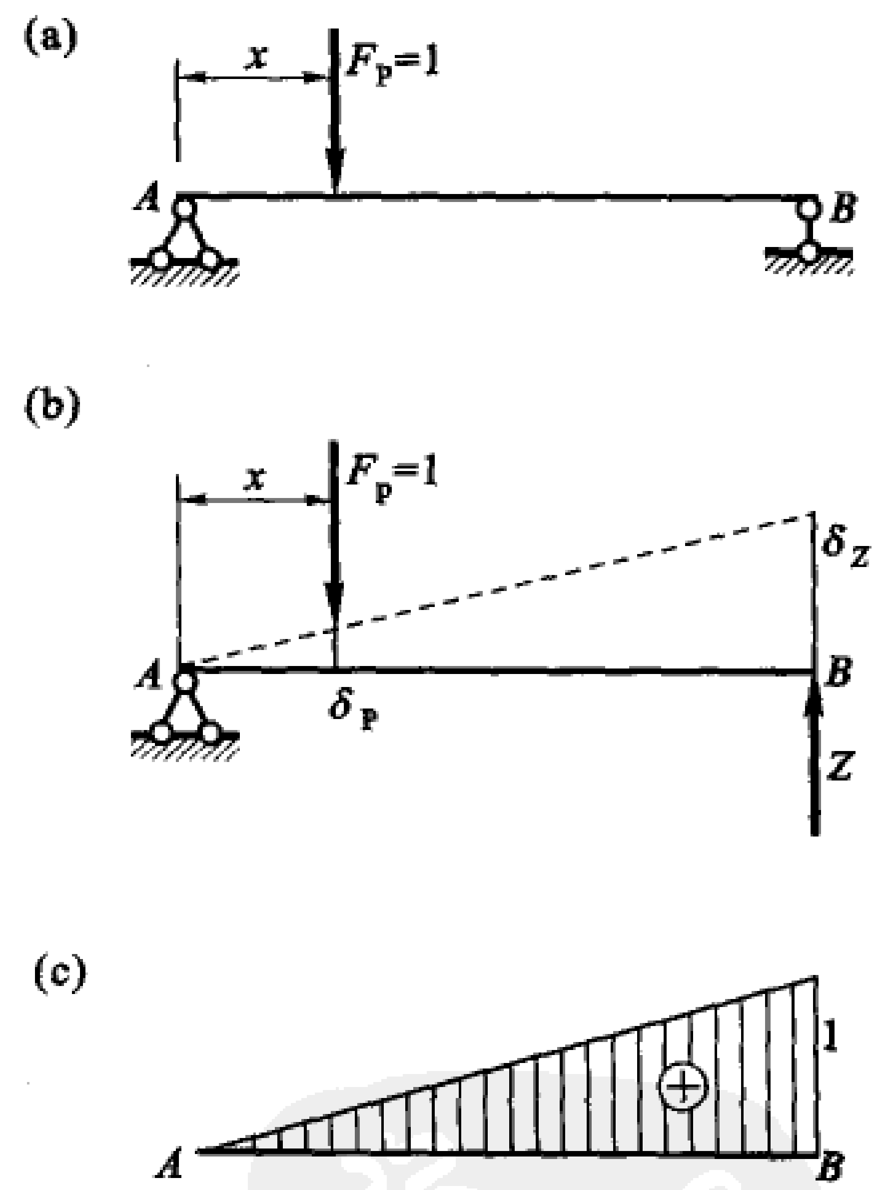


图　4-6

如果还要确定影响线各竖距的数值，则应将位移 δ_P 图除以 δ_Z(或在位移图中设 $\delta_Z=1$)，由此得到的图4-6c就从形状上和数值上完全确定了 Z 的影响线。

至于影响线竖距的正负号可规定如下：当 δ_Z 为正值时，由式(4-3)得知 Z 与 δ_P 的正负号正好相反，又 δ_P 以向下为正。因此，如果位移图在横坐标轴上方，则 δ_P 值为负，因而影响系数为正。

总结起来，机动法作静定内力或支座反力的影响线的步骤如下：

(1) 撤去与 Z 相应的约束，代以未知力 Z。

(2) 使体系沿 Z 的正方向发生位移，作出荷载作用点的竖向位移图(δ_P 图)，由此可定出 Z 的影响线的轮廓。

(3) 令 $\delta_Z=1$，可进一步定出影响线各竖距的数值。

(4) 横坐标以上的图形，影响系数取正号；横坐标以下的图形，影响系数取负号。

例4-2　试用机动法作图4-7a所示简支梁的弯矩和剪力的影响线。

解　(1) 弯矩 M_C 的影响线

撤去与弯矩 M_C 相应的约束(即在截面 C 处改为铰结)，代以一对等值反向的力偶 M_C。这时，铰 C 两侧的刚体可以相对转动。

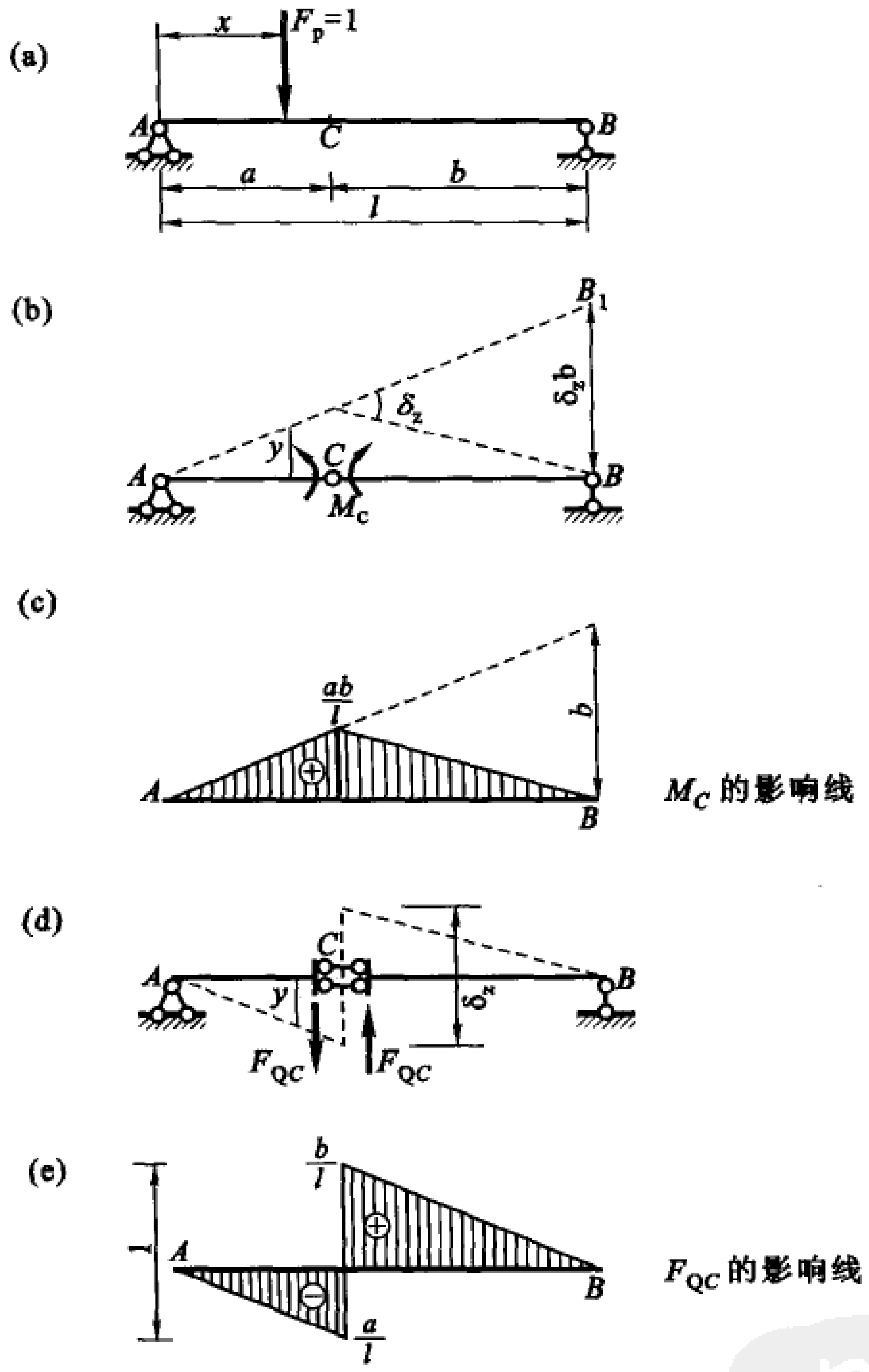


图　4－7

给体系以虚位移，如图 4－7b 所示。这里，与 M_C 相应的位移 δ_Z 就是铰 C 两侧截面的相对转角。利用 δ_Z 可以确定位移图中的竖矩。由于 δ_Z 是微小转角，可先求得 $BB_1=\delta_Z\cdot b$。按几何关系，可求出 C 点竖向位移为$\frac{ab}{l}\delta_Z$。这样，得到的位移图即代表 M_C 的影响线的轮廓。

为了求得影响系数的数值，再将图 4－7b 中的位移图除以 δ_Z，即得到 M_C 影响线如图 4－7c 所示，其中 C 点的影响系数为$\frac{ab}{l}$。

应当指出，由于虚位移 δ_Z 是微小值，因此这里只说将 δ_P 图除以 δ_Z，而不说令相对转角 $\delta_Z = 1$ rad。换句话说，如果仍采用"令 $\delta_Z = 1$"的说法，则应理解为令竖向位移中的参数 δ_Z 等于1，而不是直接令相对转角 δ_Z 等于1 rad。

（2）剪力 F_{QC} 的影响线

撤去截面 C 处相应于剪力的约束，代以剪力 F_{QC}，得图4－7d所示的机构。此时，在截面 C 处能发生相对的竖向位移，但不能发生相对的转动和水平移动。因此，切口两边的梁在发生位移后保持平行，切口的相对竖向位移即为 δ_Z。令 $\delta_Z = 1$，由三角形几何关系即可确定影响线的各控制点数值(图4－7e)。

例4－3　试用机动法作图4－8a所示静定多跨梁的 M_K、F_{QK}、M_C、F_{QE} 和 F_{RD} 的影响线。

解　（1）M_K 的影响线

在截面 K 加铰，使发生虚位移，如图4－8b所示。铰 K 两侧相对转角为 δ_Z，截距 $BB' = 1 \cdot \delta_Z = \delta_Z$。将图4－8b中的 δ_P 图除以 δ_Z(或令竖距中的参数 $\delta_Z = 1$，即令 $BB' = 1$)，即得 M_K 的影响线如图4－8c所示。各控制点的影响系数可按比例关系求出。在横坐标轴以上的图形为正号，以下的为负号。

（2）F_{QK} 的影响线

以下不再画体系的虚位移图，直接作出影响线的图形。

F_{QK} 影响线的图形与 K 点两侧截面发生竖向错动时的 δ_P 图成比例。作图时，先保持各支点的位移为零。然后，在 K 点两边分别作平行线 AK' 和 $K''B$，在 K 点错动的方向与剪力 F_{QK} 的正方向一致(使隔离体顺时针转动)，同时令 $K'K'' = \delta_Z = 1$。最后，作附属部分 EF 和 FG 的影响线，为此，连接 $E'C$，并延长到 F'；连接 $F'D$，并延长到 G'。这样，便得到 F_{QK} 的影响线如图4－8d所示。

（3）M_C 的影响线

在截面 C 加铰后，HE 和 EC 仍不能发生虚位移，因此 M_C 的影响线在 HC 段与基线重合。但附属部分 CF 和 FG 可发生虚位移。与 M_C 对应的位移 δ_Z 即铰 C 两侧截面的相对转角。由于 EC 无转角，故 CF 的转角即为 δ_Z，而 F 点的竖向位移为 $2 \cdot \delta_Z$。令其中的参数 $\delta_Z = 1$，故 F 点的影响系数等于2。M_C 的影响线如图4－8e所示。

（4）F_{QE} 的影响线

当 E 点两侧截面沿 F_{QE} 正方向发生错动时，基本部分 HE 不能发生位移，因此，在 HE 段 F_{QE} 影响线恒等于零。EF 段绕支座 C 转动，FG 段绕支座 D 转动。令与 F_{QE} 对应的相对位移(即 E 点竖坐标)δ_Z 等于1，便得到 F_{QE} 的影响线如图4－8f所示。

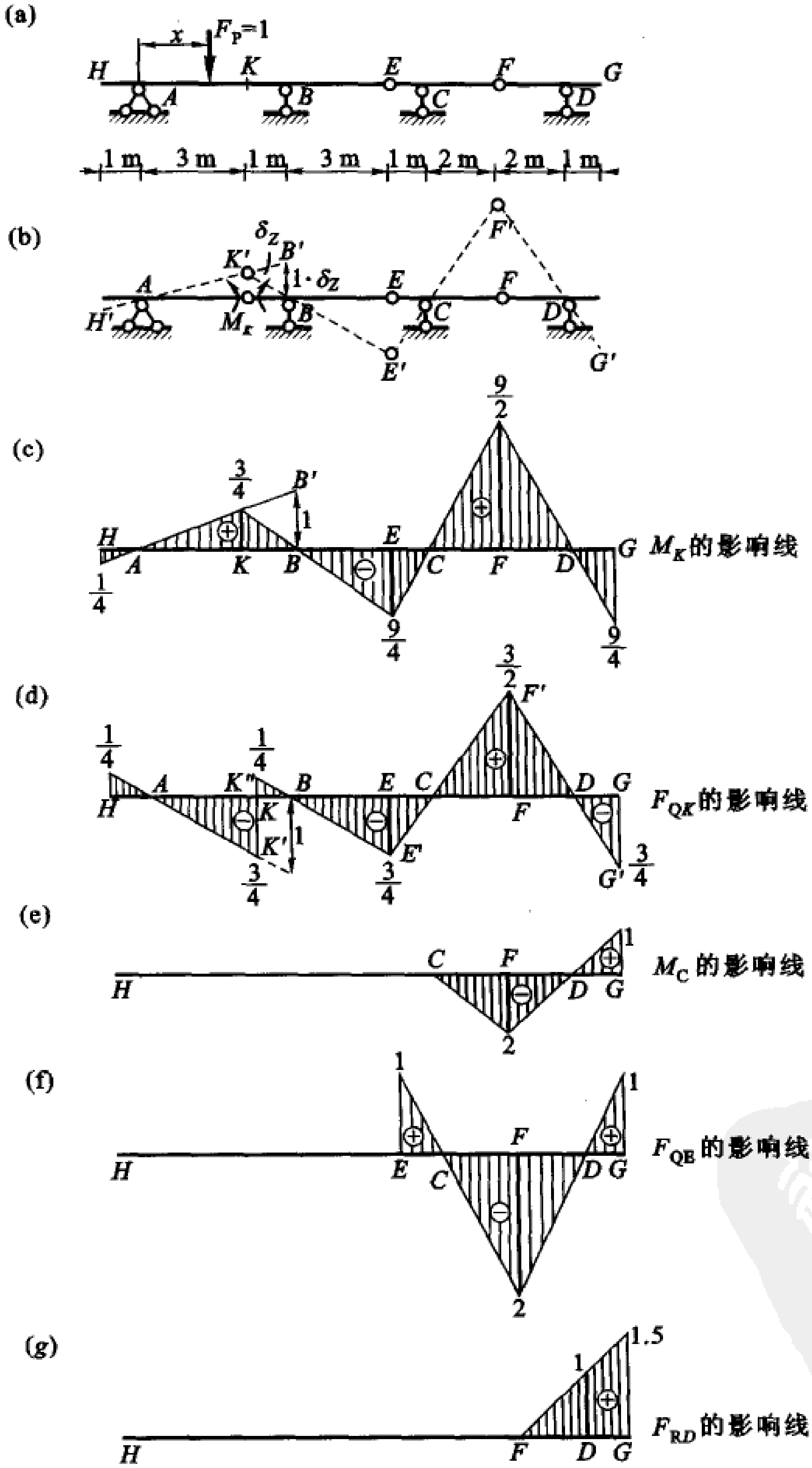

(a)
$F_P=1$
x
H K E F G
A B C D
1 m 3 m 1 m 3 m 1 m 2 m 2 m 1 m
(b)
δ_Z
K′ B′
$1\cdot\delta_Z$
H′ A E F C D
M_K B
E′ G′ F′
(c)
M_K的影响线
(d)
F_{QK}的影响线
(e)
M_C的影响线
(f)
F_{QE}的影响线
(g)
F_{RD}的影响线

图　4－8

(5) F_{RD}的影响线

在静定多跨梁中，FG 是 HF 的附属部分。当撤去支杆 D 时，HF 段仍不能发生位移，因此在 HF 段 F_{RD}影响线恒等于零。令 FG 段在 D 点沿 F_{RD}方向发生单位竖向位移，便得到 F_{RD}的影响线如图 4－8g 所示。

由图 4－8 所示各影响线的图形可以看出，在静定多跨梁中，基本部分的内力(或支座反力)影响线是布满全梁的，而附属部分内力(或支座反力)的影响线则只在附属部分不为零(基本部分上的线段恒等于零)。这个结论与静定多跨梁的力学特性是一致的。

由本例可以看出，用机动法作静定多跨梁的影响线是十分简便的，读者可以试用静力法与其进行比较。

§4－6 影响线的应用

1. 求各种荷载作用下的影响

作影响线时，用的是单位荷载。根据叠加原理，可利用影响线求其他荷载作用下产生的总影响。

设有一组集中荷载 F_{P1}、F_{P2}、F_{P3}，加于简支梁，位置已知，如图 4－9a 所示。如 F_{QC}的影响线在各荷载作用点的竖距为 y_1、y_2、y_3，则由 F_{P1}产生的 F_{QC}等于 $F_{P1}y_1$，F_{P2}产生的 F_{QC}等于 $F_{P2}y_2$，F_{P3}产生的 F_{QC}等于 $F_{P3}y_3$。根据叠加原理，可知，在这组荷载作用下 F_{QC}的数值为

$$F_{QC}=F_{P1}y_1+F_{P2}y_2+F_{P3}y_3 \tag{a}$$

一般说来，设有一组集中荷载 F_{P1}，F_{P2}，…，F_{Pn}加于结构，而结构某量 Z 的影响线在各荷载作用处的竖距为 y_1，y_2，…，y_n，则

$$Z=F_{P1}y_1+F_{P2}y_2+\cdots+F_{Pn}y_n=\sum_{i=1}^{n}F_{Pi}y_i \tag{4-4}$$

如果结构在 AB 段承受均布荷载 q(图 4－9b)作用，则微段 dx 上的荷载 $q dx$ 可看作集中荷载，它所引起的 Z 值为 $y\cdot q dx$。因此，在 AB 段均布荷载作用下的 Z 值为

$$Z=\int_A^B yq\,dx=q\int_A^B y\,dx=qA_0 \tag{4-5}$$

这里，A_0 表示影响线的图形在受载段 AB 上的面积。上式表示，均布荷载引起的 Z 值等于荷载集度乘以受载段的影响线面积。应用此式时，要注意面积 A_0 的正负号。

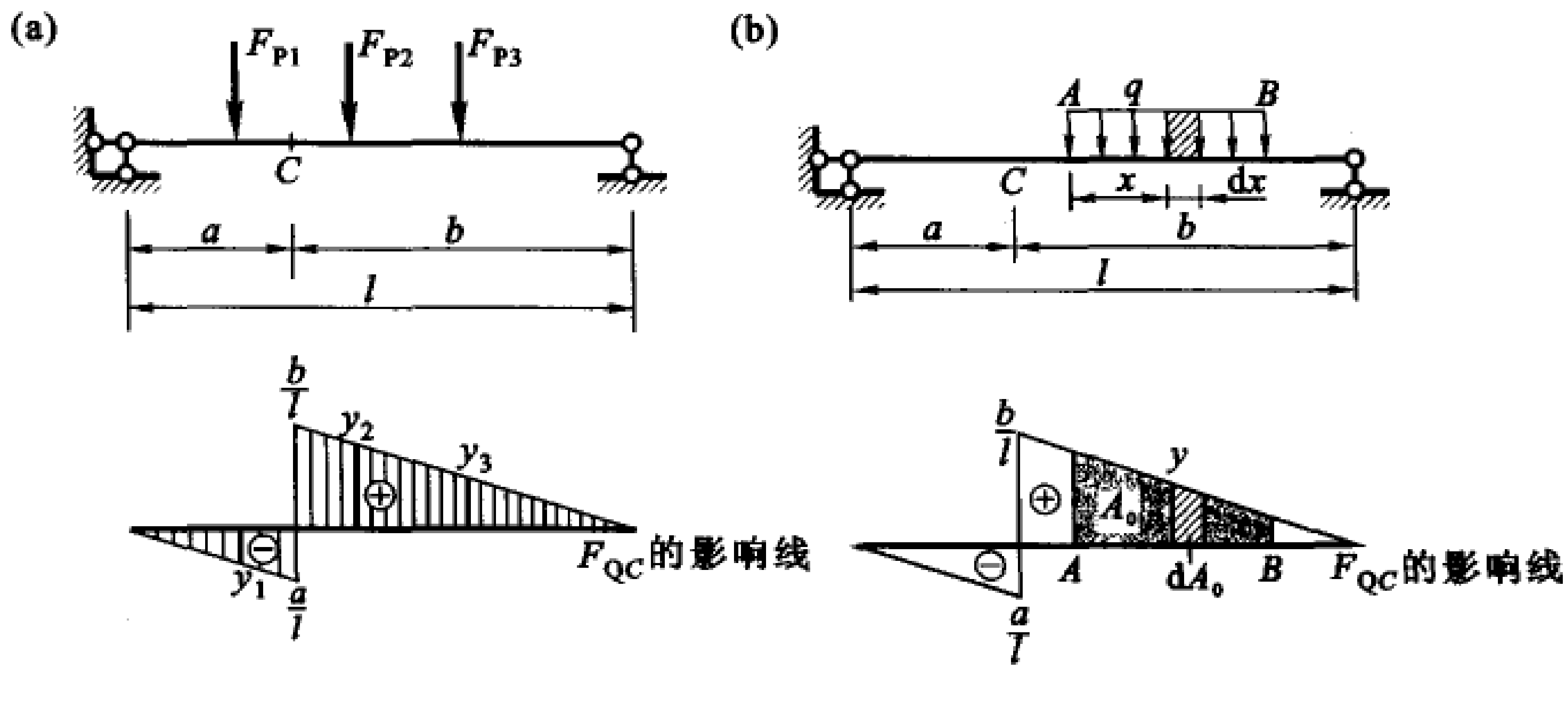


图　4－9

例 4－4　图 4－10 所示为一简支梁，全跨受均布荷载作用。试利用截面 C 的剪力 F_{QC} 的影响线计算 F_{QC} 的数值。

解　F_{QC} 的影响线正号部分的面积以 A_1 表示，负号部分的面积以 A_2 表示，则

$$A_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times4\ \text{m}=\frac{4}{3}\ \text{m}^{①}$$

$$A_2=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times2\ \text{m}=-\frac{1}{3}\ \text{m}$$

由式(4－5)得

$$F_{QC}=q(A_1+A_2)=20\ \text{kN/m}\times\left(\frac{4}{3}\ \text{m}-\frac{1}{3}\ \text{m}\right)$$

$$=20\ \text{kN}$$

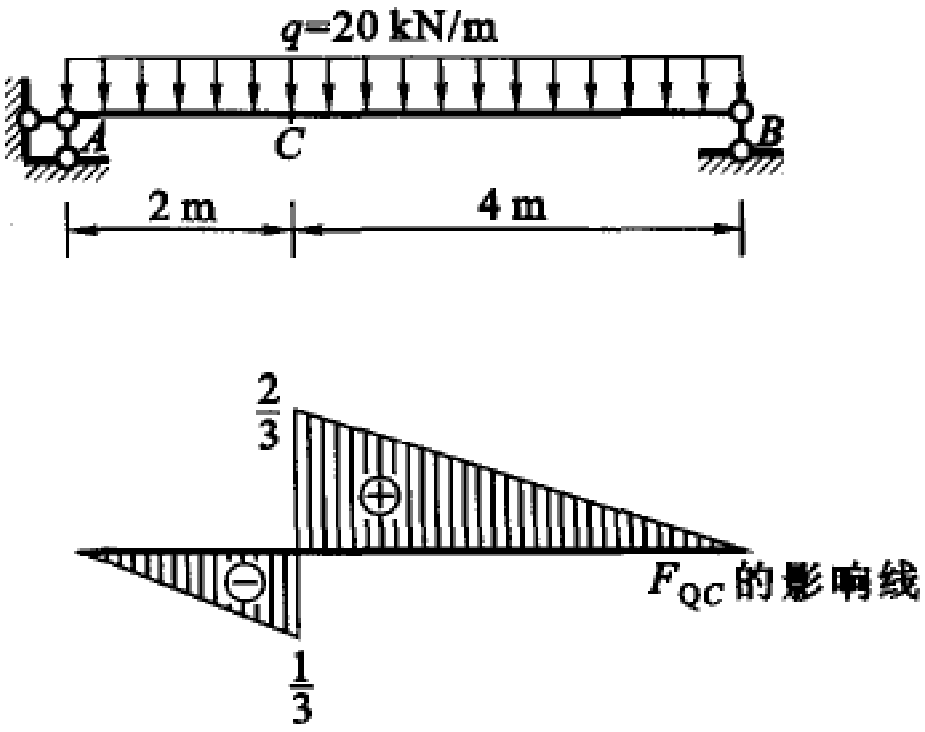


图　4－10

2．求荷载的最不利位置

如果荷载移动到某个位置，使某量 Z 达到最大值，则此荷载位置称为最不利位置。影响线的一个重要作用，就是用来确定荷载的最不利位置。

对于一些简单情况，只需对影响线和荷载特性加以分析和判断，就可定出荷载的最不利位置。判断的一般原则是：应当把数量大、排列密的荷载放在影响线竖距较大的部位。下面举几个简单例子。

如果移动荷载是单个集中荷载，则最不利位置是这个集中荷载作用在影响线的竖距最大处。

① F_{QC} 的影响线（即影响系数图形）竖距无单位，故其面积的单位为 m。下同。

如果移动荷载是一组集中荷载，则在最不利位置时，必有一个集中荷载作用在影响线的顶点(图 4-11)。

如果移动荷载是均布荷载，而且可以按任意方式分布，则其最不利位置是在影响线正号部分布满荷载(求最大正号值)，或者在负号部分布满荷载(求最大负号值)(图 4-12)。

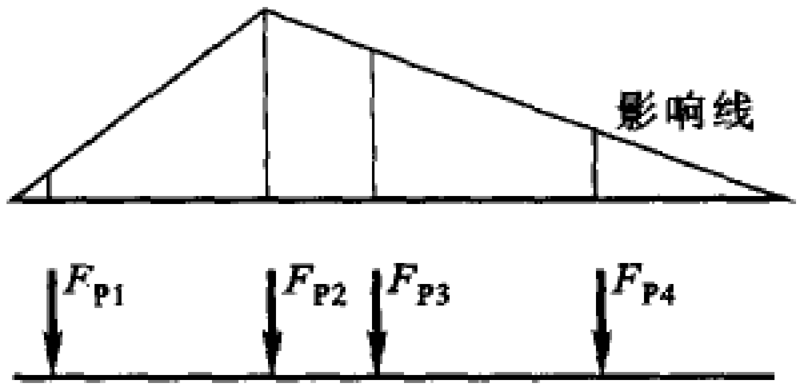


图 4-11

例 4-5 图 4-13a 所示为两台吊车的轮压和轮距，试求吊车梁 AB 在截面 C 的最大正剪力。

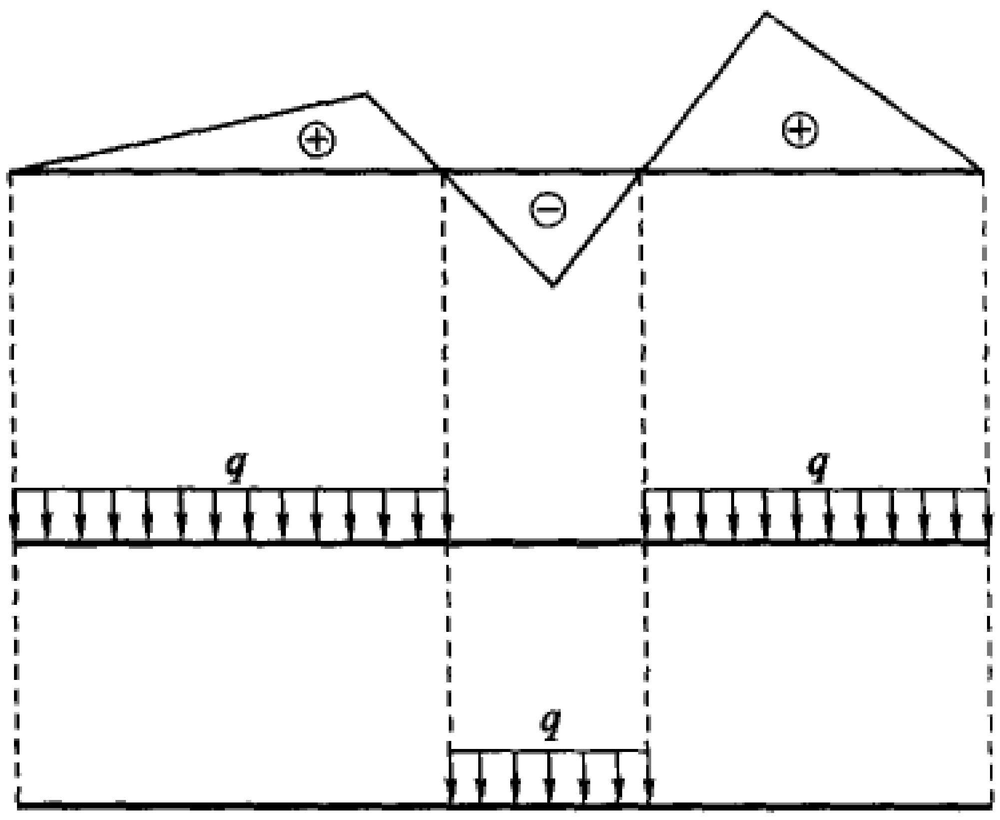


图 4-12

解 先作出 F_{QC} 的影响线(图 4-13c)。

要使 F_{QC} 为最大正号剪力，首先，荷载应放在 F_{QC} 影响线的正号部分。其次，应将排列较密的荷载(中间两个轮压)放在影响系数较大的部位(荷载 435 kN 放在 C 点的右侧)。图 4-13b 所示为荷载的最不利位置。由此求得

$$F_{QC\max} = F_{P1}y_1 + F_{P2}y_2 = 435\ \text{kN} \times 0.667 + 295\ \text{kN} \times 0.425 = 415\ \text{kN}$$

例 4-6 图 4-10 中的简支梁承受均布荷载 $q = 20\ \text{kN/m}$ 作用，荷载在梁上可以任意布置。试求 F_{QC} 的最大正号值和最大负号值。

解 由图 4-10 所示 F_{QC} 的影响线可知，当荷载布满 CB 段时，可得到最大正剪力 $F_{QC\max}$ 为

$$F_{QC\max} = qA_{CB} = 20\ \text{kN/m} \times \frac{4}{3}\ \text{m} = 26.7\ \text{kN}$$

当荷载布满 AC 段时，可得到最大负剪力 $F_{QC\min}$ 为

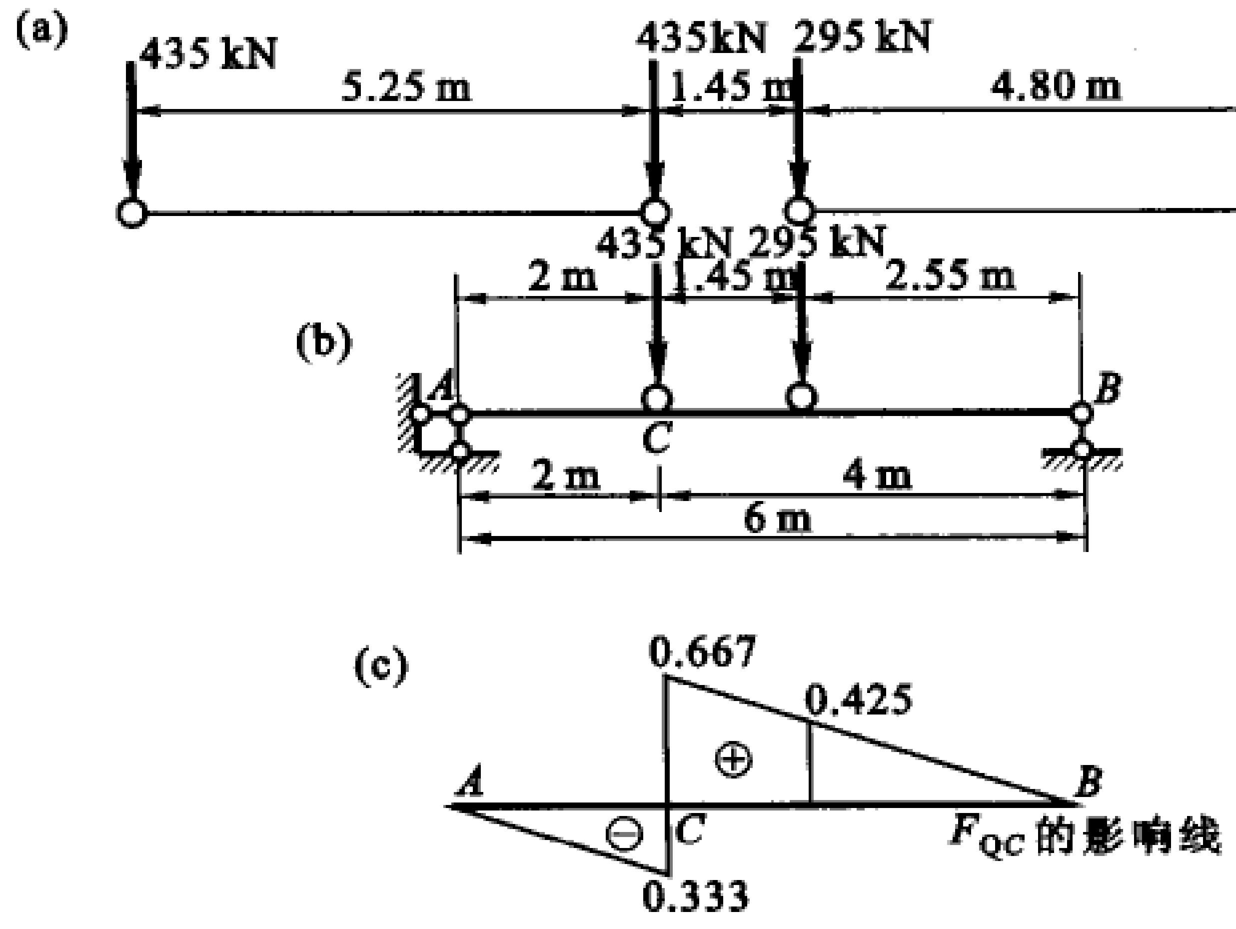


图 4－13

$$F_{QC\min} = qA_{AC} = 20\ \text{kN/m} \times \left(-\frac{1}{3}\right)\ \text{m} = -6.67\ \text{kN}$$

3．临界位置的判定

如果移动荷载是一组集中荷载，要确定某量 Z 的最不利荷载位置，通常分成两步进行：

第一步，求出使 Z 达到极值的荷载位置。这种荷载位置称为荷载的临界位置。

第二步，从荷载的临界位置中选出荷载的最不利位置。也就是从 Z 的极大值中选出最大值，从极小值中选出最小值。

下面以多边形影响线为例，说明荷载临界位置的特点及其判定方法。

图 4－14a 所示为一组集中荷载，荷载行动时其间距和数值保持不变。图 4－14b 所示为某量 Z 的影响线，为一多边形。各边的倾角以 α_1、α_2、α_3 表示(其中 α_1 和 α_2 是正的，α_3 是负的)。各边区间内荷载的合力用 F_{R1}、F_{R2}、F_{R3}表示。

根据叠加原理，并按各边区间内荷载的合力来计算，则

$$Z = F_{R1}\bar{y}_1 + F_{R2}\bar{y}_2 + F_{R3}\bar{y}_3 = \sum_{i=1}^{3} F_{Ri}\bar{y}_i$$

这里，$\bar{y}_1$、$\bar{y}_2$，$\bar{y}_3$ 分别是各段荷载合力 F_{R1}、F_{R2}、F_{R3}对应的影响系数。

设荷载移动 Δx(向右移动时 Δx 为正)，则竖距 $\bar{y}_i$ 的增量为

$$\Delta\bar{y}_i = \Delta x \cdot \tan\ \alpha_i$$

而 Z 的增量为

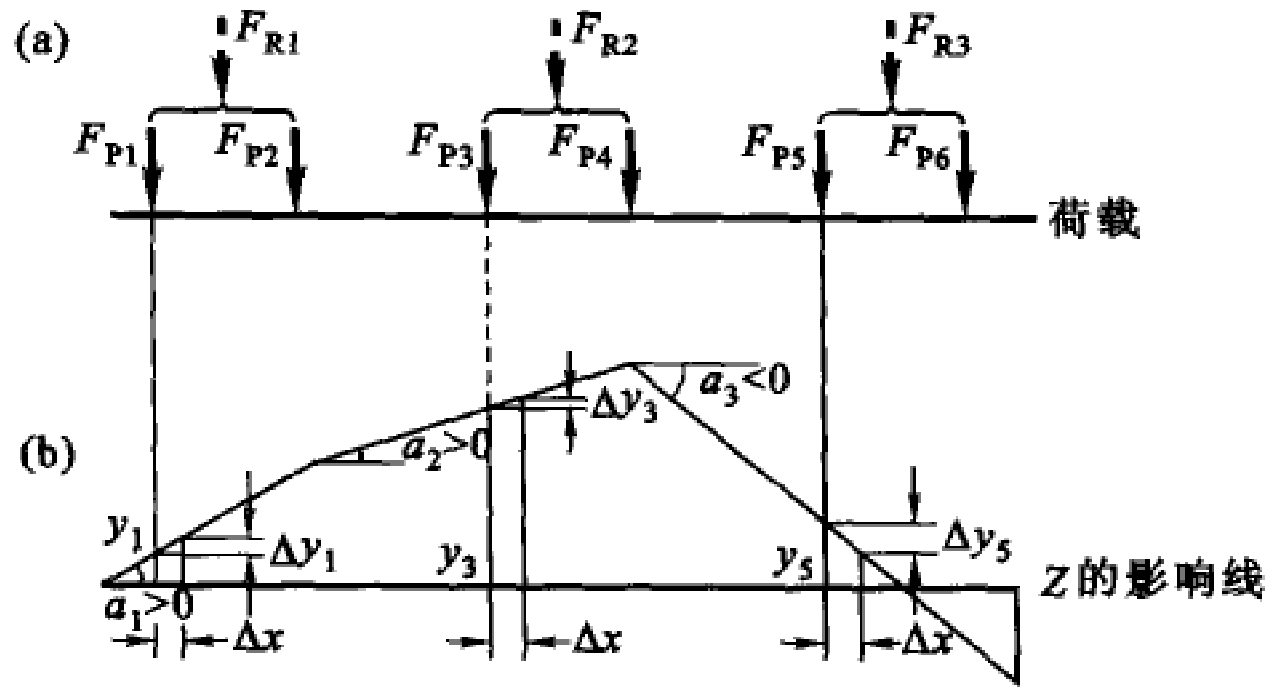


图 4-14

$$\Delta Z = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{3} F_{Ri} \tan \alpha_i$$

显然,使 Z 成为极大值的临界位置,必须满足如下条件:荷载自临界位置向右或向左移动时,Z 值均应减少或等于零,即 $\Delta Z \leqslant 0$,即

$$\Delta x \cdot \sum_{i=1}^{3} F_{Ri} \tan \alpha_i \leqslant 0 \tag{a}$$

式(a)还可分为两种情况:

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \Delta x>0 \text{ 时(荷载稍向右移)}, \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \leqslant 0 \\ \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时(荷载稍向左移)}, \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \geqslant 0\end{array}\right\} \tag{4-6}$$

同理,使 Z 成为极小值的临界位置,必须满足如下条件:

$$\left.\begin{array}{l}\text{荷载稍向右移}, \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \geqslant 0 \\ \text{荷载稍向左移}, \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \leqslant 0\end{array}\right\} \tag{4-7}$$

下面只讨论 $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i \neq 0$ 的情形。这时可得出如下结论:如果 Z 为极值(极大或极小),则荷载稍向左、右移动时,$\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$ 必须变号。

下面分析在什么情况下 $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$ 才有可能变号。首先,由于 $\tan \alpha_i$ 是影响线中各段直线的斜率,它是常数,因此要使 $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$ 改变符号,只有各段内的合力 F_{Ri} 改变数值才有可能。其次,整个荷载稍向左、右移动时,要使 F_{Ri} 改变数值,则在临界位置中必须有一个集中荷载正好作用在影响线的顶点上(例如,设有集中力 F_{Pcr} 作用在第 i 段和第 $i+1$ 段直线之间的顶点上,那么,当整个荷载稍向左移时,F_{Pcr} 应计入 F_{Ri};当稍向右移时,F_{Pcr} 应计入 F_{Ri+1})。总之,当荷载稍向左、右移动时,$\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$ 变号的必要条件是一个集中荷载作用于影响线的顶点,但这不是充分条件。

归结起来,确定荷载最不利位置的步骤如下:

（1）从荷载中选定一个集中力 F_{Pcr}，使它位于影响线的一个顶点上。

（2）当 F_{Pcr} 在该顶点稍左或稍右时，分别求 $\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$ 的数值。如果 $\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$ 变号(或由零变为非零)，则此荷载位置称为临界位置，而荷载 F_{Pcr} 称为临界荷载。如果 $\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$ 不变号，则此荷载位置不是临界位置。

（3）对每个临界位置可求出 Z 的一个极值，然后从各种极值中选出最大值或最小值。同时，也就确定了荷载的最不利位置。

例 4－7　图 4－15a 所示为一组移动荷载，图 4－15b 为某量 Z 的影响线。试求荷载最不利位置和 Z 的最大值。已知 $F_{P1}=F_{P2}=F_{P3}=F_{P4}=F_{P5}=90\ \text{kN}$，$q=37.8\ \text{kN/m}$。

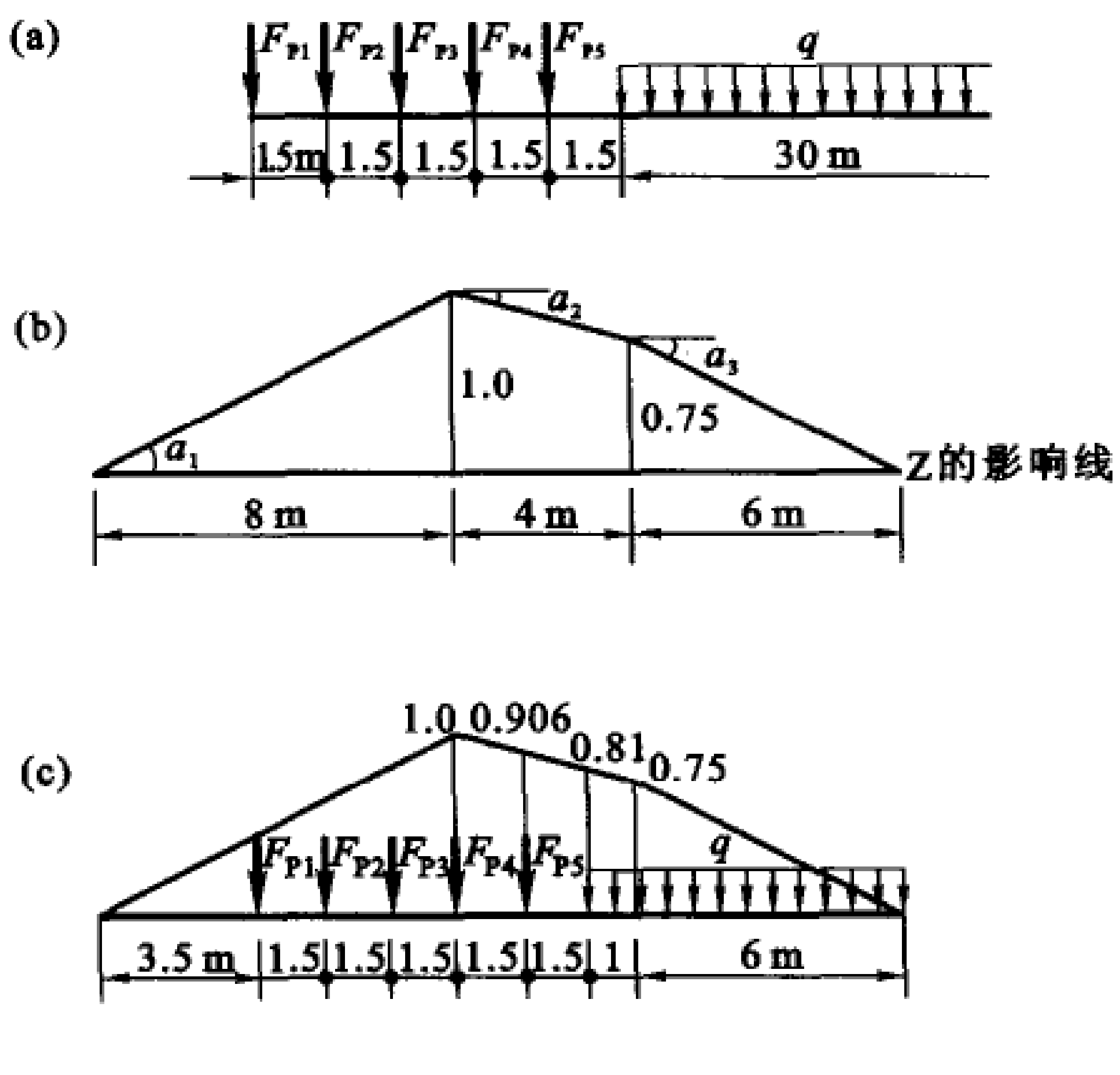


图　4－15

解　（1）试将 F_{P4} 放在影响线的最高顶点。荷载布置情况如图 4－15c 所示。

（2）试算 $\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$。

由图 4－15b，得

$$\tan\alpha_1=\frac{1}{8},\quad \tan\alpha_2=-\frac{0.25}{4},\quad \tan\alpha_3=-\frac{0.75}{6}$$

如果整个荷载稍向右移，各段荷载合力为

$$F_{R1}=90\ \text{kN}\times 3=270\ \text{kN}$$

$$F_{R2}=90\ \text{kN}\times 2+37.8\ \text{kN/m}\times 1\ \text{m}=217.8\ \text{kN}$$

$$F_{R3}=37.8\ \text{kN/m}\times 6\ \text{m}=226.8\ \text{kN}$$

因此

$$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i=270\ \text{kN}\times\frac{1}{8}+217.8\ \text{kN}\times\left(-\frac{0.25}{4}\right)+226.8\ \text{kN}\times\left(-\frac{0.75}{6}\right)=-8.2\ \text{kN}<0$$

如果稍向左移,则

$$F_{R1}=90\ \text{kN}\times 4=360\ \text{kN}$$
$$F_{R2}=90\ \text{kN}+37.8\ \text{kN/m}\times 1\ \text{m}=127.8\ \text{kN}$$
$$F_{R3}=226.8\ \text{kN}$$
$$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i=360\ \text{kN}\times\frac{1}{8}+127.8\ \text{kN}\times\left(-\frac{0.25}{4}\right)+226.8\ \text{kN}\times\left(-\frac{0.75}{6}\right)=8.7\ \text{kN}>0$$

由于$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$变号,故此位置是临界位置。

(3) 计算 Z 值(参见图 4-15c 中标出的影响系数)。

$$Z=90\ \text{kN}\times\left(\frac{3.5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6.5}{8}+1\right)+90\ \text{kN}\times 0.906+37.8\ \text{kN/m}\times\left(\frac{0.81+0.75}{2}\times 1\ \text{m}+\frac{0.75\times 6\ \text{m}}{2}\right)=455\ \text{kN}$$

当影响线为三角形时,临界位置的特点可以用更方便的形式表示出来。如图 4-16 所示,设 Z 的影响线为一三角形。如要求 Z 的极大值,则在临界位置必有一荷载 F_{Pcr} 正好在影响线的顶点上。以 F_R^L 表示 F_{Pcr} 左方荷载的合力,F_R^R 表示 F_{Pcr} 右方荷载的合力,式(4-6)可写为

荷载向右移, $F_R^L\tan\alpha-(F_{Pcr}+F_R^R)\tan\beta\leqslant 0$

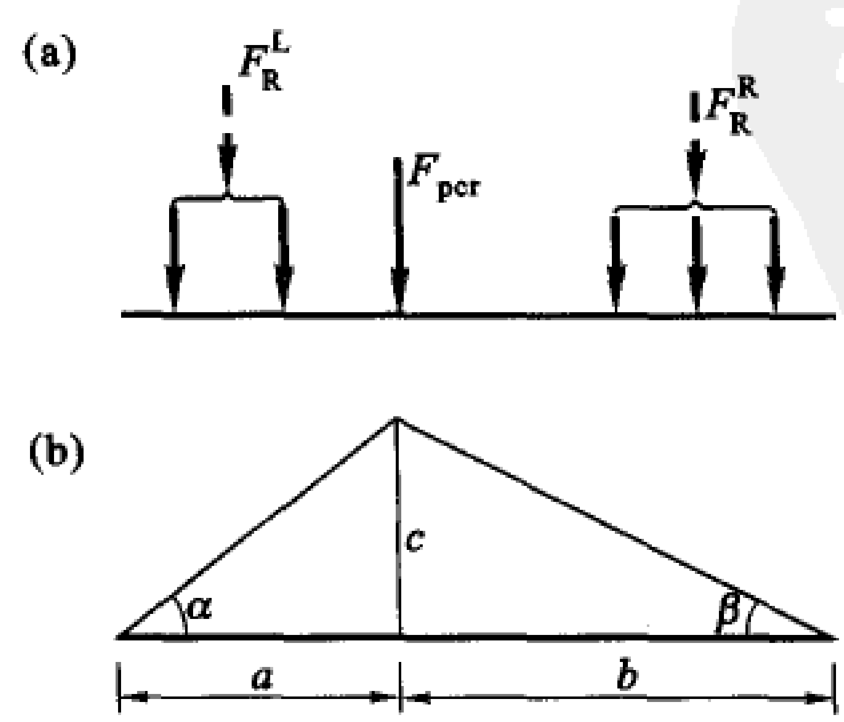


图 4-16

荷载向左移，$(F_R^L + F_{Pcr})\tan\alpha - F_R^R\tan\beta \geqslant 0$

在上式中，代入 $\tan\alpha = \frac{c}{a}$，$\tan\beta = \frac{c}{b}$，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_R^L}{a} &\leqslant \frac{F_{Pcr} + F_R^R}{b}\\ \frac{F_R^L + F_{Pcr}}{a} &\geqslant \frac{F_R^R}{b}\end{aligned}\right\} \tag{4-8}$$

式(4－8)表明：临界位置的特点为有一集中荷载 F_{Pcr} 在影响线的顶点，将 F_{Pcr} 计入哪一边（左边或右边），则哪一边荷载的平均集度要大。

例 4－8 图 4－17a 所示为一梁 AB，跨度为 40 m，承受汽车车队荷载。试求截面 C 的最大弯矩。

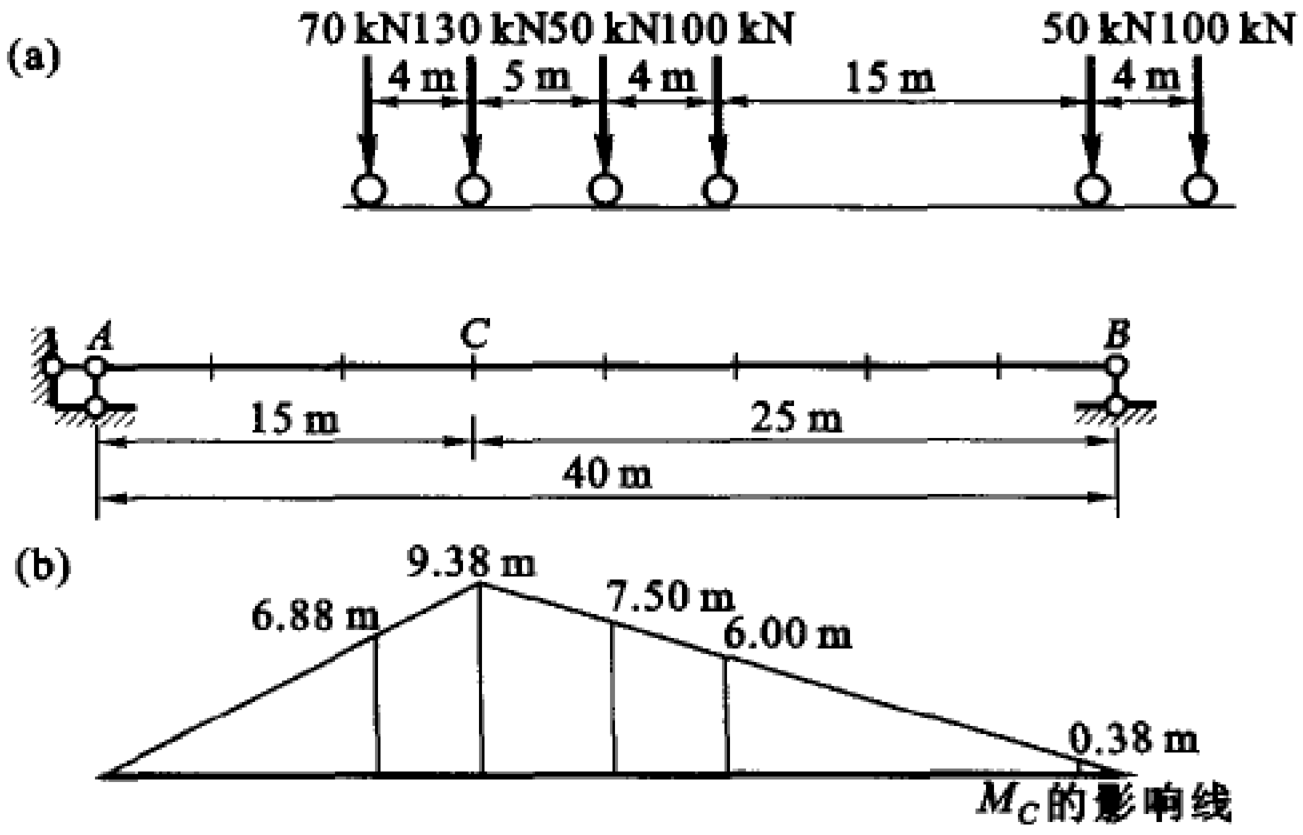


图 4－17

解 M_C 的影响线如图 4－17b 所示。

首先，设汽车车队向左行，将轴重 130 kN 置于 C 点，用式(4－8)验算：

$$\frac{70\ \text{kN}}{15\ \text{m}} < \frac{130\ \text{kN} + 200\ \text{kN}}{25\ \text{m}}$$

$$\frac{70\ \text{kN} + 130\ \text{kN}}{15\ \text{m}} > \frac{200\ \text{kN}}{25\ \text{m}}$$

由此可知，所试位置是临界位置，相应的 M_C 值为

$$M_C = 70\ \text{kN}\times 6.88\ \text{m} + 130\ \text{kN}\times 9.38\ \text{m} + 50\ \text{kN}\times 7.50\ \text{m} + 100\ \text{kN}\times 6.00\ \text{m} + 50\ \text{kN}\times 0.38\ \text{m} = 2\ 694\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

其次，假设汽车车队向右行，仍将 130 kN 荷载置于 C 点（图 4－18），用式(4－8)验算：

$$\frac{150\ \text{kN}}{15\ \text{m}} < \frac{130\ \text{kN} + 220\ \text{kN}}{25\ \text{m}}$$

$$\frac{150\ \text{kN} + 130\ \text{kN}}{15\ \text{m}} > \frac{220\ \text{kN}}{25\ \text{m}}$$

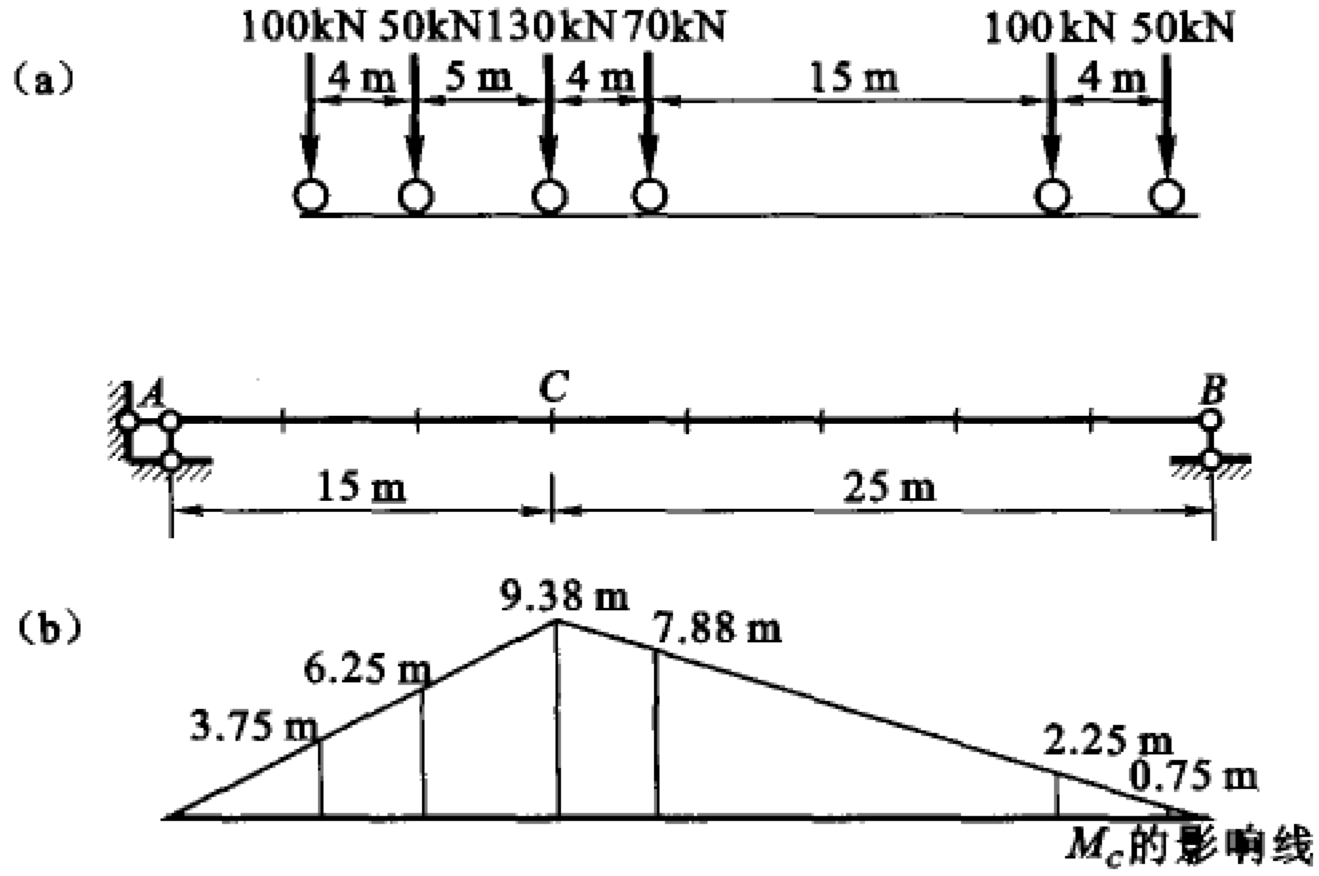


图 4－18

此位置亦为临界位置，相应的 M_C 值为

$$M_C = 100\ \text{kN}\times 3.75\ \text{m} + 50\ \text{kN}\times 6.25\ \text{m} + 130\ \text{kN}\times 9.38\ \text{m} + 70\ \text{kN}\times 7.88\ \text{m} + 100\ \text{kN}\times 2.25\ \text{m} + 50\ \text{kN}\times 0.75\ \text{m} = 2\,720\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

比较上列计算，可知图 4－18 所示荷载位置为最不利位置。M_C 的最大值为 2 720 kN·m。

*§4－7 用求解器计算结构的影响线

求解器中专门设置了影响线的求解功能，可以直接计算一般平面结构的影响线。本节介绍了如何用求解器求解静定结构的影响线，但其方法也适用于一般的结构。

详细内容见所附光盘相应章节。

§4－8 小　结

本章主要讨论静定内力（反力）的影响线的作法和应用。关于超静定内力

(反力)的影响线将在第8章中讨论。

影响线是影响系数 $\bar{Z}$ 与荷载位置 x_i 间的关系曲线，它与内力分布图是有区别的。内力图是描述在固定荷载作用下，内力沿结构各个截面的分布；而影响线是描述单位集中荷载在不同位置作用时对结构中某固定处某量的影响。可以通过简支梁内力图与影响线的比较讨论加深对影响线概念的理解。

可应用静力法和机动法两种方法来绘制影响线。静力法作静定内力(反力)的影响线时是取隔离体运用平衡方程来求，但应将荷载位置的坐标看作变量。因此，如何选择合适的平衡方程和计算次序，仍应根据结构的几何构造来定。但是，列平衡方程时要特别注意该方程的适用范围，即对于哪些荷载位置是适用的。一般来说，应该将荷载作用范围分成几段，对不同区段分别列影响系数方程。静力法是绘制影响线的最基本的方法，应正确地掌握和运用。

本章中习题4－1、4－2、4－3可供辅导课选用参考。

机动法作静定内力(反力)影响线，是虚功原理在静力问题中的应用，其基本公式为

$$\bar{Z}(x) = -\frac{1}{\delta_Z}\delta_P(x)$$

在作 Z 的影响线时，应从结构中撤去与 Z 相应的约束。在这样形成的机构中，其荷载作用点的竖向位移图 δ_P 即与 Z 的影响线成正比。必须正确了解 δ_Z 和 δ_P 的意义，δ_Z 是与 Z 相对应的，而 δ_P 则是与荷载的作用点相对应的。对于 δ_P 图(机构的位移图)的特性应清楚了解，从而加深对静定内力(反力)的影响线为直线图形的特性的理解。学习机动法，应着重原理部分，并能运用它来绘制较简单的影响线。

习题4－4、4－5可供辅导课选用参考。

利用叠加原理，根据影响线可以确定各种荷载作用时的影响值，并用以确定移动荷载的不利位置。对于直线图形构成的影响线，为了确定荷载的不利位置，要掌握如何判定临界荷载和临界位置。

§4－9　思考与讨论

§4－1　思考题

4－1　影响线的含义是什么？它的 x 和 y 坐标各代表什么物理意义？

4－2　如果图4－1a中梁承受全跨均布荷载 q，能否利用图4－1b所示 F_{RB} 的影响线计算此均布荷载作用下的支座反力 F_{RB}？

§4－2　思考题

4-3 图4-2d的剪力影响线的左、右直线是平行的，在C点有突变，它们代表什么含义？

4-4 在什么情况下，影响线的方程必须分段求出？

4-5 只有在叠加原理成立的条件下，才能引入影响线的概念，对吗？由此说明影响线的应用条件。

§4-4 思考题

4-6 桁架的影响线有什么特点？

4-7 为什么作桁架影响线时，要注意区分桁架是下弦承载还是上弦承载？在什么情况下两种承载方式的影响线彼此相同。

§4-5 思考题

4-8 在用机动法作影响线时，说明式(4-3)中函数$\delta_P(x)$的定义。在荷载直接作用和荷载由结点传递两种情况下，δ_P有何区别？在上弦承载桁架和下弦承载桁架中，δ_P有何区别？

4-9 说明为什么静定多跨梁附属部分的内力(或支座反力)影响线在基本部分上的线段与基线重合？

§4-6 思考题

4-10 试说明在一组移动的集中荷载作用下，要确定某量Z的最不利荷载位置时用到的"临界位置"和"临界荷载"的含义。

综合思考讨论题

以下各个问题可以进行讨论或用来自学总结：

4-11 影响线和内力图从图形的形状上看有些情况下是相似的，但实质上它们是完全不同的两个问题。读者可以从它们的含义、单位、作法等方面对二者的不同进行比较，并可以列出对照表。这样，不仅明确了影响线的基本概念，而且又进一步认清了影响线和内力图作法的特点。

4-12 对于影响线这一章内容，有的结构力学教材把它安排在静定结构受力计算之前，有的教材把它安排在静定结构受力计算和超静定结构计算之间，还有的教材把它安排在超静定结构计算之后。通过影响线这一章的学习，你能否说出来上述三种安排方法都是从什么角度考虑的？你自己认为以何者为好？

4-13 作影响线的方法有静力法和机动法。你是否能总结一下这两种方法各自的特点和长处？特别要注意能否在解同一个题目时，同时应用静力法和机动法作影响线，请你举出一个联合运用两个方法解题的例子。

4-14 本章单位移动荷载一般都是指竖向的，如果单位移动荷载是水平方向的或斜向的是否也可以作结构某项内力(或某个支座反力)的影响线？如果可以作的话，其含义和作法与单位竖向移动荷载作用下的影响线有何异同？

4-15 如何求对于桁架中某量(如某杆轴力)的荷载最不利位置？

4-16 移动荷载含有均布荷载时如何确定荷载最不利位置？

习 题

4-1 试用静力法作图中：

(a) F_{yA}、M_A、M_C 及 F_{QC} 的影响线。

(b) 斜梁 F_{yA}、M_C、F_{QC}、F_{NC} 的影响线。

4-2 试用静力法作图中 F_{RA}、F_{QB}、M_E、F_{QE}、F_{RC}、F_{RD}、M_F、F_{QF} 的影响线。

附属部分(AB)各量的影响线与简支梁相同,且在基本部分(BD)无竖距;

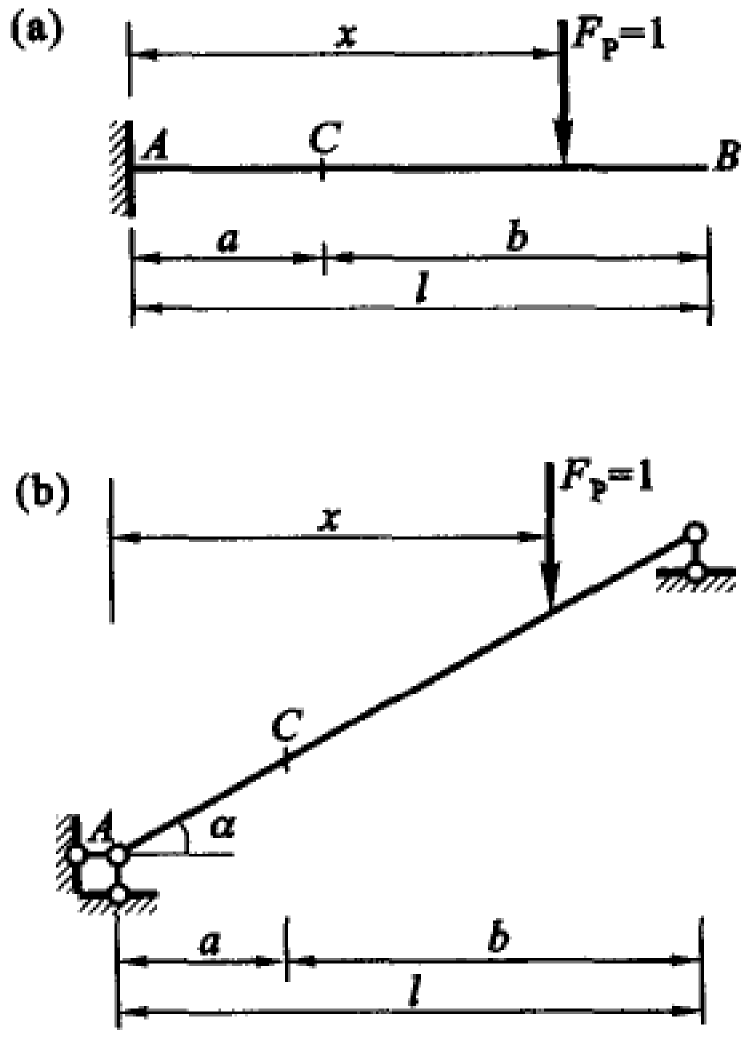
基本部分(BD)各量的影响线在 BD 段与伸臂梁 BD 相同,在 AB 段为一直线。

4-3 试用静力法作图示刚架 M_A、F_{yA}、M_K、F_{QK} 的影响线。设 M_A、M_K 均以内侧受拉为正。

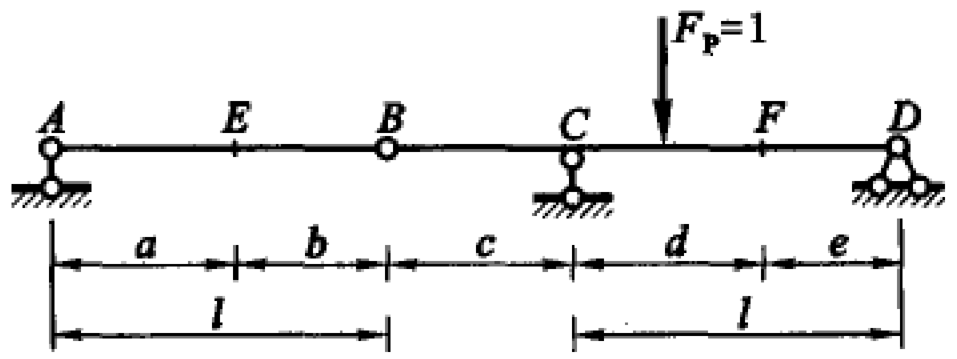
4-4 试用机动法作图中 M_E、F_{QB}^{L}、F_{QB}^{R} 的影响线。注意:

(1) δ_Z 是广义位移,必须与撤去的约束相应。

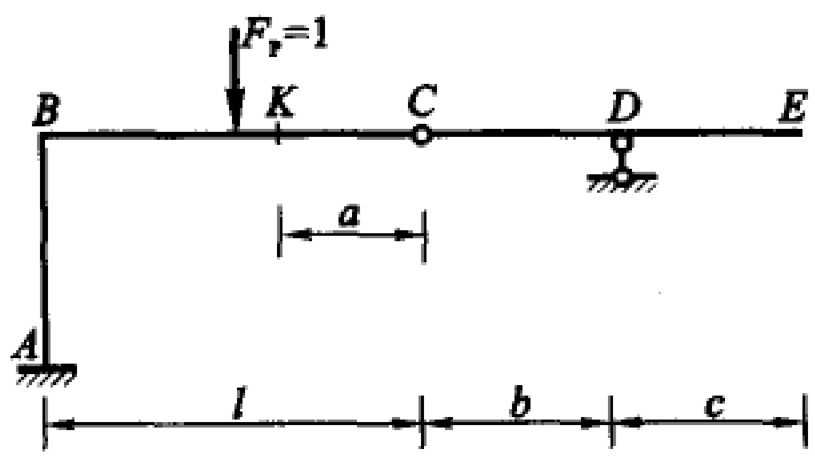
(2) $\delta_P(x)$ 必须符合约束条件。



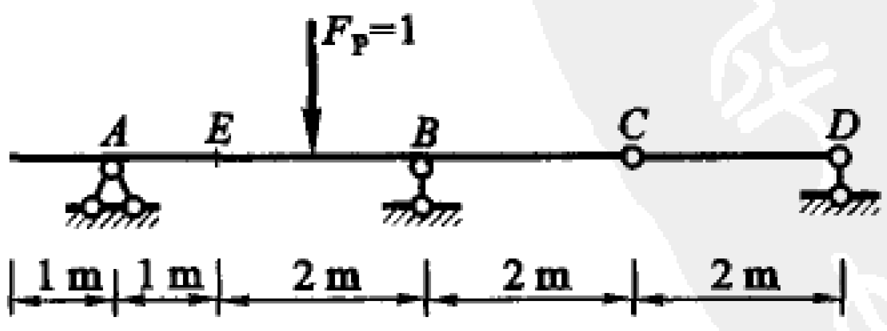
题 4-1 图



题 4-2 图



题 4-3 图



题 4-4 图

4-5 试用机动法作图中:

(a) M_C、F_{QC}的影响线。

注意：主梁虚位移图与荷载作用点位移图的区别。

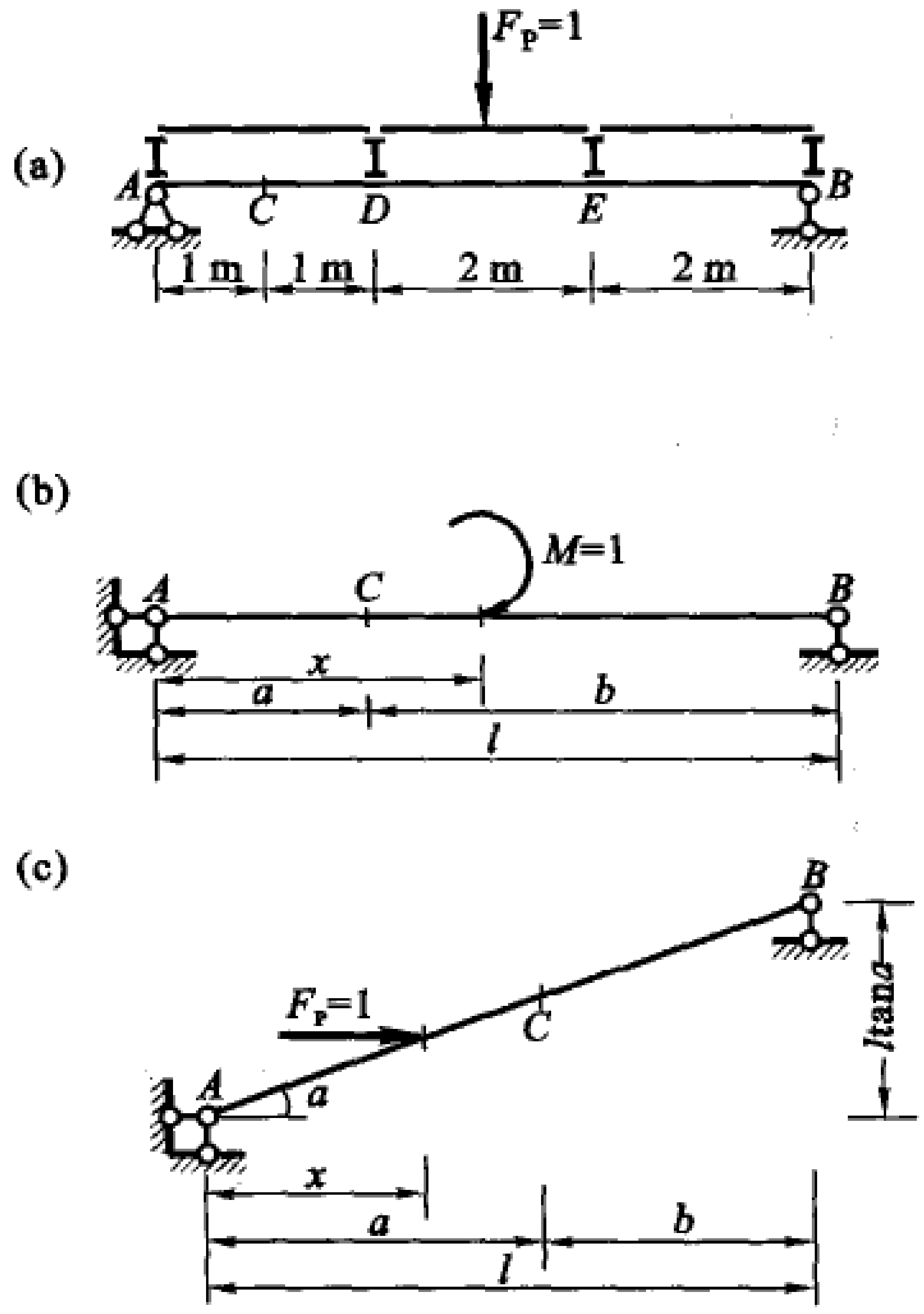
(b) 单位移动力偶 $M=1$ 作用下 F_{RA}、F_{RB}、M_C、F_{QC}的影响线。

注意：与 $M=1$ 相应的位移是转角 $\theta(x)$，$\theta(x)$与 $F_P=1$ 作用下 $\delta_P(x)$的关系为

$$\theta(x)=\frac{d\delta_P(x)}{dx}$$

(c) 单位水平移动荷载作用下 F_{xA}，F_{yA}，M_C，F_{QC}的影响线。

注意：$\delta_P(x)$的方向必须与荷载方向一致，故应在位移图中找出水平位移分量。



题 4－5 图

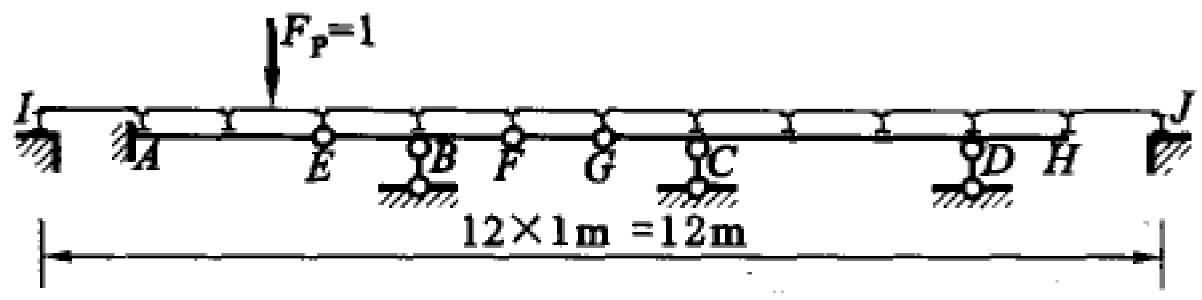
4－6　试用静力法作题 4－5b、c。

4－7　试用静力法作图示静定多跨梁 F_{RA}、F_{RC}、F^L_{QB}、F^R_{QB}和 M_F、F_{QF}、M_G、F_{QG}的影响线。



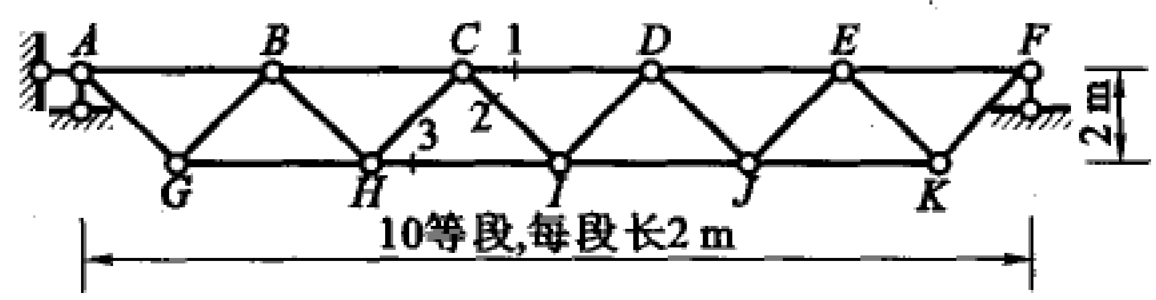
题 4－7 图

4-8 试用静力法作图示静定多跨梁 F_{RA}、F_{RB}、M_A 的影响线。



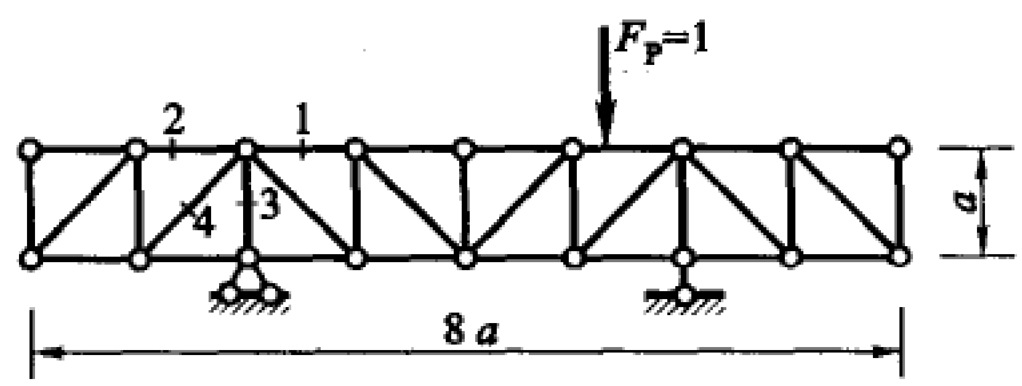
题 4-8 图

4-9 试用静力法作图示桁架轴力 F_{N1}、F_{N2}、F_{N3} 的影响线(荷载分为上承、下承两种情形)。



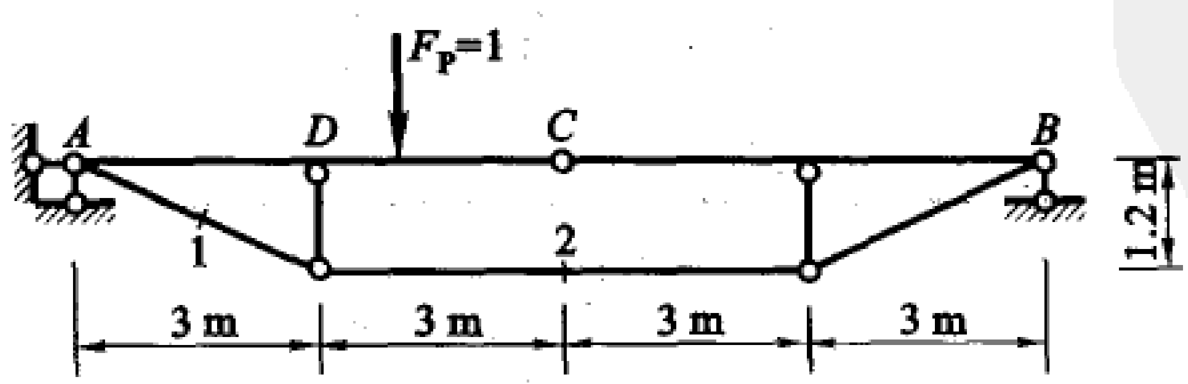
题 4-9 图

4-10 试作图示桁架轴力 F_{N1}、F_{N2}、F_{N3}、F_{N4} 的影响线。



题 4-10 图

4-11 试作图示组合结构 F_{N1}、F_{N2}、F_{NDA}、M_D、F_{QD}^L、F_{QD}^R 的影响线。



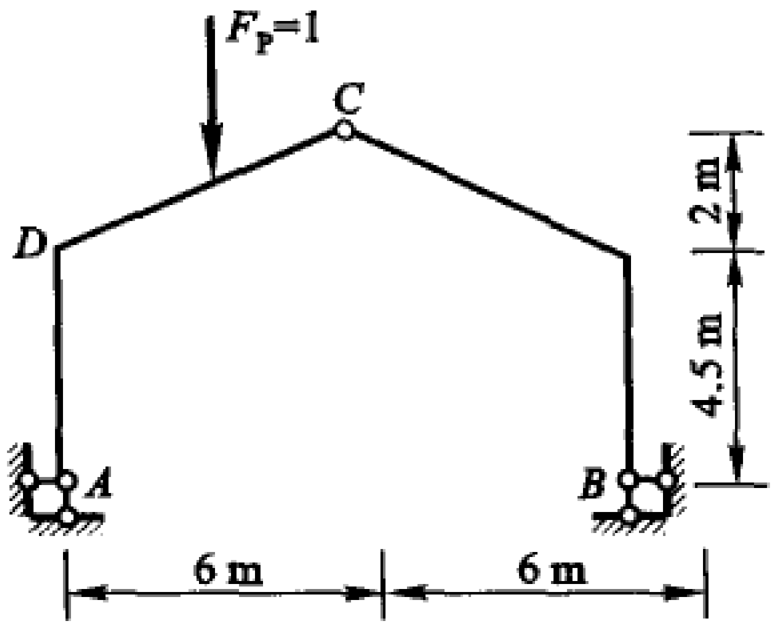
题 4-11 图

4-12 试作图示门式刚架 M_D、F_{QDA}、F_{QDC} 的影响线,单位竖向荷载沿斜梁移动。

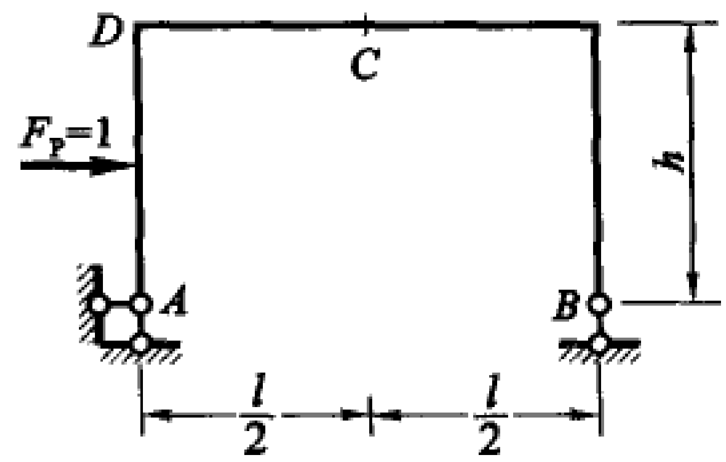
4-13 试作图示刚架 M_C、F_{QC} 的影响线,单位水平荷载沿柱高移动。

4-14 试用机动法重作题 4-7、4-8。

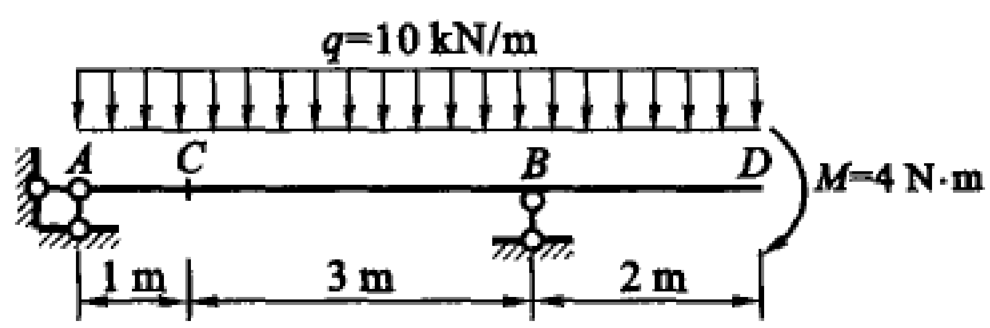
4-15 试用影响线，求在所示荷载作用下的 F_{RA}、F_{RB}、F_{QC}、M_C。



题 4-12 图

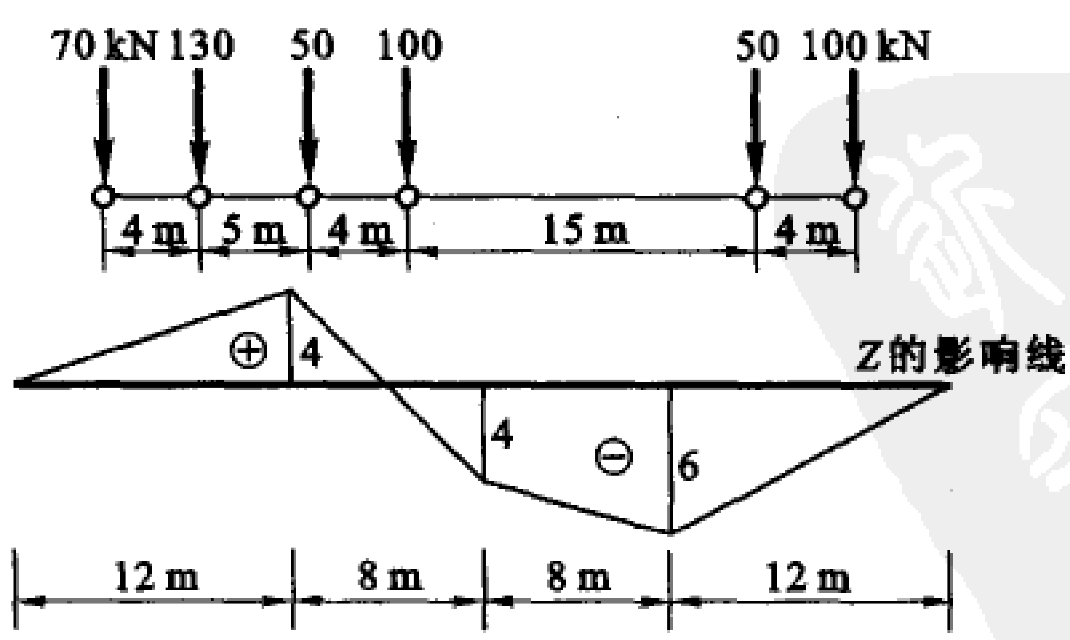


题 4-13 图



题 4-15 图

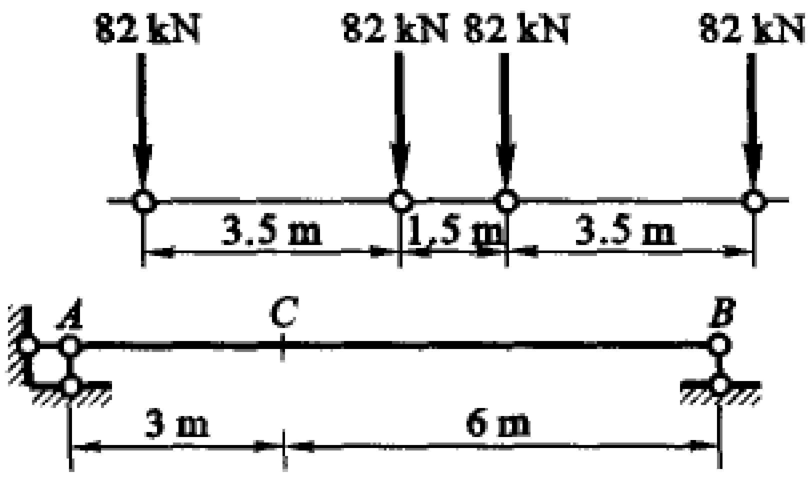
4-16 试求图示车队荷载在影响线 Z 上的最不利位置和 Z 的绝对最大值。



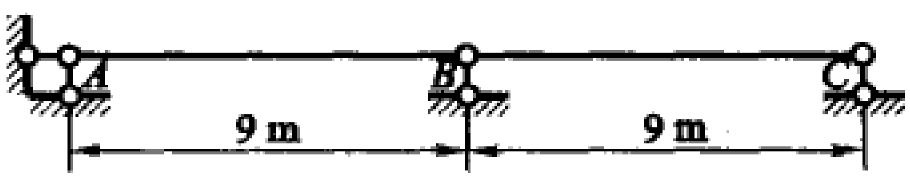
题 4-16 图

4-17 两台吊车如图所示，试求吊车梁的 M_C、F_{QC} 的荷载最不利位置，并计算其最大值（和最小值）。

4－18 两台吊车同上题，试求图示支座 B 的最大反力。



题 4－17 图



题 4－18 图

第5章
虚功原理与结构位移计算

本章处在静定结构分析与超静定结构分析的交界处，起着承上启下的作用。

本章包含两部分内容：

第一部分（§5－1～§5－6）介绍静定结构在荷载和温度等因素作用下的位移计算公式。前面几章已经讨论了静定结构的内力计算（包括影响线），本章将讨论静定结构的位移计算。内力计算和位移计算是结构力学中的两类基本问题，因此从学习的基本要求看，关于静定结构部分已经讨论得比较完备，可以打上句号。

第二部分（§5－8～§5－9）简略介绍变形体虚功原理和虚功互等定理及其应用。

§5－1 应用虚力原理求刚体体系的位移

1. 推导位移计算一般公式的基本思路

本节及§5－2讨论的主题是建立静定结构位移计算的一般公式（关于超静定结构位移计算方法将在§6－9中进一步讨论）。按照由浅入深的原则，将推导过程分解成以下三步：

第一步（§5－1），讨论静定结构由于支座移动而引起的位移计算问题。这是一个刚体体系的位移问题。将应用刚体体系虚力原理（虚功原理的一种应用形式）导出其位移计算公式。

第二步（§5－2），讨论静定结构由于局部变形（例如结构中某个微段产生拉伸、剪切、弯曲变形，而结构其他部分没有变形，仍为刚体）而引起的位移。这仍是一个刚体体系的位移问题，仍由刚体体系虚力原理导出其位移计算公式。

第三步（§5－2），讨论静定结构由于整体变形（结构杆件中各个微段都产生变形）而引起的位移。应用第二步导出的关于局部变形引起的位移计算公式，再应用叠加原理，即可得到关于整体变形引起的位移计算公式，这就是静定结构位移计算的一般公式。

上述推导过程的基本思路是“化整为零和积零为整”：把结构的整体变形分解为局部变形，先应用刚体体系的虚力原理导出局部变形的位移公式，然后应用

叠加原理，导出整体变形时的位移公式。

2. 结构位移计算概述

计算结构的位移，有两个目的，一个目的是验算结构的刚度，即验算结构的位移是否超过允许的位移限值（例如吊车梁允许的挠度限值通常规定为跨度的1/600）。另一个目的是为超静定结构的内力分析打下基础。因为在超静定结构的内力分析中，不仅要考虑平衡条件，而且还必须考虑变形方面的条件。

产生位移的原因主要有下列三种：

(1) 荷载作用。

(2) 温度变化和材料胀缩。

(3) 支座沉降和制造误差。

结构各点产生位移时，结构内部是否也同时产生应变呢？这里有两种情况：

例如，在图 5－1 中，如果静定多跨梁的支座 A 有给定的位移 c_A，那么杆 AC 将绕 B 点转动，杆 CD 绕 D 点转动。这时，各杆虽有刚体位移，而应变却等于零。

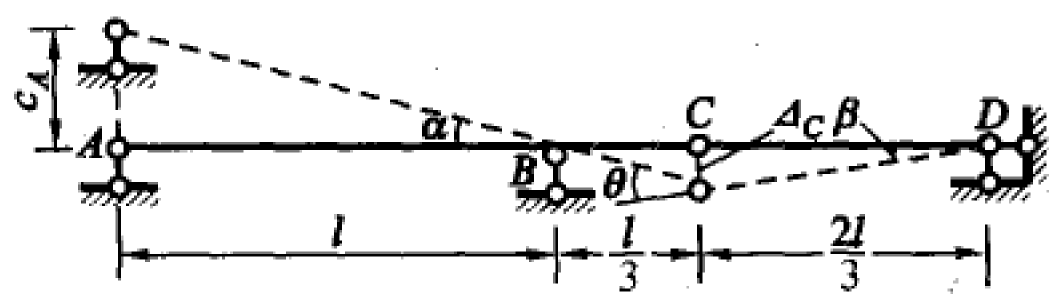


图　5－1

又如，在图 5－2 中，简支梁在荷载 q 作用下，各点产生线位移（挠度 w）；同时，梁内由于承受弯矩 M 而产生曲率 κ $\left(\text{曲率半径 } R=\frac{1}{\kappa}\right)$和应变 ε（一边纤维拉伸，一边纤维压缩）。

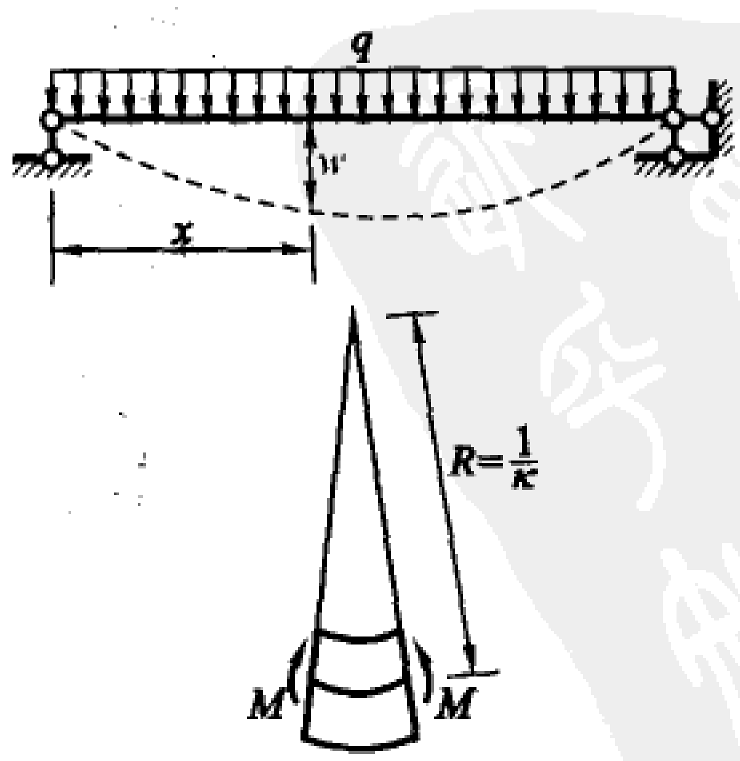


图　5－2

在上面两个例子中，前一个是刚体体系的位移问题（有位移，但无应变）；后一个是变形体体系的位移问题（有位移，也有应变）。

计算位移的问题原是一个几何问题，因此可采用几何方法求解。

在图 5－1 所示刚体体系位移问题中，如果支座位移 c_A 是一个微量，则根据几何关系即可直接求出下列角位移和线位移：

杆 AC 的角位移　　$\alpha=\frac{c_A}{l}$

C 点的线位移　　$\Delta_C=\alpha\times\frac{l}{3}=\frac{c_A}{3}$　　(5-1a)

杆 CD 的角位移　　$\beta=\Delta_C\Big/\left(\frac{2l}{3}\right)=\frac{c_A}{2l}$　　(5-1b)

图 5-2 所示变形体体系位移问题，实际上也是一个几何问题。根据曲率与挠度之间的几何关系（在小挠度情况下）：

$$\kappa=\frac{1}{R}=\left|\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right|$$

即可由曲率 κ 求出挠度 w。

位移计算虽然是一个几何问题，但最好的解法并不是几何法，而是虚功法（这里虚功法的应用形式称为虚力法）。

3．虚功原理的另一种应用形式——虚力原理（虚设力系，求位移）

在§3-8 中，讨论了虚功原理及其在静定结构内力计算中的应用，并且强调指出：其中的位移与力系是独立无关的两种状态。

既然位移与力系无关，因此不仅可以把位移看作虚设的（参见§3-8）；而且也可以把力系看作虚设的，本节正是利用虚功原理的这一应用形式，求刚体体系的位移。

例如，图 5-3a 中的静定梁，支座 A 向上移动一个已知距离 c_1，现在拟求 B 点的竖向位移 Δ。

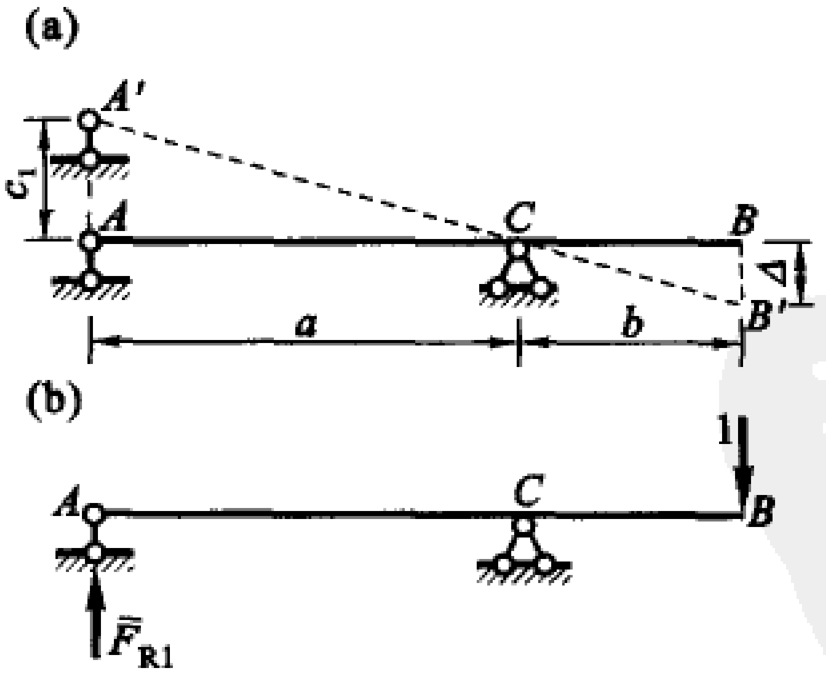


图　5-3

对图 5-3a 中的位移状态应用虚功原理。这里，位移状态是给定的，力系则可根据我们的意图来虚设。意图是：为了便于求出 Δ，希望在虚功方程中除了拟

求的未知位移 Δ 外，不再包含别的未知位移。因此，在选择虚力系时应当只在拟求位移 Δ 的方向设置单位荷载①，而在其他处不再设置荷载。这个单位荷载与相应的支座反力组成一个虚设的平衡力系，如图 5－3b 所示。根据平衡条件，可求出支座 A 的反力 $\bar{F}_{R1}=-\frac{b}{a}$。

令图 5－3b 中的虚设平衡力系在图 5－3a 中的实际刚体位移上作虚功，即得出虚功方程如下：

$$\Delta\times1+c_1\bar{F}_{R1}=0 \tag{5-2}$$

由于 $\bar{F}_{R1}=-\frac{b}{a}$，故得

$$\Delta=-c_1\bar{F}_{R1}=\frac{b}{a}c_1$$

以上就是应用虚功原理求未知位移 Δ 的过程。从中可归纳出如下几点：

这里，是在虚设力系（图 5－3b）与给定位移（图 5－3a）之间应用虚功原理。这是虚功原理的另一种应用形式，称为虚力原理。

基本方程（5－2）形式上是虚功方程，实质上是未知位移 Δ 与已知位移 c_1 之间的几何方程。

关键步骤是在拟求位移 Δ 方向虚设单位荷载，并利用平衡条件求出与 c_1 相应的支座反力 $\bar{F}_{R1}$。因此，这个解法称为单位荷载法，其特点是采用静力平衡方法来解几何问题。

与§3－8 对照，用对偶的方式来叙述虚功原理的两种应用形式：相应的两类问题——求未知力和求未知位移，相应的两种解法——单位支座位移法和单位荷载法。清楚地看出，二者之间存在着多方面的对偶性。对偶性把两个不同的领域联系在一起。抓住对偶性这条线索，就会比较顺利的由比较熟悉的领域（虚功法求未知力）转到新的领域（虚功法求位移）。

4. 支座移动时静定结构的位移计算

现在应用单位荷载法讨论支座移动时静定结构的位移计算，并结合图5－1来说明。在图 5－1 中，支座 A 有给定的竖向位移 c_A，现在拟求：

(1) C 点的竖向位移 Δ_C。

(2) 杆 CD 的转角 β。

首先要说明一点：在静定结构中，支座移动时并不引起内力，也不引起应变。因此，支座移动时静定结构的位移计算问题都是刚体体系的位移计算问题，因而可用刚体体系虚功原理来求解。

---

① 参见本书符号表说明 3。

应用单位荷载法求不同的位移时，应当选择不同的单位荷载。虚设单位荷载的目的是希望在虚功方程中正好包含拟求的未知位移。因此，虚设的单位荷载应当正好是拟求位移相应的单位荷载，也就是说，这个单位荷载所作的虚功在数值上应当正好等于拟求的位移。例如，

(1) 求 C 点的竖向位移 Δ_C 时，应在 C 点加一个单位竖向荷载(图 5-4a)。

(2) 求杆 CD 的转角 β 时，应在杆 CD 上加一个单位力偶荷载(图 5-4b)，因为力偶作的功等于力偶矩与转角的乘积。

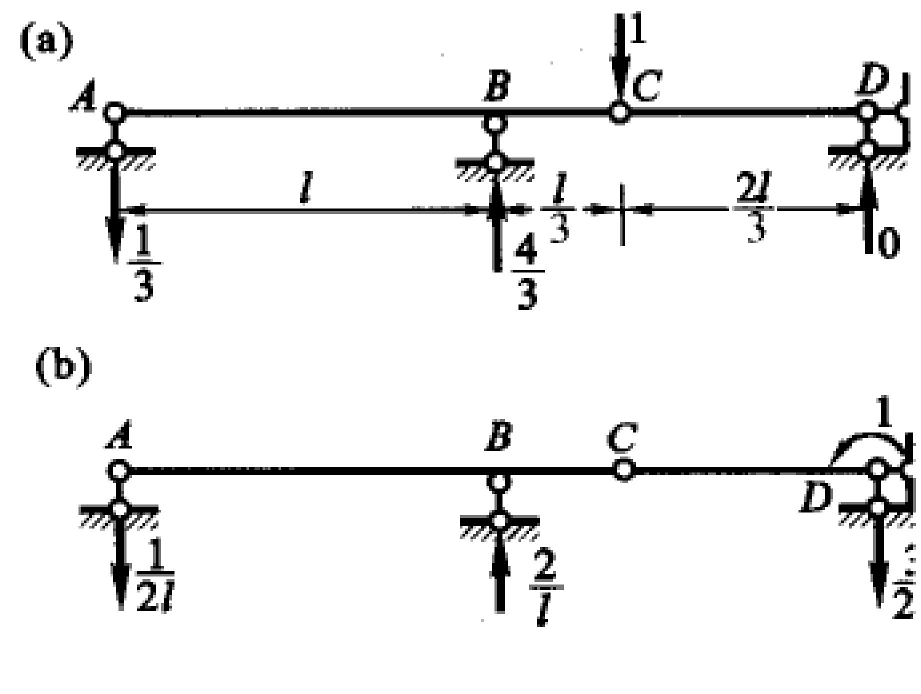


图　5-4

现分别使图 5-4a、b 中的两种虚设力系在图 5-1 中的实际位移状态上作虚功，得出虚功方程如下：

$$1\cdot\Delta_C-\frac{1}{3}\cdot c_A=0$$

$$1\cdot\beta-\frac{1}{2l}\cdot c_A=0$$

其中支座 A 的反力作负功(因为反力与位移 c_A 的方向相反)，支座 B 和 D 的反力都不作功(因为支座 B 和 D 的位移为零)。

解上述方程得

$$\Delta_C=\frac{1}{3}c_A$$

$$\beta=\frac{1}{2l}c_A$$

求得的位移都是正值，表明位移的实际方向与所设单位荷载的方向一致。这里，用虚功原理得出的结果与式(5-1)中根据几何关系得出的结果相同。

归纳起来，当支座有给定位移时，静定结构的位移可用虚力原理求出。设支座 K 有给定位移 c_K，且 $K=1,2,\cdots,n$。计算步骤如下：

(1) 沿拟求位移 Δ 方向虚设相应的单位荷载，并求出单位荷载作用下的支座反力 $\overline{F}_{RK}$。

(2) 令虚设力系在实际位移上作虚功，写出虚功方程：

$$1\cdot\Delta+\sum\overline{F}_{RK}c_K=0 \tag{5-3}$$

式中 $\overline{F}_{RK}c_K$ 是支座反力 $\overline{F}_{RK}$ 在相应位移 c_K 上作的虚功，当二者的方向一致时，乘积为正。$\sum$是指对 K 求和。

(3) 由虚功方程，解出拟求位移为

$$\Delta=-\sum\overline{F}_{RK}c_K \tag{5-4}$$

如果求得的位移 Δ 为正值，表明位移的实际方向与所设单位荷载方向一致。式(5-4)就是计算静定结构由支座移动引起的位移的一般公式。

§5-2 结构位移计算的一般公式

结构发生位移时，在一般情况下，结构内部也同时产生应变。因此，结构的位移计算问题，一般属于变形体体系的位移计算问题。计算变形体体系的位移要复杂一些，采用的方法仍然以虚功法最为普遍。

计算变形体体系的位移，推导结构位移计算的一般公式，可按下列步骤进行：先导出局部变形时的位移公式，然后应用叠加原理，导出整体变形时的位移公式。

1. 局部变形时静定结构的位移计算举例

现在考虑静定结构由于局部变形而引起的位移。设静定结构中某个微段出现局部变形(由于制造误差或其他原因造成微段的拉伸、剪切、弯曲变形)，微段两端相邻截面出现相对位移(线位移、角位移)，而结构的其他部分没有变形、仍旧是刚体。因此，当某个微段有局部变形时静定结构的位移计算问题可以归结为当该处相邻截面有相对位移时刚体体系的位移计算问题。显然，这个问题同样可应用虚力原理按上述计算步骤求解。现举例如下。

例 5-1 图 5-5a 所示悬臂梁在 B 处两个相邻截面有相对转角 θ。试求 A 点的竖向位移 Δ。

解 图 5-5a 中的实际位移状态可改用图 5-5b 来表示。这里，在 B 处加铰，把实际位移状态明确地表示为刚体体系的位移状态。

为了求未知位移 Δ，可虚设力系如图 5-5c 所示。这里，在 A 点沿拟求位移 Δ 的方向虚设单位荷载。此外，在铰 B 处还必须虚设一对弯矩 $\overline{M}$。根据平衡条件可求出 $\overline{M}$ 的数值如下：

$$\overline{M}=1\cdot a$$

令图 5-5c 中的平衡力系在图 5-5b 中的实际位移上作功，可写出虚功方程如下：

$$1\cdot\Delta-\overline{M}\cdot\theta=0$$

由此解得

$$\Delta=\overline{M}\theta \qquad (5-5)$$

由此看出，位移 Δ 与截面相对转角 θ 成正比，它们之间的比例系数正好就是虚设单位

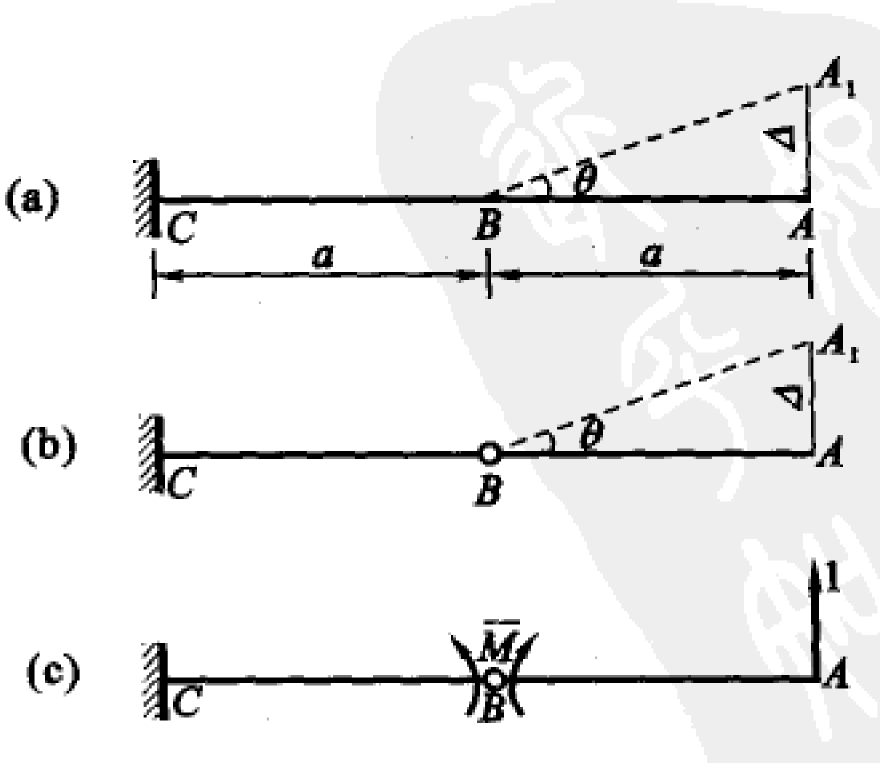


图 5-5

荷载在该截面引起的弯矩 $\bar{M}$。

例 5-2　在图 5-6a 中，截面 B 有相对剪切位移 η，试求 A 点与杆轴成 α 角的斜向位移分量 Δ。

解　图 5-6a 中的实际位移状态可改用图 5-6b 来表示。这里，将截面 B 切开，加上两根平行杆轴的链杆，使能产生相对剪切位移，但不能产生相对轴向位移和相对角位移，从而把实际位移状态明确地表示为刚体体系的位移状态。

虚设力系如图 5-6c 所示。这里，在拟求位移 Δ 方向虚设单位荷载。此外，为了保证刚体体系处于平衡状态，在截面 B 的两侧还需设一对剪力 $\bar{F}_Q$，其数值可根据平衡条件求出：

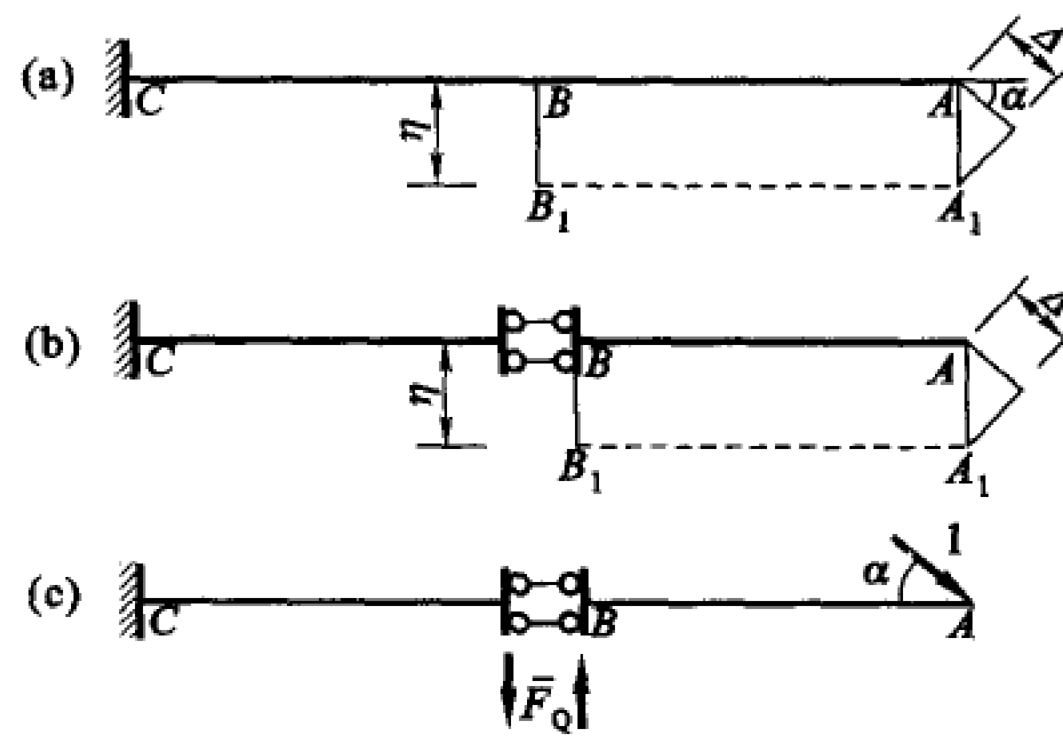


图　5-6

$$\bar{F}_Q = \sin\alpha$$

令图 5-6c 中的平衡力系在图 5-6b 中的实际位移上作功，可写出虚功方程如下：

$$1 \cdot \Delta - \bar{F}_Q \cdot \eta = 0$$

由此解得

$$\Delta = \bar{F}_Q \eta \tag{5-6}$$

由此看出，位移 Δ 与截面相对剪切位移 η 成正比，它们之间的比例系数正好就是虚设单位荷载在该截面引起的剪力 $\bar{F}_Q$。

2. 局部变形时的位移公式

例 5-1 和例 5-2 给出了当结构有局部变形时计算位移的两个算例。现在推导局部变形时计算位移的一般公式。

图 5-7a 所示为局部变形问题的一个典型情况。

悬臂梁除 B 点附近的微段 ds 有局部变形外，结构其他部分没有变形。

微段 ds 局部变形包括三部分：

$$\begin{cases} \text{轴线伸长应变为 } \varepsilon; \\ \text{平均切应变为 } \gamma_0; \\ \text{轴线曲率为 } \kappa\left(\kappa = \dfrac{1}{R}, R \text{ 为轴线变形后的曲率半径}\right)。 \end{cases}$$

现在拟求 A 点沿 α 方向的位移分量 dΔ。

处理这个问题的基本思路是：把局部变形时的位移计算问题转化为刚体体系的位移计算问题。

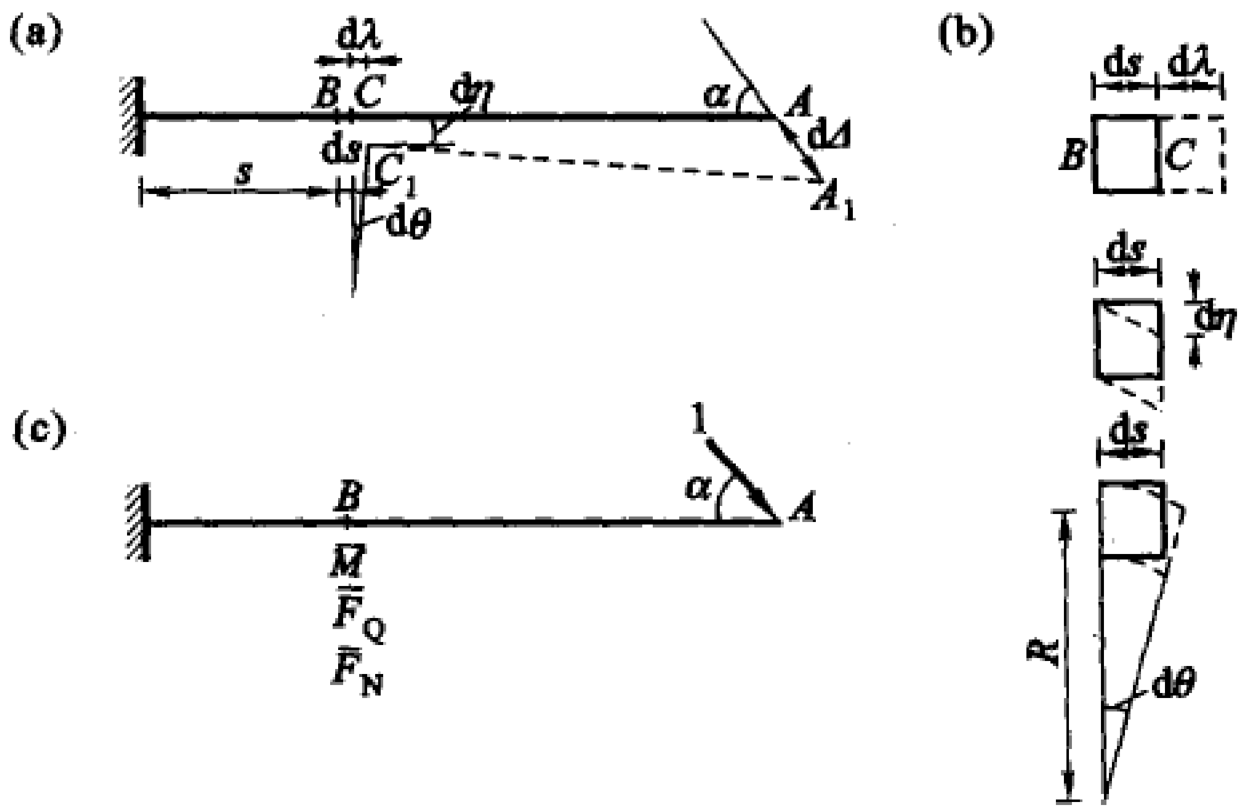


图　5-7

首先，根据微段 ds 的三类变形，可求出微段两端截面的三种相对位移（图 5-7b）：

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{相对轴向位移}, \mathrm{d}\lambda=\varepsilon \mathrm{d}s\\
&\text{相对剪切位移}, \mathrm{d}\eta=\gamma_0 \mathrm{d}s\\
&\text{相对转角}, \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}s}{R}=\kappa \mathrm{d}s
\end{aligned}\right\} \tag{5-7}
$$

相对位移 $\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\eta$、$\mathrm{d}\theta$ 是描述微段总变形的三个基本参数。

其次，将微段变形加以集中化，即 ds 趋于零，但三种相对位移仍存在。这相当于整个结构除截面 B 发生集中变形（即在截面 B 处集中地发生相对位移 $\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\eta$、$\mathrm{d}\theta$）外，其他部分都是刚体，没有任何变形。显然，问题已经转化为刚体体系的位移问题。

最后，应用刚体体系虚功原理，根据截面 B 的相对位移 $\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\eta$、$\mathrm{d}\theta$，可分别求出 A 点的位移 $\mathrm{d}\Delta$。计算结果可参见例 5-1、5-2。将上述结果进行叠加，即得

$$\mathrm{d}\Delta=\overline{M}\mathrm{d}\theta+\overline{F}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}\lambda+\overline{F}_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}\eta \tag{5-8a}$$

或

$$\mathrm{d}\Delta=(\overline{M}\kappa+\overline{F}_{\mathrm{N}}\varepsilon+\overline{F}_{\mathrm{Q}}\gamma_0)\mathrm{d}s \tag{5-8b}$$

这就是局部变形的位移公式，其中 $\overline{M}$、$\overline{F}_{\mathrm{N}}$、$\overline{F}_{\mathrm{Q}}$ 分别是虚设单位荷载在截面 B 引起的弯矩、轴力和剪力（图 5-7c）。

3. 结构位移计算的一般公式

整个结构的变形是结构各个微段变形的总和。根据叠加原理，整体变形时在结构某点引起的总位移 Δ 可由每个微段变形在该点引起的微小位移 $\mathrm{d}\Delta$ 叠加

得出，即

$$\Delta = \int d\Delta = \int(\overline{M}\kappa + \overline{F}_N\varepsilon + \overline{F}_Q\gamma_0)ds$$

如果结构中含有多个杆件，则上式可写成

$$\Delta = \sum\int(\overline{M}\kappa + \overline{F}_N\varepsilon + \overline{F}_Q\gamma_0)ds \tag{5-9}$$

这里，积分号表示沿杆件长度积分，总和号表示对结构中各杆求和。

如果结构除各微段有变形外，在支座处还有给定位移 c_K，则将式(5－9)与(5－4)的右边叠加，即可得出总的位移

$$\Delta = \sum\int(\overline{M}\kappa + \overline{F}_N\varepsilon + \overline{F}_Q\gamma_0)ds - \sum\overline{F}_{RK}c_K \tag{5-10}$$

这就是结构位移计算的一般公式。在式(5－10)的右边，如果分别保留一项，即

$$\Delta_\kappa = \sum\int\overline{M}\kappa ds \tag{5-11}$$

$$\Delta_\varepsilon = \sum\int\overline{F}_N\varepsilon ds \tag{5-12}$$

$$\Delta_\gamma = \sum\int\overline{F}_Q\gamma_0 ds \tag{5-13}$$

$$\Delta_c = -\sum\overline{F}_{RK}c_K \tag{5-14}$$

则它们分别表示单独由于弯曲变形 κ，轴向变形 ε，剪切变形 γ_0 和支座位移 c_K 对位移的影响。

式(5－10)是根据刚体体系虚力原理和叠加原理得出的，它适用于微小变形的情况。

式(5－10)虽然是根据虚力方程导出的，但实质上它是一个几何方程，它给出了已知变形(内部应变 κ、ε、γ_0 和支座位移 c_K)与拟求位移 Δ 二者之间的几何关系。

式(5－10)是一个普遍性公式，它的普遍性表现在下列几个方面：

从变形类型来看，它既可以考虑弯曲变形，也可以考虑拉伸或剪切变形。

从变形因素来看，它既可以考虑荷载引起的位移，也可以考虑温度或支座移动引起的位移。

从结构类型来看，它可用于梁、刚架、桁架、拱等各类型式的结构。上面是结合静定结构讨论的，但式(5－10)也可用于超静定结构。关于超静定结构的位移计算在§6－9中有补充说明。

从材料性质来看，它可用于弹性材料，也可用于非弹性材料。

在下面各节中将讨论这个普遍公式在不同情况下的具体应用。

最后指出，结构位移计算的一般公式(5－10)还可应用变形体虚功原理导出(参见§5－8)。实际上，式(5－10)就是变形体虚功原理的一种表示形式。为了

说明这一点，将式(5－10)改写为下列形式：

$$1\cdot\Delta+\sum\overline{F}_{RK}c_K=\sum\int(\overline{M}\kappa+\overline{F}_N\varepsilon+\overline{F}_Q\gamma_0)\mathrm{d}s \qquad (5-15)$$

上式左边是结构的虚设外力（单位荷载和支座反力 $\overline{F}_{RK}$）在给定位移上所作的虚功的总和，简称为外虚功 W；上式右边是各微段 $\mathrm{d}s$ 两侧截面上应力合力 $\overline{M}$、$\overline{F}_N$、$\overline{F}_Q$（对微段是外力，而对结构则是内力）在给定变形 κ、ε、γ_0 上所作虚功的总和，简称为内虚功 W_i。因此，式(5－10)可表示为

$$W=W_i \qquad (5-16)$$

这就是变形体的虚功方程。

4．结构位移计算的一般步骤

已知结构各微段的应变 κ、ε、γ_0 和支座的位移 c_K，现在拟求结构某点沿某方向的位移 Δ，其计算步骤如下：

(1) 在某点沿拟求位移 Δ 的方向虚设相应的单位荷载。

(2) 在单位荷载作用下，根据平衡条件，求出结构内力 $\overline{M}$、$\overline{F}_N$、$\overline{F}_Q$ 和支座反力 $\overline{F}_{RK}$。

(3) 最后根据公式(5－10)可求出位移 Δ。

在式(5－10)的右边有四个乘积：$\overline{M}\kappa$、$\overline{F}_N\varepsilon$、$\overline{F}_Q\gamma_0$，$\overline{F}_{RK}c_K$，它们都是力与变形之间的乘积。当力与变形的方向一致时，则乘积为正（例如，当 $\overline{M}$ 与 κ 使微体的同侧纤维受拉时，则乘积 $\overline{M}\kappa$ 为正）。

由式(5－10)求得的 Δ 如果是正值，则表明位移 Δ 的实际方向与所设单位荷载方向一致。

5．广义位移的计算

式(5－10)中的拟求位移 Δ 可以引申理解为广义位移。它可以表示结构某点沿某方向的线位移、某截面的角位移、某两个截面的相对位移等。因此，在应用式(5－10)求广义位移时，必须根据广义位移的性质虚设广义单位荷载。

例如，图5－8a所示为一简支梁，在弯曲变形时，截面 A 产生顺时针转角 θ_A，截面 B 产生反时针转角 θ_B，以 Δ 表示其相对转角，则

$$\Delta=\theta_A+\theta_B$$

这里，θ_A 以顺时针转向（↷）为正，θ_B 以反时针转向（↶）为正，而 Δ 以（↶↷）为正。相对转角 Δ 是广义位移的一个例子，它是由两个角位移 θ_A 与 θ_B 组成的，也可称为组合位移。

求这一广义位移时，怎样虚设广义单位荷载呢？这里，广义单位荷载所起的作用与单位荷载所起的作用是相同的，就是要在虚功方程中引出拟求位移，使外力虚功具有如下的简单形式

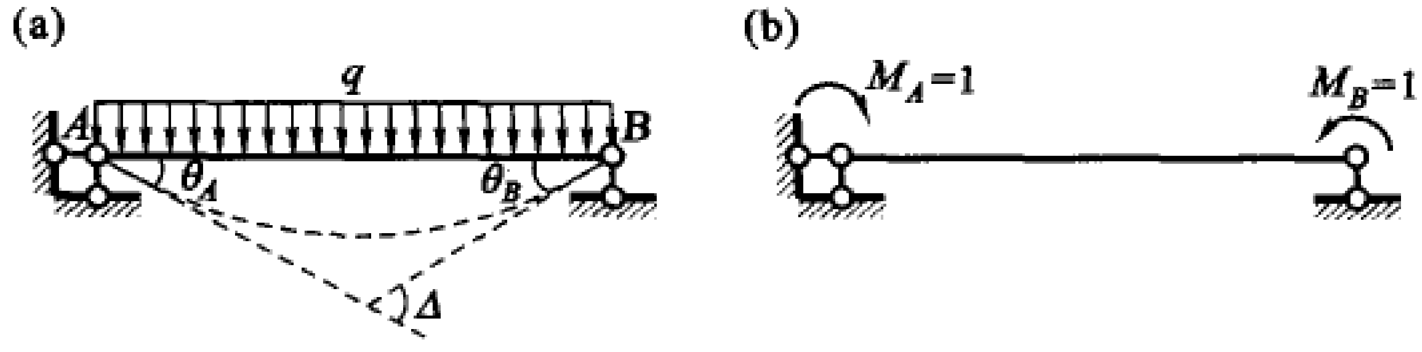


图　5-8

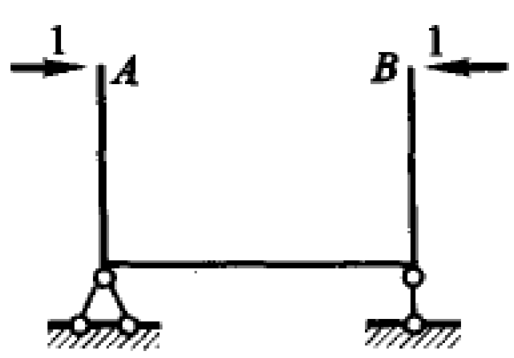
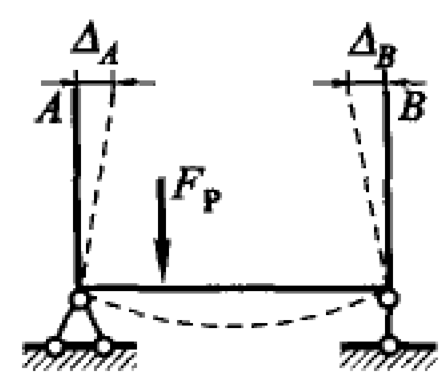
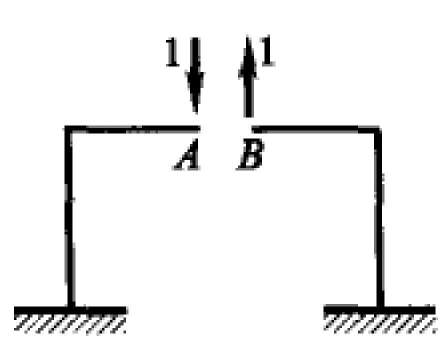
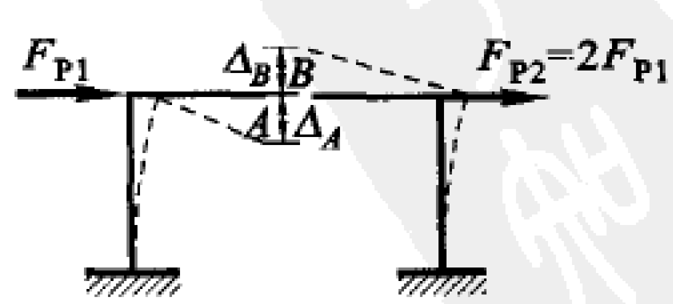
$$W=1\cdot\Delta \qquad (a)$$

当拟求位移 Δ 是由两个转角 θ_A 和 θ_B 组成的广义位移时，与之相应，广义单位荷载也是由两个相应的反向单位力偶 $M_A=1$ 和 $M_B=1$ 所组成(图 5-8b)。这时，它所作的外力虚功

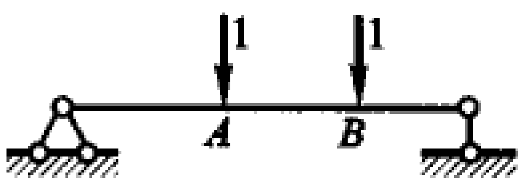
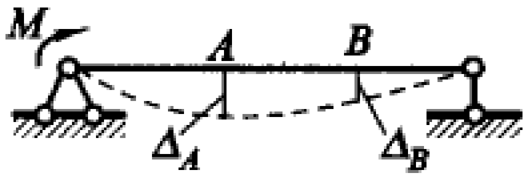
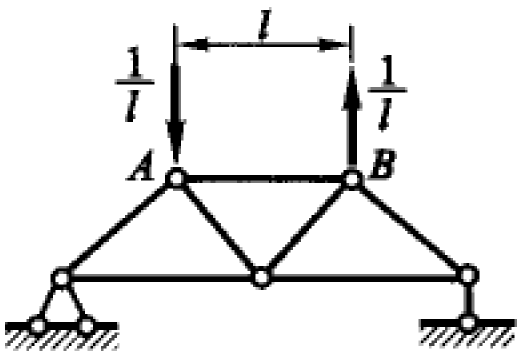
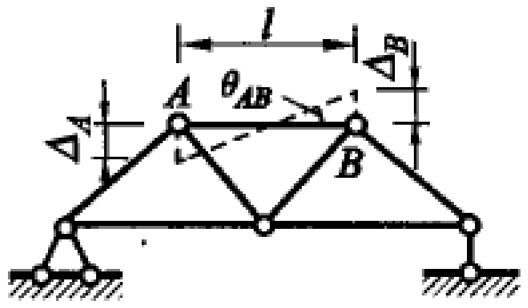
$$W=1\cdot\theta_A+1\cdot\theta_B=1\cdot(\theta_A+\theta_B)=1\cdot\Delta$$

表 5-1 列举了一些例子，说明广义位移与广义单位荷载之间的相应关系。由此可以看出，这些广义单位荷载所作的外力虚功都具有式(a)所示的简单形式。

表 5-1　广义位移和广义单位荷载示例

	虚设的广义单位荷载	拟求的广义位移
1	A、B 两点处一对方向相反的水平单位力 	A、B 两点的水平相对位移 $\Delta_{AB}=\Delta_A+\Delta_B$  (虚线所示位移状态由荷载 F_P 产生)
2	A、B 两点处一对方向相反的竖向单位力 	A、B 两点的竖向相对位移 $\Delta_{AB}=\Delta_A+\Delta_B$  (虚线所示位移状态由 F_{P1} 和 F_{P2} 产生)

续表

	虚设的广义单位荷载	拟求的广义位移
3	A、B 两点处一对方向相同的竖向单位力 	A、B 两点的竖向位移之和 $\Delta_{AB}=\Delta_A+\Delta_B$  （虚线所示位移状态由 M 产生）
4	AB 杆上的单位力偶 	AB 杆的转角 $\theta_{AB}=\dfrac{\Delta_A+\Delta_B}{l}$ 

最后指出：在位移计算中，要特别强调虚设力和拟求位移之间应符合相应关系，即共轭关系。这里，“相应”和“共轭”关系是从虚功角度确定的。如果力 F 在位移 Δ 上所作的虚功 W 正好由下式表示：

$$W=F\Delta \tag{5-17}$$

则称力 F 是位移 Δ 的共轭力，也称位移 Δ 是力 F 的共轭位移。反之，如果虚功表示式与上式不同，则它们之间就不存在共轭关系（相应关系）。

同样，广义力 F 和广义位移 Δ 之间是否存在共轭关系（相应关系），也是指它们所作的虚功是否可用式(5－17)来表示。

§5－3　荷载作用下的位移计算

1．荷载引起的位移的计算公式

现在应用一般公式(5－10)或(5－9)导出荷载引起的位移的计算公式。在本节中，只讨论下列情况：假设结构是静定的，而且材料是弹性的。

计算荷载作用下的位移时，可按§5－2 中归纳的一般步骤进行。这里，只需补充一点，在本节中假设式(5－9)中的应变 κ、ε、γ_0 是由荷载引起的，可按下列顺序求出：

荷载——内力——应力——应变

下面列出在荷载作用下，静定结构的弹性位移的具体计算步骤：

(1) 根据荷载情况，求出结构各截面的弯矩 M_P、轴力 F_{NP}、剪力 F_{QP}。这

里，内力是由荷载引起的，故用下标 P 来表示。

(2) 根据内力，求出相应的弯曲、拉伸和剪切应变：

$$\kappa = \frac{M_P}{EI} \tag{5-18a}$$

$$\varepsilon = \frac{F_{NP}}{EA} \tag{5-18b}$$

$$\gamma_0 = k\frac{F_{QP}}{GA} \tag{5-18c}$$

这里，E 和 G 分别为材料的弹性模量和剪切弹性模量；A 和 I 分别是杆件截面的面积和惯性矩；

EI、EA、GA 分别是杆件截面的抗弯、抗拉、抗剪刚度；k 是一个与截面形状有关的系数，将在后面给出。

(3) 将式(5-18)代入式(5-9)，即得到在荷载作用下弹性位移的一般公式

$$\Delta = \sum\int\frac{\bar{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s + \sum\int\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}\mathrm{d}s + \sum\int\frac{k\bar{F}_Q F_{QP}}{GA}\mathrm{d}s \tag{5-19}$$

注意，在式(5-19)中共有两类内力：

M_P, F_{NP}, F_{QP}——实际荷载引起的内力；

$\bar{M}, \bar{F}_N, \bar{F}_Q$——虚设单位荷载引起的内力。

关于内力的正负号可规定如下：

轴力 $F_{NP}, \bar{F}_N$——以拉力为正；

剪力 $F_{QP}, \bar{F}_Q$——使微段顺时针转动者为正；

弯矩 $M_P, \bar{M}$——只规定乘积 $\bar{M}M_P$ 的正负号。当 $\bar{M}$ 与 M_P 使杆件同侧纤维受拉时，其乘积取正值。

2. 各类结构的位移公式

式(5-19)是静定结构在荷载作用下弹性位移的一般公式。公式右边的第一项表示弯曲变形的影响，第二项表示拉伸变形的影响，第三项表示剪切变形的影响。对于各种特殊的结构形式来讲，这三种影响在位移中所占的比重各不相同，按照保留主要影响忽略次要影响的原则，从式(5-19)可以得到各类特殊结构形式相应的简化公式。

(1) 梁和刚架

在梁和刚架中，位移主要是弯矩引起的，轴力和剪力的影响较小(参见例5-3和例5-10)，因此位移公式可简化为

$$\Delta = \sum\int\frac{\bar{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s \tag{5-20}$$

(2) 桁架

在桁架中，各杆只受轴力，而且每根杆的截面面积 A、轴力 $\bar{F}_N$ 和 F_{NP} 沿杆长一般都是常数，因此位移公式可简化为

$$\Delta=\sum\int\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}ds=\sum\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}\int ds=\sum\frac{\bar{F}_N F_{NP}l}{EA}\tag{5-21}$$

(3) 桁梁混合结构

在桁梁混合结构中，一些杆件主要受弯曲，一些杆件只受轴力，故位移公式可简化为

$$\Delta=\sum\int\frac{\bar{M}M_P}{EI}ds+\sum\frac{\bar{F}_N F_{NP}l}{EA}\tag{5-22}$$

(4) 拱

在拱中，当压力线与拱的轴线相近(即二者的距离与杆件的截面高度为同量级)时，应考虑弯曲变形和拉伸变形对位移的影响，即

$$\Delta=\sum\int\frac{\bar{M}M_P}{EI}ds+\sum\int\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}ds\tag{5-23}$$

当压力线与拱轴线不相近时，则只需考虑弯曲变形的影响(参见例 5－5)，即可按式(5－20)计算位移。

3. 截面平均切应变 γ_0 和系数 k

首先，补充说明截面平均切应变 γ_0 的求法。

由式(5－15)看出，微段 ds 的内虚功 dW_i 是由三项所组成，其中第三项是剪力 $\bar{F}_Q$ 所作的内虚功，称为剪切变形虚功 dW_{iQ}，即

$$dW_{iQ}=\bar{F}_Q\gamma_0 ds\tag{a}$$

因此，只需先求出 dW_{iQ}，由此便可求出 γ_0。

下面讨论剪切变形虚功 dW_{iQ}的求法。

图 5－9a 所示为微段 ds 两侧截面上的虚剪力$\bar{F}_Q$(为了清晰起见，两侧截面上的弯矩 $\bar{M}$ 和轴力$\bar{F}_N$ 都未画出)。截面上任一点 y 的切应力$\bar{\tau}$ 可由材料力学公式求出：

$$\bar{\tau}(y)=\frac{\bar{F}_Q S(y)}{Ib(y)}\tag{b}$$

式中 $b(y)$是截面任一点 y 处的截面宽度(截面形状和截面尺寸如图 5－9c 所示)，$S(y)$是 y 点以下(或以上)面积对中性轴 z 的面积矩。通常，切应力 $\bar{\tau}$沿截面高度并不是均匀分布的。

图 5－9b 所示为微段 ds 的实际剪切变形情况。由于切应变 γ 通常沿截面高度也不是均匀分布，因而两侧截面在变形后不再保持为平面。

为了求微段 ds 的剪切变形虚功 dW_{iQ}，可令图 5－9a 中的力系在图 5－9b 中的变形上作虚功。由于 $\bar{\tau}$ 和 γ 沿截面高度都不是均匀分布，因此可先取出高

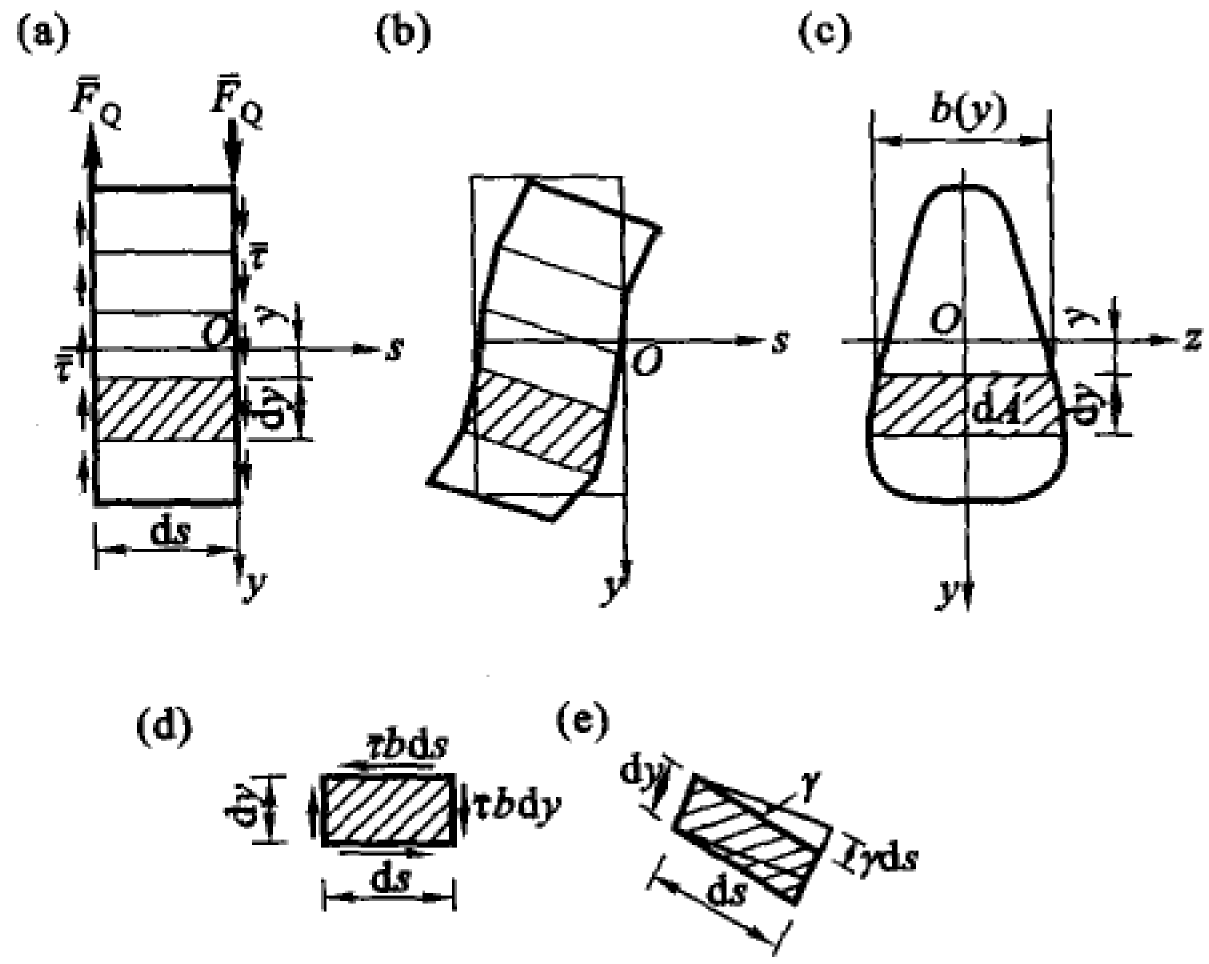


图　5-9

度为 dy 的微小单元来计算。图5-9d所示为微小单元的受力情况，左右侧面上的合力为 $\bar{\tau}b dy=\bar{\tau}dA$（$dA=b dy$ 是微小单元的侧面面积）。

图5-9e所示为微小单元的变形情况，切应变为 γ，左右两侧面的相对剪切位移为 γds。由此可知，微小单元的剪切变形虚功为

$$(\bar{\tau}dA)\cdot(\gamma ds)$$

然后再对整个截面面积 A 进行积分，即得整个微段的剪切变形虚功：

$$dW_{iQ}=ds\cdot\int_A \bar{\tau}\gamma dA$$

将式(b)代入，得

$$dW_{iQ}=\frac{\bar{F}_Q ds}{I}\int_A \frac{S\gamma}{b}dA \tag{c}$$

将式(a)与(c)加以比较，即得

$$\gamma_0=\frac{1}{I}\int_A \frac{S\gamma}{b}dA \tag{5-24}$$

这就是根据截面切应变的分布函数 $\gamma(y)$ 推算平均切应变 γ_0 的换算公式。

从以上的讨论中看出，在弯曲、拉伸、剪切三类变形中，剪切变形的分布情况比较复杂，因而剪切变形虚功 dW_{iQ} 的计算公式[式(c)]也比较复杂。引进平均切应变 γ_0 这个参数，目的是为了使 dW_{iQ} 的表示形式由复杂[式(c)]变成简单[式(a)]。这样做的好处是：形式得到简化，概念更加清晰，而且在式(5-15)或(5-10)等基本公式中，三类变形的影响都可用统一的格式来表示。

其次，补充说明系数 k 的求法。

当计算结构在荷载作用下的弹性位移时，可根据荷载引起的剪力 F_{QP} 求出

切应变 γ 为

$$\gamma=\frac{\tau}{G}=\frac{F_{QP}S}{GIb}$$

将上式代入式(5-24)，得

$$\gamma_0=\frac{F_{QP}}{GI^2}\int_A\frac{S^2}{b^2}\mathrm{d}A \tag{5-25}$$

将式(5-25)与(5-18c)加以比较，可得

$$k=\frac{A}{I^2}\int_A\frac{S^2}{b^2}\mathrm{d}A \tag{5-26}$$

这就是根据截面形状推算系数 k 的公式。

表 5-2 切应变的截面形状系数 k

截面形式	系 数 k
矩形	6/5
圆形	10/9
薄壁圆环形	2
工字形或箱形	A/A_1(A_1 为腹板面积)*

* 此值为近似值。

由式(5-18c)看出，系数 k 是在计算平均切应变 γ_0 时由于考虑到切应力在截面上分布不均匀而加的改正系数。由式(5-26)看出，系数 k 是一个与截面形状有关的参数(量纲一的量)。在表 5-2 中给出了几种常见截面形式的 k 值。

§5-4 荷载作用下的位移计算举例

1. 梁的位移计算

例 5-3 试求图 5-10a 所示悬臂梁在 A 端的竖向位移 Δ，并比较弯曲变形与剪切变形对位移的影响。设梁的截面为矩形。

解 先求实际荷载(图 5-10a)作用下的内力，再求虚设单位荷载(图 5-10b)作用下的内力，取 A 点为坐标原点，任意截面 x 的内力为

实际荷载	虚设单位荷载
$M_P=-\frac{1}{2}qx^2$	$\overline{M}=-x$
$F_{NP}=0$	$\overline{F}_N=0$
$F_{QP}=-qx$	$\overline{F}_Q=-1$

弯曲变形引起的位移为

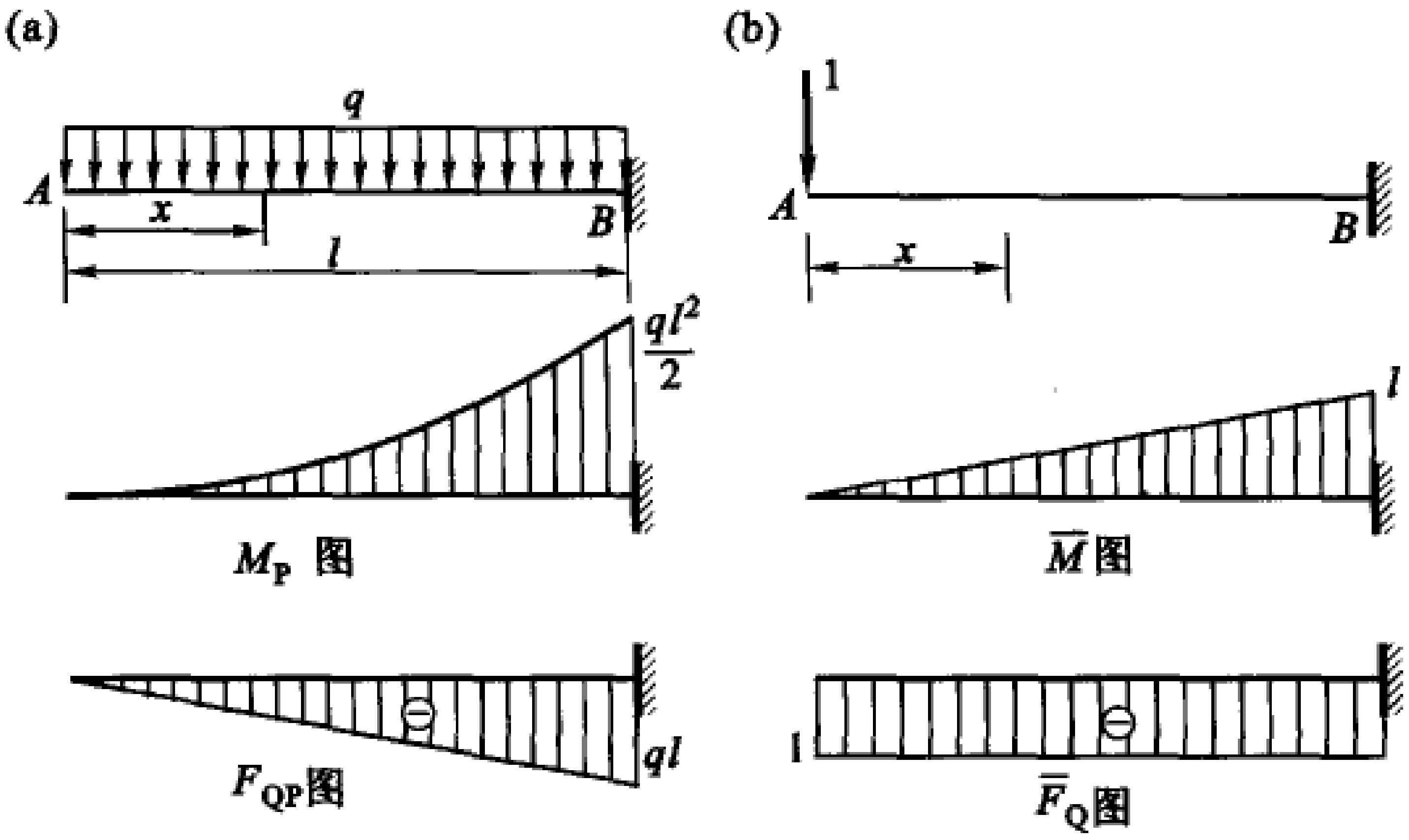


图 5-10

$$\Delta_M = \int \frac{\overline{M}M_P}{EI} ds = \int_0^l \frac{(-x)\left(-\frac{1}{2}qx^2\right)}{EI} dx = \frac{ql^4}{8EI}$$

剪切变形引起的位移为(对于矩形截面,$k=1.2$)

$$\Delta_Q = k\int \frac{\overline{F}_Q F_{QP}}{GA} ds = 1.2\int_0^l \frac{(-1)(-qx)}{GA} dx = 0.6\,\frac{ql^2}{GA}$$

由于梁的轴力为零,故总位移为

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_Q = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{0.6ql^2}{GA}$$

现在再比较剪切变形与弯曲变形对位移的影响。二者的比值为

$$\frac{\Delta_Q}{\Delta_M} = \frac{\frac{0.6ql^2}{GA}}{\frac{ql^4}{8EI}} = 4.8\,\frac{EI}{GAl^2}$$

设横向变形系数 $\mu = 1/3$,$E/G = 2(1+\mu) = 8/3$,对于矩形截面,$I/A = h^2/12$(h 为截面高度),代入上式,得

$$\frac{\Delta_Q}{\Delta_M} = 1.07\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

当梁的高跨比 h/l 是 1/10 时,则 $\Delta_Q/\Delta_M = 1.07\%$,剪力影响约为弯矩影响的百分之一,故对于一般的梁可以忽略剪切变形对位移的影响。但是,当梁的高跨比 h/l 增大为 1/2 时,则 Δ_Q/Δ_M 增大为 1/4;因此,对于深梁,剪切变形对位移的影响不可忽略。

2. 桁架的位移计算

例 5-4 图 5-11a 所示为一屋架,屋架的上弦杆和其他压杆采用钢筋混

凝土杆，下弦杆和其他拉杆采用钢杆。图 5－11b 是屋架的计算简图。设屋架承受均布荷载 q 作用。试求顶点 C 的竖向位移。

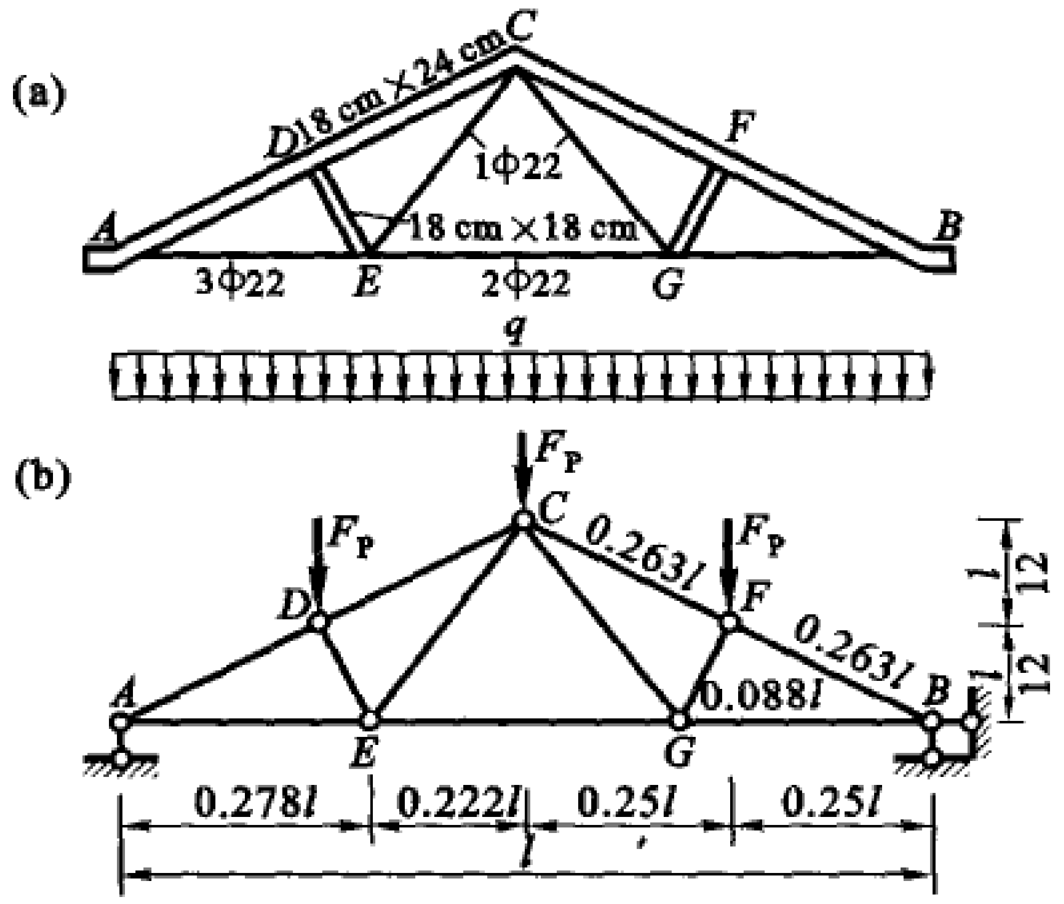


图　5－11

解　(1) 求 F_{NP}

先将均布荷载 q 化为结点荷载 $F_P=\dfrac{ql}{4}$。

求结点荷载作用下的 F_{NP}。

为了简便计算，结点荷载取为单位值(图 5－12)，图中给出的内力数值乘以 F_P 后，即为轴力 F_{NP}①。

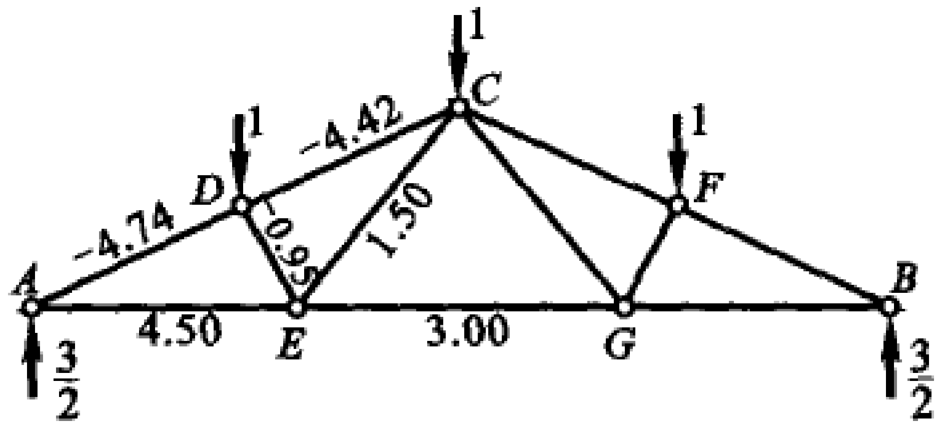


图　5－12

(2) 求 $\bar{F}_N$

在 C 点虚设单位竖向荷载，相应的轴力 $\bar{F}_N$ 如图 5－13 所示。

---

①　本例中，为了简便计算，结点荷载取为单位值，没有取真值，故图中等处未注明其单位，单位只是在最后结果中给出。下同。

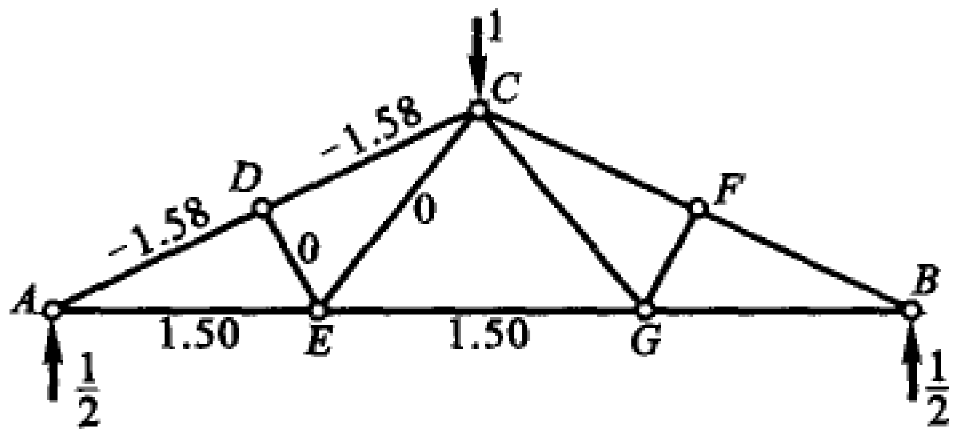


图 5-13

(3) 求 Δ_C

根据桁架位移公式(5-21),得

$$\Delta_C = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA}$$

具体计算过程见表 5-3。由于对称性,计算总和时,在表中只计算了半个桁架。杆 EG 的长度只取一半。

表 5-3　求位移 Δ_C 的列表计算过程

材　料	杆　件	F_{NP}	l	A	$\bar{F}_N$	$\frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{AE}$
钢筋混凝土	AD	$-4.74F_P$	$0.263l$	A_h	-1.58	$1.97F_P l/A_h E_h$
	DC	$-4.42F_P$	$0.263l$	A_h	-1.58	$1.84F_P l/A_h E_h$
	DE	$-0.95F_P$	$0.088l$	$0.75A_h$	0	0
						$\sum = \frac{3.81F_P l}{A_h E_h}$
钢筋					0	0
	CE	$1.50F_P$	$0.278l$	A_g	1.50	$0.63F_P l/A_g E_g$
	AE	$4.50F_P$	$0.278l$	$3A_g$	1.50	$0.5F_P l/A_g E_g$
	EG	$3.00F_P$	$0.222l$	$2A_g$		$\sum = \frac{1.13F_P l}{A_g E_g}$

表中的 A_h 是钢筋混凝土上弦杆的截面面积:$A_h = 18\ \text{cm} \times 24\ \text{cm} = 432\ \text{cm}^2$。表中的 A_g 是Φ 22 钢筋的截面面积:

$$A_g = 3.8\ \text{cm}^2$$

根据表中结果,即得

$$\Delta_C = 2F_P l\left(\frac{3.81}{A_h E_h} + \frac{1.13}{A_g E_g}\right) \tag{a}$$

设原始数据给定如下:

跨度　　　$l = 12\ \text{m}$

荷载　　　$q = 13\ 000\ \text{N/m}$，　$F_P = \frac{ql}{4} = 39\ 000\ \text{N}$

混凝土　　$E_h = 3.0 \times 10^4\ \text{MPa}$

钢筋　　　$E_g = 2.0 \times 10^5\ \text{MPa}$

代入式(a)，则得

$$\Delta_C = 1.66\ \text{cm}\ (\downarrow)$$

3. 曲杆的位移计算

例 5-5　图 5-14a 所示为一等截面圆弧形曲杆 AB，截面为矩形，圆弧 AB 的圆心角为 α，半径为 R。设均布竖向荷载 q 沿水平线作用。试求 B 点的竖向位移 Δ。

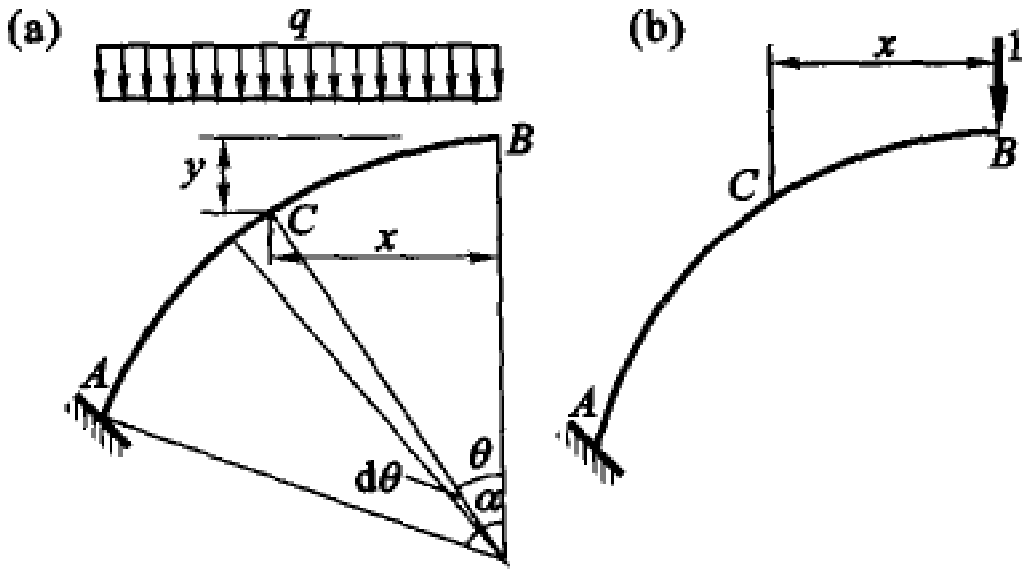


图 5-14

解　求 Δ 时，可在 B 点加单位竖向荷载(图 5-14b)。现分别求实际荷载和单位荷载作用下的内力。取 B 点作坐标原点，任一点 C 的坐标为 x, y，圆心角为 θ。

实际荷载	虚设荷载
$M_P = -\frac{1}{2}qx^2$，	$\overline{M} = -x$
$F_{NP} = -qx\sin\theta$，	$\overline{F}_N = -\sin\theta$
$F_{QP} = qx\cos\theta$，	$\overline{F}_Q = \cos\theta$

位移公式为

$$\Delta = \int \frac{M_P\overline{M}}{EI}ds + \int \frac{F_{NP}\overline{F}_N}{EA}ds + \int \frac{kF_{QP}\overline{F}_Q}{GA}ds$$

用 Δ_M、Δ_N、Δ_Q 分别表示 M、F_N、F_Q 所引起的位移，得

$$\Delta_M = \int_B^A \frac{M_P\overline{M}}{EI}ds = \frac{q}{2EI}\int_B^A x^3 ds$$

$$\Delta_N = \int_B^A \frac{F_{NP}\overline{F}_N}{EA}ds = \frac{q}{EA}\int_B^A x\sin^2\theta ds$$

$$\Delta_Q = \int_B^A \frac{kF_{QP}\overline{F}_Q}{GA}ds = \frac{kq}{GA}\int_B^A x\cos^2\theta ds$$

取 θ 作变数，则

$$x = R\sin\theta, \quad y = R(1-\cos\theta), \quad ds = Rd\theta$$

代入上式，得

$$\Delta_M = \frac{qR^4}{2EI}\int_0^\alpha \sin^3\theta d\theta$$

$$\Delta_N = \frac{qR^2}{EA}\int_0^\alpha \sin^3\theta d\theta$$

$$\Delta_Q = \frac{kqR^2}{GA}\int_0^\alpha \cos^2\theta \sin\theta d\theta$$

由于

$$\int_0^\alpha \sin^3\theta d\theta = \int_0^\alpha (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\alpha = \frac{2}{3} - \cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha$$

$$\int_0^\alpha \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\alpha = \frac{1}{3}(1-\cos^3\alpha)$$

故

$$\Delta_M = \frac{qR^4}{2EI}\left(\frac{2}{3} - \cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha\right)$$

$$\Delta_N = \frac{qR^2}{EA}\left(\frac{2}{3} - \cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha\right)$$

$$\Delta_Q = \frac{kqR^2}{GA}\times\frac{1}{3}(1-\cos^3\alpha)$$

如果 $\alpha = 90°$，则

$$\Delta_M = \frac{qR^4}{3EI}$$

$$\Delta_N = \frac{2qR^2}{3EA}$$

$$\Delta_Q = \frac{kqR^2}{3GA}$$

结合上例讨论如下：在上例中，弯曲变形对位移 Δ 的影响是主要的。为了进行比较，求出 Δ_N/Δ_M 和 Δ_Q/Δ_M 这两个比值。

设 $\alpha = 90°$，$h/R = 1/10$，$E/G = 8/3$，截面为矩形，$I/A = h^2/12$（h 为截面高度），$k = 1.2$，则

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_M}=\frac{2I}{R^2A}=\frac{1}{6}\frac{h^2}{R^2}=\frac{1}{600}$$

$$\frac{\Delta_Q}{\Delta_M}=\frac{kEI}{R^2GA}=\frac{k}{12}\frac{E}{G}\frac{h^2}{R^2}=\frac{1}{375}$$

计算结果表明，在给定的条件下，轴力和剪力所引起的位移可以忽略不计。

例 5-6　图 5-15a 所示简支梁受集中荷载 F_P 作用。试求梁两端截面 A、B 的相对转角 Δ。

解　由图 5-15a 中可见，相对转角 $\Delta=\theta_A+\theta_B$。因此，虚设力系时，在截面 A、B 处施加一对反向的单位力偶，$\overline{M}$ 图如图 5-15b 所示。

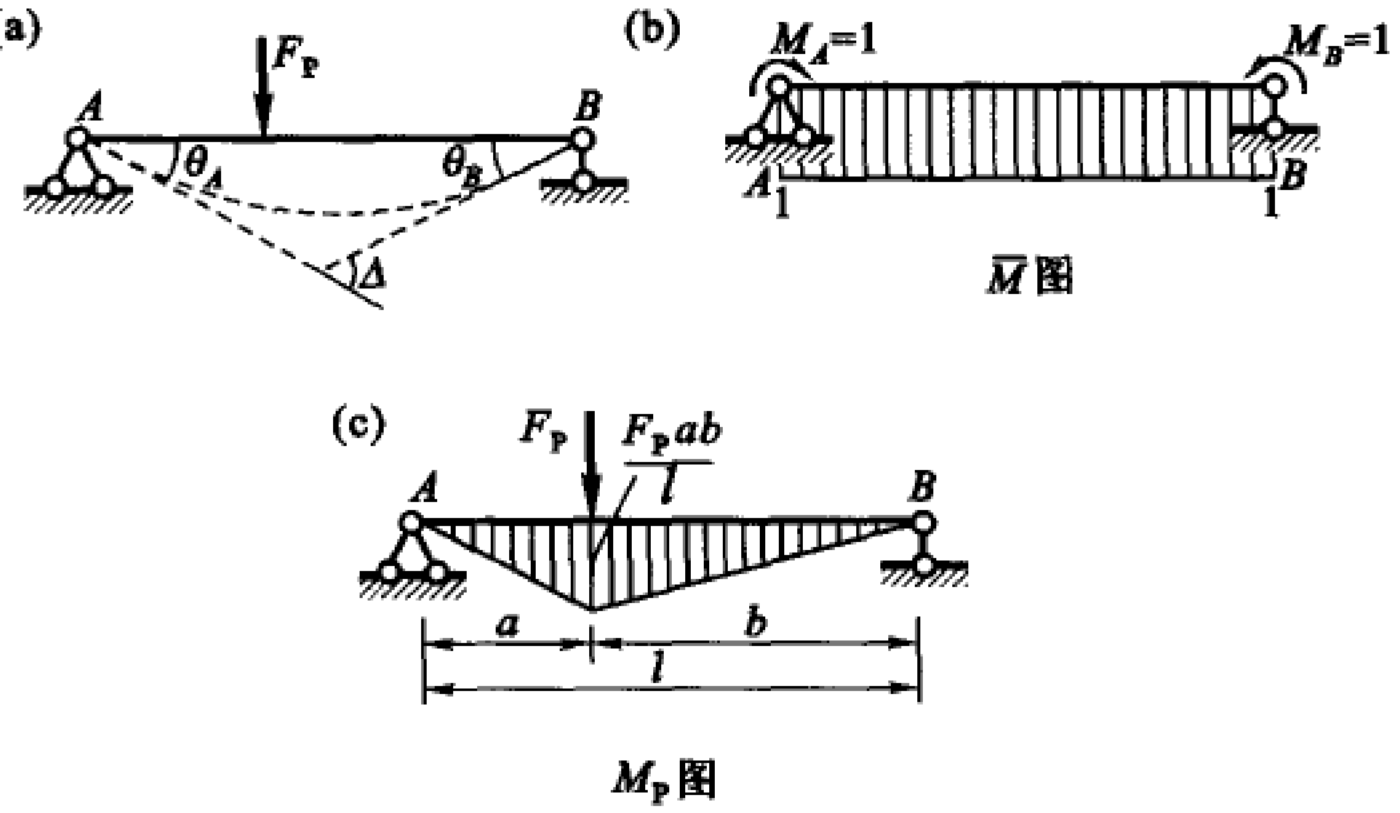


图　5-15

求得内力表达式如下：

实际荷载作用下的弯矩图 M_P 如图 5-15c 所示，

$$M_P=\frac{F_Pb}{l}x\quad(0<x<a)$$

$$M_P=F_Pa\left(1-\frac{x}{l}\right)\quad(a<x<l)$$

虚设单位荷载作用下，

$$\overline{M}=1\quad(0<x<l)$$

代入式(5-20)，得到相对转角 Δ 为

$$\Delta=\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s=\int_0^a\frac{F_Pb}{EIl}x\,\mathrm{d}x+\int_a^l\frac{F_Pa}{EI}\left(1-\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{F_Pab}{2EI}\ (\curvearrowleft\curvearrowright)$$

求得结果为正值，表明相对转角 Δ 的方向与所设的一对单位力偶方向相同。

§5-5 图 乘 法

在荷载作用下求结构弹性位移的一般公式(5-19)中,需要求下列积分项的值:

$$\int \frac{M_i M_K}{EI} \mathrm{d}x \tag{a}$$

求积分项的值时,除采用各种积分方法求出精确的显式表示式外,还可采用数值积分方法求出精确的或近似的数值解。

一种常用的数值积分方法是高斯数值积分法,在有限元法书籍中一般都有介绍,可以参考。

本节介绍一种求式(a)这类积分值的方法——图乘法。在规定的应用条件下,图乘法可给出积分(a)的数值解,而且是精确解。

1. 图乘法及其应用条件

图 5-16 所示为一直杆或直杆段 AB 的两个弯矩图,其中有一个弯矩图(M_i 图)是直线图。如果在 AB 范围内该杆截面抗弯刚度 EI 为一常数,则式(a)这类积分可按下式求出积分值:

$$\int \frac{M_i M_K}{EI} \mathrm{d}x = \frac{1}{EI} \int M_i M_K \mathrm{d}x = \frac{1}{EI} A y_0 \tag{5-27}$$

式中 A 是 AB 段内 M_K 图的面积,y_0 是与 M_K 图形心 C 对应处的 M_i 图标距,即纵坐标。

式(5-27)可证明如下:

先看直线图形(M_i 图)。以 M_i 图中两直线的交点 O 作为坐标原点,以 α 表示 M_i 图直线的倾角,则 M_i 图任一点标距可表示为

$$M_i = x \tan \alpha \tag{b}$$

因此

$$\int_A^B M_i M_K \mathrm{d}x = \tan \alpha \int_A^B x M_K \mathrm{d}x \tag{c}$$

式中 $M_K \mathrm{d}x$ 可看作 M_K 图的微分面积(图 5-16中画阴影线的部分);$x \cdot M_K \mathrm{d}x$ 是这个微分面积对 y 轴的面积矩。于是,$\int_A^B x M_K \mathrm{d}x$ 就是 M_K 图的面积 A 对 y 轴的面积矩。以 x_0 表示 M_K 图的形心 C 到 y 轴的距

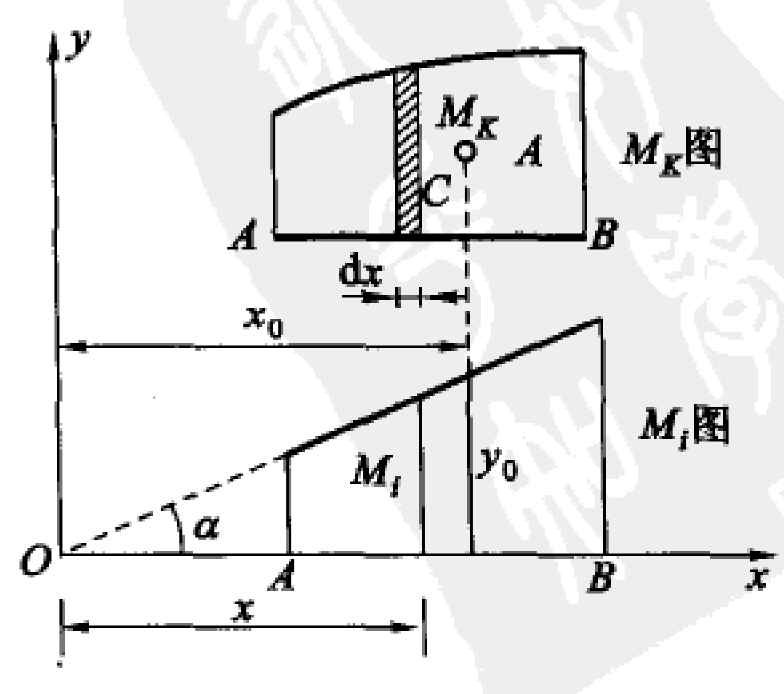


图 5-16

离，则

$$\int_A^B x \cdot M_K \mathrm{d}x = Ax_0 \tag{d}$$

将上式代入式(c)，得

$$\int_A^B M_i M_K \mathrm{d}x = \tan\alpha \cdot Ax_0 = Ay_0 \tag{e}$$

式中 y_0 是在 M_K 图形心 C 对应处的 M_i 图标距。利用式(e)，即可导出式(5-27)，证毕。

式(5-27)是图乘法所使用的公式。它将式(a)形式的积分运算问题简化为求图形的面积、形心和标距的问题。

应用图乘法计算时要注意两点：

(1) 应用条件：杆段应是等截面直杆段，两个图形中至少应有一个是直线，标距 y_0 应取自直线图中。

(2) 正负号规则：面积 A 与标距 y_0 在杆的同一边时，乘积 Ay_0 取正号；A 与 y_0 在杆的不同边时取负号。

2. 几种常见图形的面积和形心位置

在图 5-17 中，给出了位移计算中几种常见图形的面积公式和形心位置。

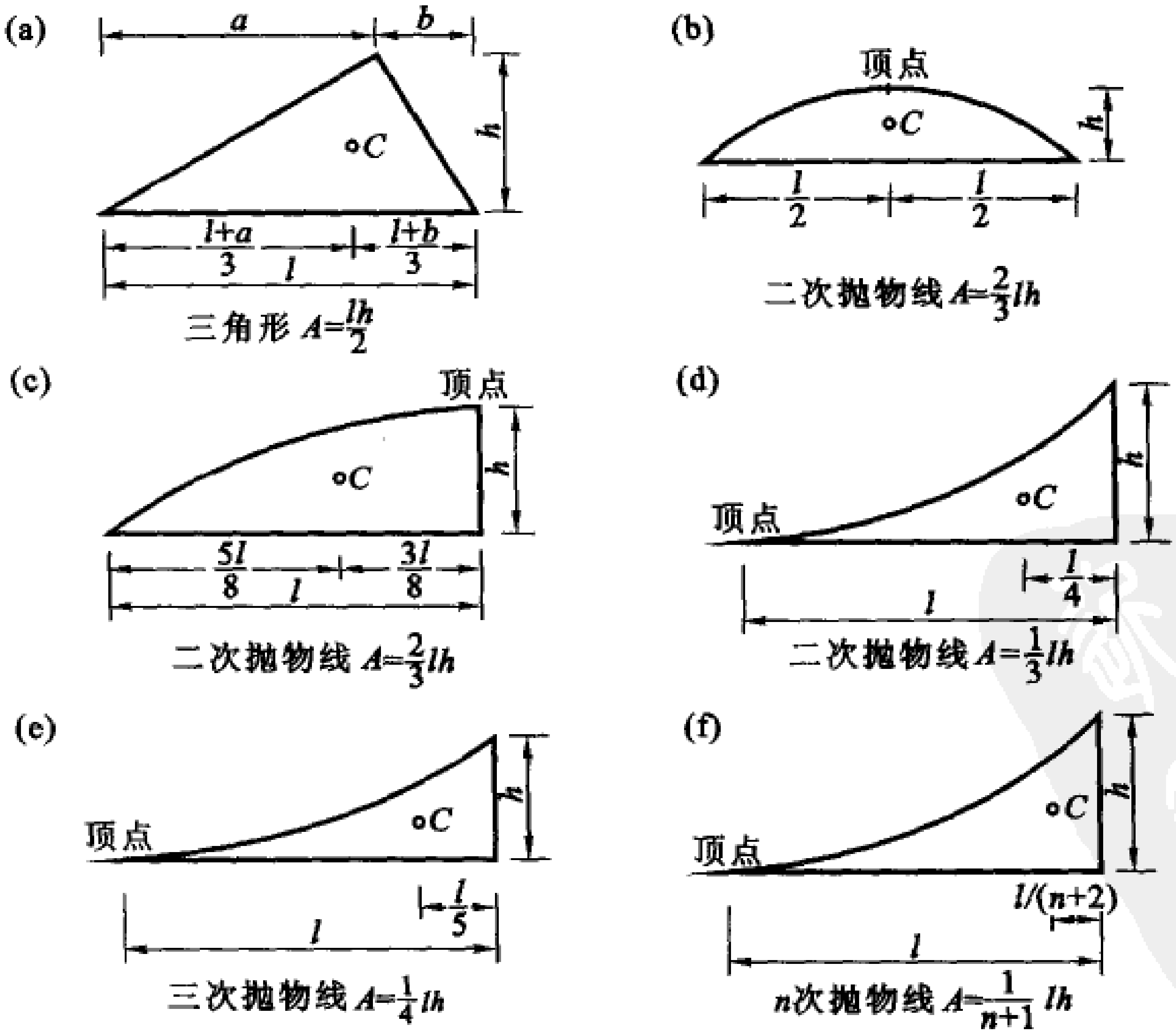


图　5-17

应当注意，在所示的各次抛物线图形中，抛物线顶点处的切线都是与基线平行的。这种图形可称为抛物线标准图形。应用图中有关公式时，应注意标准图形这个特点。

3. 应用图乘法时的几个具体问题

(1) 如果两个图形都是直线图形，则标距 y_0 可取自其中任一个图形。

(2) 如果一个图形是曲线，另一个图形是由几段直线组成的折线，则应分段考虑。对于图 5-18 所示的情形，则有

$$\int M_i M_K \mathrm{d}x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3$$

(3) 如果图形比较复杂，则可将其分解为几个简单图形，分项计算后再进行叠加。

首先，考虑梯形的分解。

例如，图 5-19 中两个图形都是梯形，可以不求梯形面积的形心，而将其中一个梯形(M_K 图)分为两个三角形(也可分为一个矩形和一个三角形)再应用图乘法。因此，

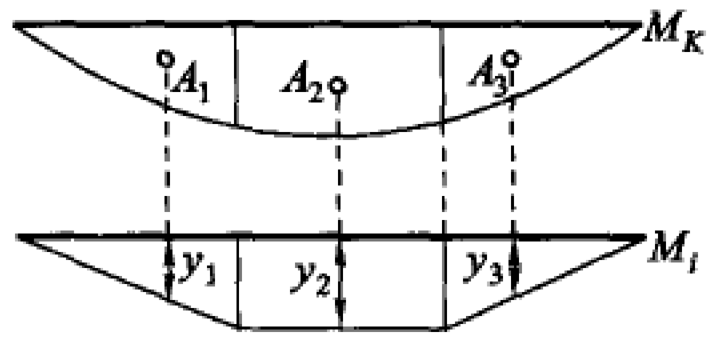


图　5-18

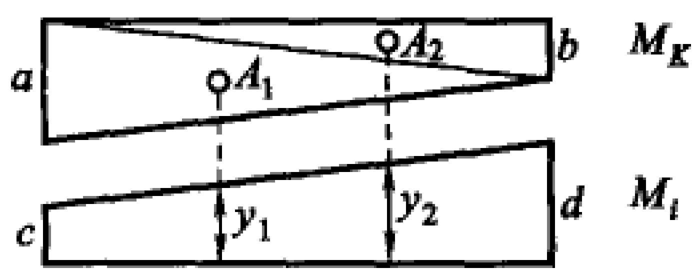


图　5-19

$$\int M_i M_K \mathrm{d}x = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

其次，考虑抛物线非标准图形的分解。

例如，图 5-20a 所示结构中的一段直杆 AB 在均布荷载 q 作用下的 M_P 图。在一般情况下，这是一个抛物线非标准图形。由第 2 章可知，M_P 图是由两端弯矩 M_A、M_B 组成的直线图(图 5-20b 中的 M' 图)和简支梁在均布荷载 q 作用下的弯矩图(图 5-20c 中的 M^0 图)叠加而成的。因此，可将 M_P 图分解为直线的 M' 图和标准抛物线的 M^0 图，然后再应用图乘法。

还要指出，所谓弯矩图的叠加是指弯矩图纵坐标的叠加。所以，虽然图 5-20a 中的 M^0 图与图 5-20c 中的 M^0 图形状并不相似，但在同一横坐标 x 处，二者的纵坐标是相同的，微段 $\mathrm{d}x$ 的微小面积(图中带阴影的面积)是相同的。因此，两图的面积和形心的横坐标也是相同的。

例 5-7　试用图乘法计算图 5-21a 所示简支梁在均布荷载 q 作用下的 B

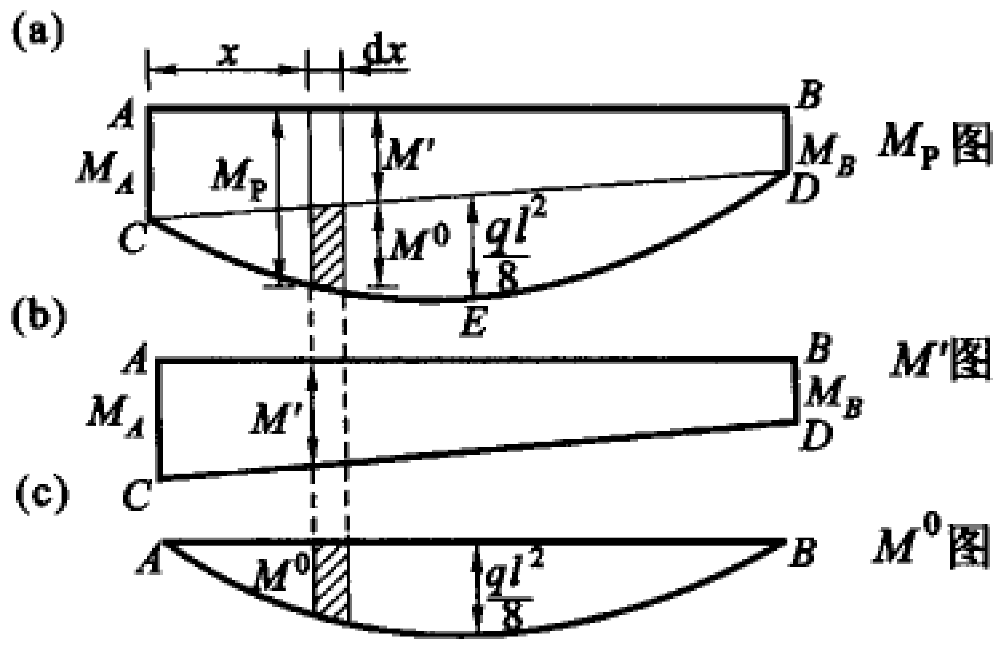


图　5-20

端转角 Δ_B。

解　作荷载作用下的 M_P 图和虚设单位力偶作用下的 $\overline{M}$ 图，如图 5-21a、b 所示。

$$\Delta_B = \int \frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s = \frac{1}{EI}Ay_0 = \frac{-1}{EI} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \cdot l\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{24EI}\ (\frown)$$

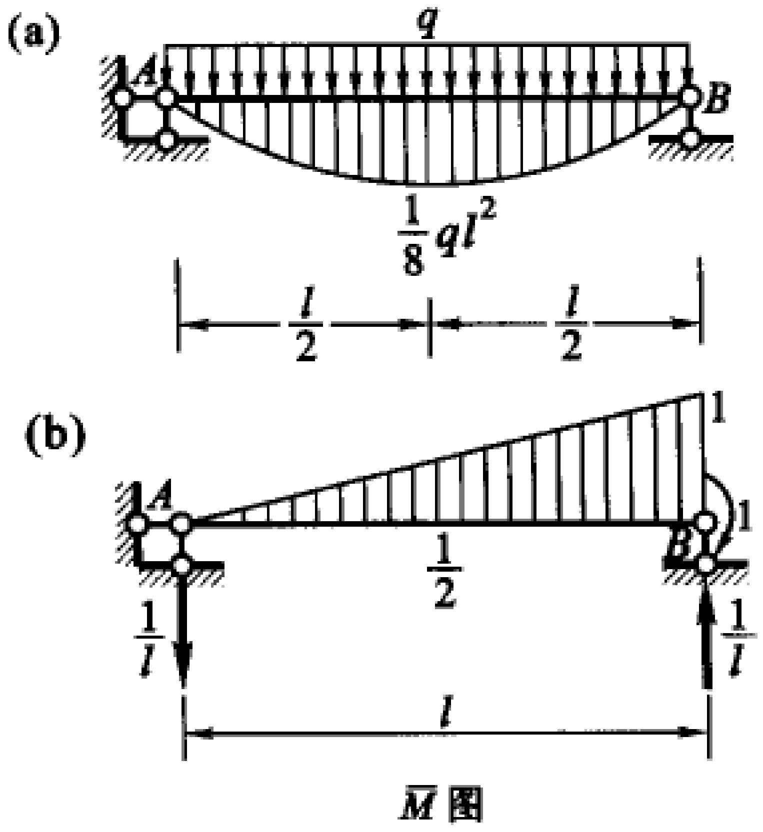


图　5-21

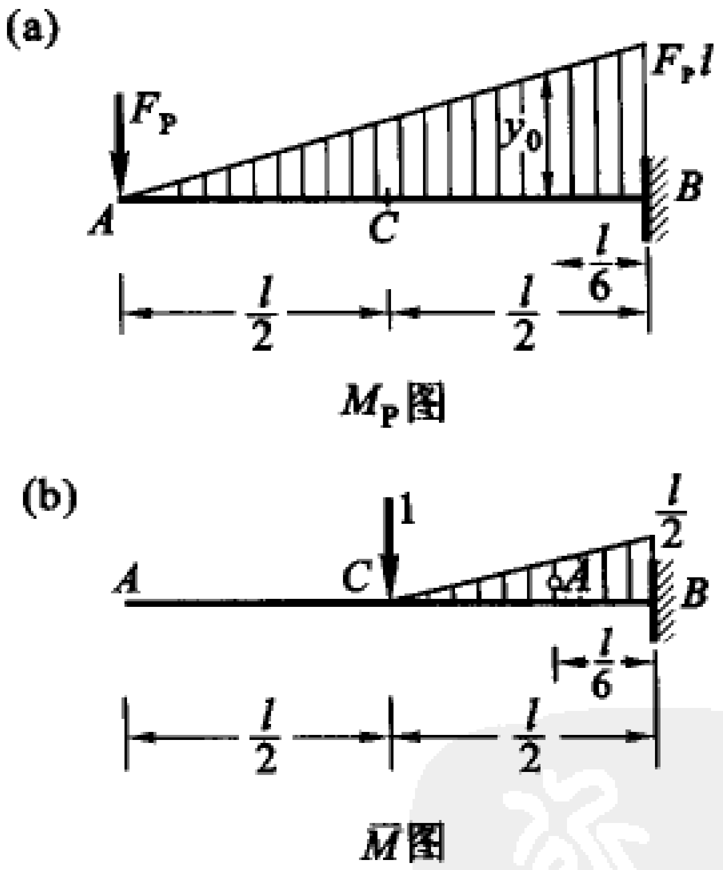


图　5-22

例 5-8　图 5-22a 所示为一悬臂梁，在 A 点作用集中荷载 F_P。试求中点 C 的挠度 Δ_C。

解　作 M_P 图与 $\overline{M}$ 图如图 5-22a、b 所示。应用图乘法，$\overline{M}$ 图中三角形面积为

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}$$

M_P 图中相应的标距：

$$y_0 = \frac{5}{6} F_P l$$

求得

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \int \overline{M} M_P \mathrm{d}s = \frac{1}{EI} \times \frac{l^2}{8} \times \frac{5}{6} F_P l = \frac{5 F_P l^3}{48 EI} \ (\downarrow)$$

在应用图乘法时，如果计算 M_P 图面积 $A = \frac{1}{2} F_P l^2$，$\overline{M}$ 图上相应的标距 $y_0 = \frac{l}{6}$，则将得到错误的结果：$\Delta_C = \frac{F_P l^3}{12EI}(\downarrow)$。请读者分析，其中错误何在？

例 5-9 试求图 5-23a 所示刚架结点 B 的水平位移 Δ。各杆截面为矩形 bh，惯性矩相等。只考虑弯曲变形的影响。

解 作 M_P 图和 $\overline{M}$ 图，如图 5-23b、c 所示。

M_P 图的面积可分为 A_1、A_2、A_3 三块计算：

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{ql^2}{2} \cdot l = \frac{ql^3}{4}, \quad A_2 = \frac{ql^3}{4}, \quad A_3 = \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \cdot l = \frac{ql^3}{12}$$

$\overline{M}$ 图上相应的标距为

$$y_1 = \frac{2}{3} l, \quad y_2 = \frac{2}{3} l, \quad y_3 = \frac{l}{2}$$

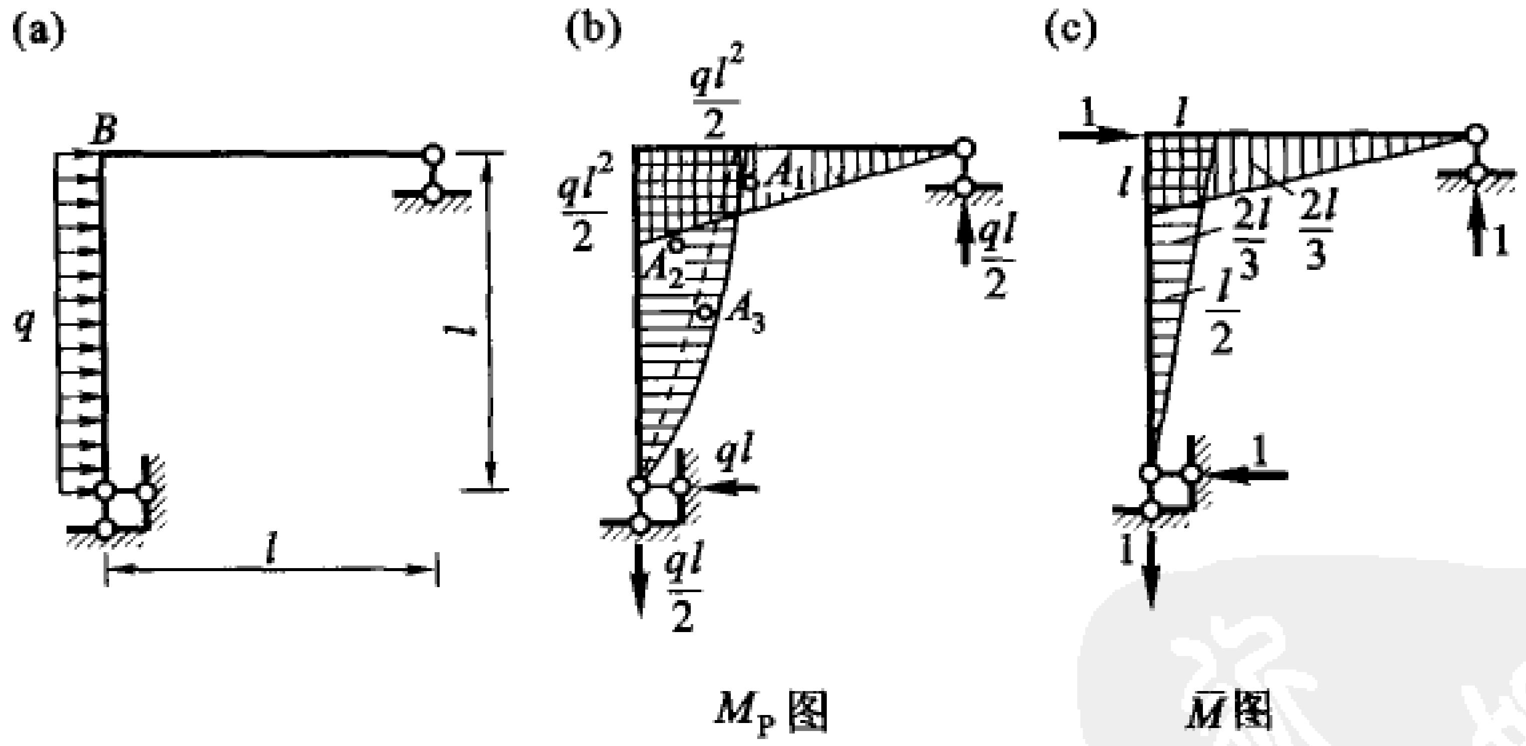


图 5-23

求得

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} \mathrm{d}s = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql^3}{4} \times \frac{2l}{3} + \frac{ql^3}{4} \times \frac{2l}{3} + \frac{ql^3}{12} \times \frac{l}{2} \right)$$

$$= \frac{3ql^4}{8EI} \ (\rightarrow)$$

例 5-10 试分析例 5-9 所示刚架轴向变形对 B 点水平位移的影响。

解 作 F_{NP}图和 $\bar{F}_N$ 图如图 5-24 所示。

轴向变形引起的位移 Δ_N

$$\Delta_N = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} \mathrm{d}s = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} = \frac{ql}{2} \times 1 \cdot \frac{l}{EA} = \frac{ql^2}{2EA} \ (\rightarrow)$$

由例 5-9 求得

$$\Delta_M = \frac{3ql^4}{8EI}$$

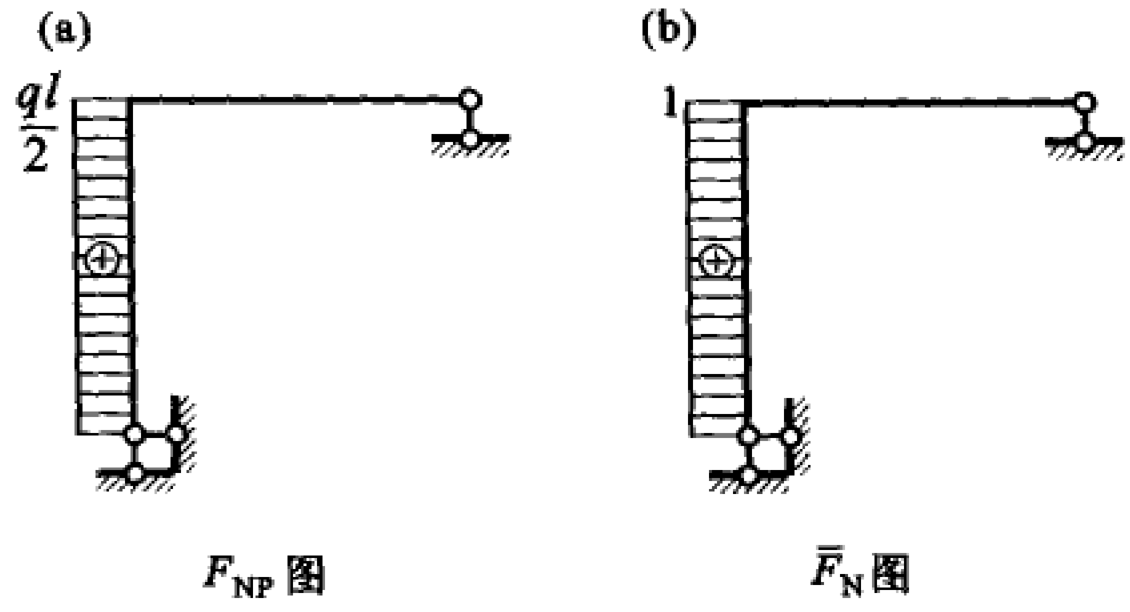


图 5-24

二者的比值为

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_M} = \frac{ql^2}{2EA} \times \frac{8EI}{3ql^4} = \frac{4I}{3Al^2}$$

由于矩形截面$\frac{I}{A} = \frac{h^2}{12}$

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_M} = \frac{1}{9} \frac{h^2}{l^2}$$

可见,当 h/l 很小时$\left(例如\ h = \frac{l}{10}\right)$,轴力变形的影响可以忽略$\left(只占弯矩影响的\ \frac{1}{900}\right)$。

例 5-11 试求图 5-25a 所示刚架在水压力作用下 C、D 两点的相对水平位移。设各杆 EI 为常数。

解 (1) 作荷载作用下的 M_P 图,如图 5-25b 所示。应当注意,AC、BD 杆的 M_P 图是三次抛物线。

(2) 在 C、D 两点加一对反向的单位水平力,并作 $\bar{M}$ 图,如图 5-25c 所示。

(3) 用图乘法计算位移。

杆 AC 和BD

$$A_1=\frac{1}{4}\times1\ \text{m}\times\left(\frac{1}{6}\ \text{m}^2\right)q=\left(\frac{1}{24}\ \text{m}^3\right)q$$

$$y_1=\frac{4}{5}\times1\ \text{m}=\frac{4}{5}\ \text{m}$$

杆 AB

$$A_2=\left(\frac{1}{6}\ \text{m}^2\right)q\times2\ \text{m}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\text{m}^2\right)q\times2\ \text{m}$$
$$=-\left(\frac{1}{3}\ \text{m}^3\right)q$$
$$y_2=1\ \text{m}$$

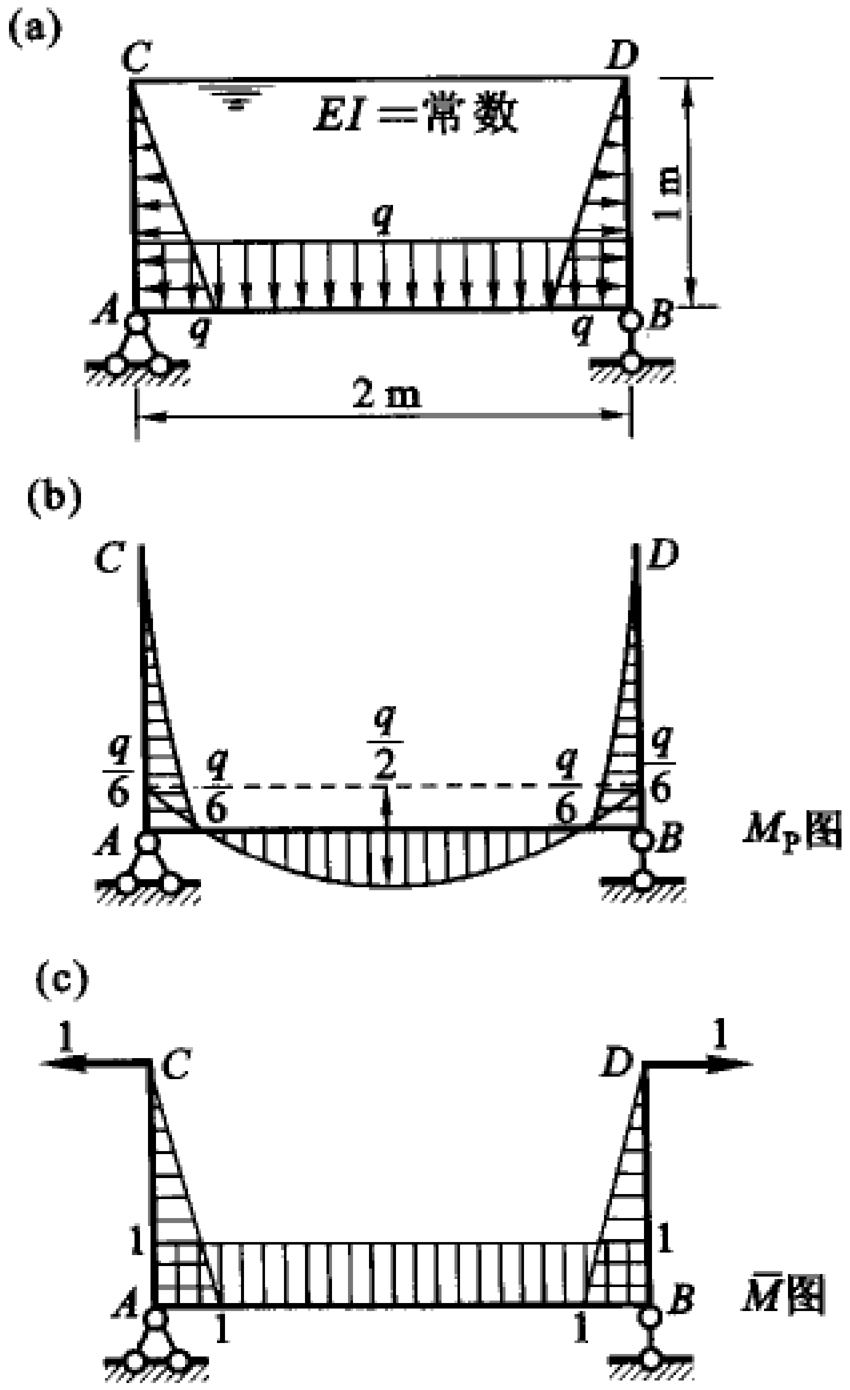


图 5-25

求得

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\text{d}s=[2(A_1y_1)+(A_2y_2)]\frac{1}{EI}$$
$$=\frac{1}{EI}\left[2\times\left(\frac{q\ \text{m}^3}{24}\times\frac{4\ \text{m}}{5}\right)+\left(-\frac{q\ \text{m}^3}{3}\right)\times1\ \text{m}\right]$$
$$=-\left(\frac{4}{15}\ \text{m}^4\right)\frac{q}{EI}\ (\rightarrow\leftarrow)$$

计算结果为负值，说明 C、D 两点实际的相对水平位移与所设单位荷载的指向相反，即不是两点相互分开，而是相互靠近。

§5-6 温度作用时的位移计算

对于静定结构，温度改变并不引起内力。变形和位移是材料自由膨胀、收缩的结果。

设杆件的上边缘温度上升 t_1，下边缘上升 t_2，而沿杆截面厚度为线性分布(图 5-26)。此时，杆件的轴线温度 t_0 与上、下边缘的温差 Δt 分别为

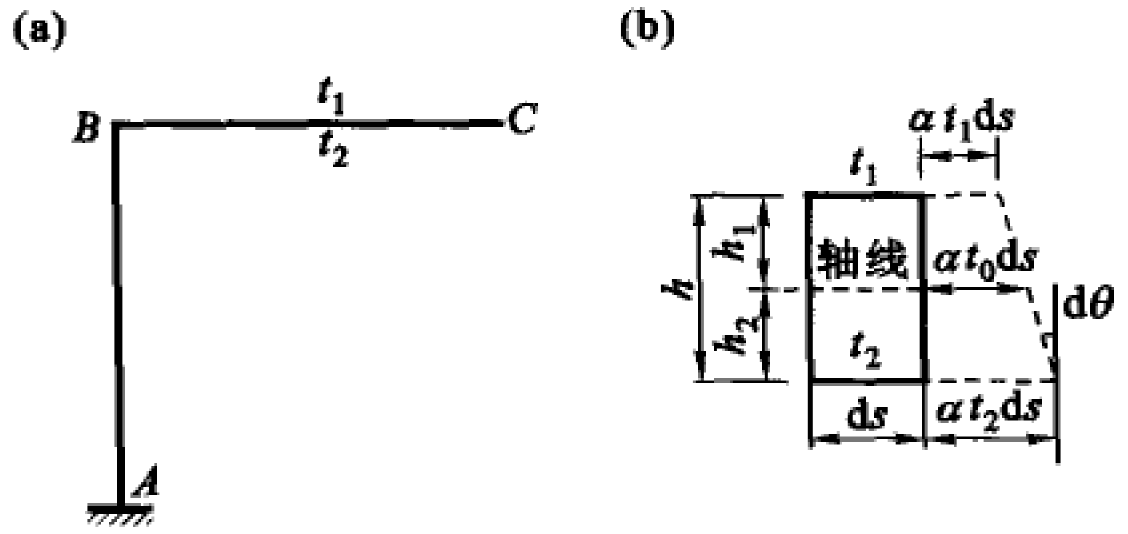


图 5-26

$$t_0 = \frac{h_1 t_2 + h_2 t_1}{h}, \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

式中 h 是杆件截面厚度，h_1 和 h_2 分别是由杆轴至上、下边缘的距离。如果杆件的截面对其中性轴为对称，则 $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$，$t_0 = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$。在温度变化时，杆件不引起切应变，引起的轴向伸长应变 ε 和曲率 κ 分别为

$$\varepsilon = \alpha t_0$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\alpha(t_2 - t_1)ds}{h\,ds} = \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

式中 α 为材料的线膨胀系数。将上列两式代入式(5-9)，并令 $\gamma_0 = 0$，得

$$\Delta = \sum \int \overline{F}_N \alpha t_0 ds + \sum \int \overline{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds \qquad (5-28a)$$

如果 t_0、Δt 和 h 沿每一杆件的全长为常数，则得

$$\Delta = \sum \alpha t_0 \int \overline{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \overline{M} ds \qquad (5-28b)$$

式(5-28)是求温度位移的公式，积分号为沿杆件全长积分，总和号为对结构各

杆求和。轴力 $\bar{F}_N$ 以拉伸为正，t_0 以升高为正。弯矩 $\bar{M}$ 和温差 Δt 引起的弯曲为同一方向时(即当 $\bar{M}$ 和 Δt 使杆件的同一边产生拉伸变形时)，其乘积取正值，反之取负值。

例 5-12 试求图 5-27a 所示刚架 C 点的竖向位移 Δ_C。梁下侧和柱右侧温度升高 10 ℃，梁上侧和柱左侧温度无改变。各杆截面为矩形，截面高度 $h=60$ cm，$a=6$ m，$\alpha=0.000\ 01℃^{-1}$。

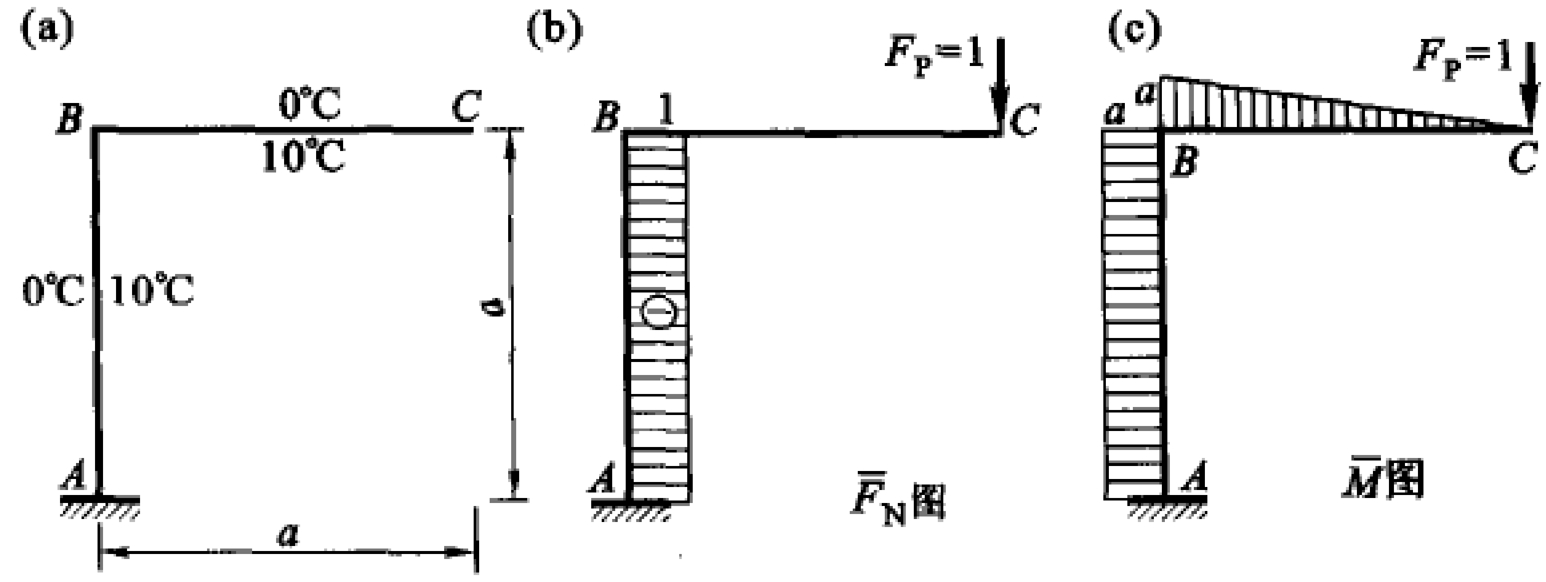


图 5-27

解 在 C 点加单位竖向荷载，作相应的 $\bar{F}_N$ 图和 $\bar{M}$ 图(图 5-27b、c)。

杆轴线处的温度升高值为

$$t_0=\frac{10\ ℃+0\ ℃}{2}=5\ ℃$$

上、下(左、右)边缘温差为

$$\Delta t=10\ ℃-0\ ℃=10\ ℃$$

代入式(5-28b)，得

$$\begin{aligned}\Delta_C&=\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}\int\bar{M}\mathrm{d}s+\sum\alpha t_0\int\bar{F}_N\mathrm{d}s=-\frac{10\alpha}{h}\times\frac{3}{2}a^2+5\alpha(-a)\\&=-5\alpha a\times\left(1+\frac{3a}{h}\right)\end{aligned}$$

因 Δt 与 $\bar{M}$ 所产生的弯曲方向相反，故上式第一项取负号。代入 $\alpha=0.000\ 01\ ℃^{-1}$，$a=600$ cm，$h=60$ cm，得

$$\Delta_C=-0.93\ \text{cm}\ (\uparrow)$$

*§5-7 用求解器进行位移计算

求解器可以求解一般平面结构的位移。本节主要以静定结构为例进行讨

论，但是做法同样适用于后面章节中讨论的超静定结构的位移计算。位移计算包括荷载作用下、支座位移引起以及温度改变引起的位移计算。

详细内容见所附光盘相应章节。

§5－8 变形体的虚功原理

虚功原理是力学中的一个基本原理。虚位移原理和虚力原理是它的两个基本形式。由虚位移原理可以导出力的平衡条件，由虚力原理可以导出变形的协调条件。引入弹性体的本构关系后，由虚功原理可以导出一系列能量原理，用于分析弹性结构各种力学问题。

针对刚体体系这一特殊情况建立的虚功原理（虚位移原理和虚力原理）已经在§3－8和§5－1中分别介绍。本节进一步讨论变形体体系的一般情况，建立变形体体系的虚功原理。在刚体体系的虚功原理中，由于刚体的应变恒为零，内力所作的功恒为零，因此只需考虑外力所作的功。而在变形体体系的虚功原理中，由于变形体中存在应变，因而既要考虑外力，也要考虑内力所作的功。换句话说，还要补充考虑应力在变形上所作的内虚功，这是变形体体系虚功原理与刚体体系虚功原理唯一的不同之处。

变形体的虚功原理可表述如下：

设变形体在力系作用下处于平衡状态，又设变形体由于其他原因产生符合约束条件的微小连续变形，则外力在位移上所作外虚功 W 恒等于各个微段的应力合力在变形上所作的内虚功 W_i。

变形体的虚功原理可用式(5－16)表示，即

$$W = W_i$$

现先讨论变形体为单个杆件的情况，然后推广到杆件结构的一般情况。

1. 变形体虚功方程的应用条件

变形体虚功方程的应用条件是：力系应当满足平衡条件；位移应当符合支承情况并保持结构的连续性，或者说，位移应当满足变形连续协调条件。下面对这两方面的条件加以说明。

(1) 力系的平衡条件

图5－28a所示直杆 AB 承受沿杆长分布的轴向荷载（集度为 p）和法向荷载（集度为 q）；A 端外力 M_A、F_{NA}、F_{QA} 和 B 端外力 M_B、F_{NB}、F_{QB}。如果杆件处于平衡状态，则图5－28b所示微段隔离体应满足平衡条件，即截面内力 M、F_N、F_Q 与分布荷载 p、q 之间应满足下列平衡微分方程：

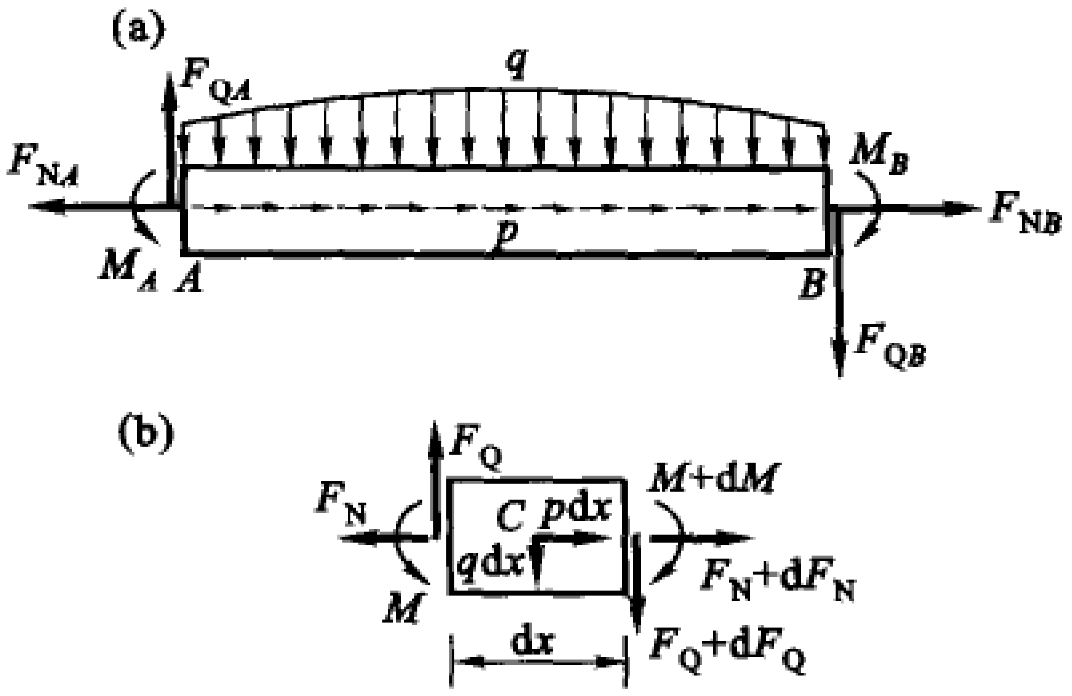


图　5-28

$$\left.\begin{aligned}dF_N+p\,dx=0\\dF_Q+q\,dx=0\\dM+F_Q\,dx=0\end{aligned}\right\}\tag{5-29}$$

(2) 变形协调条件

图5-29a所示直杆 AB 的位移和变形情况可分述如下:

任一截面的位移可用三个位移分量来描述,即截面的角位移 θ、截面形心的轴向位移 u 和横向位移 w。杆轴切线的角位移 φ 可由 w 得出:

$$\varphi=\frac{dw}{dx}\tag{5-30}$$

微段 dx 的变形可用三个应变分量来描述,即两端截面的相对转角 $d\theta$、轴线的线应变 ε、截面平均切应变 γ_0(图5-29b)。

位移分量与应变分量之间应满足下列关系式:

$$\varepsilon=\frac{du}{dx}\tag{5-31}$$

$$\gamma_0=\varphi-\theta=\frac{dw}{dx}-\theta\tag{5-32}$$

此外,在杆端还应满足静力平衡或几何方面的边界条件。以 A 端为例,如为自由端,则截面 A 的 M、F_N、F_Q 应与 A 端给定的外力 M_A、F_{NA}、F_{QA} 相等;如为固定端,则截面 A 的 θ、u、w 应与支座 A 给定的位移 θ_A、u_A、w_A 相等;如为铰支端,则截面 A 的 M、u、w 应与 A 端给定的 M_A、u_A、w_A 相等。应变位移关系式和几何边界条件合在一起称为变形协调条件。

2. 变形体虚功方程

令图5-28中的平衡受力状态在图5-29中连续变形状态上作虚功。

外力在位移上所作的外虚功为

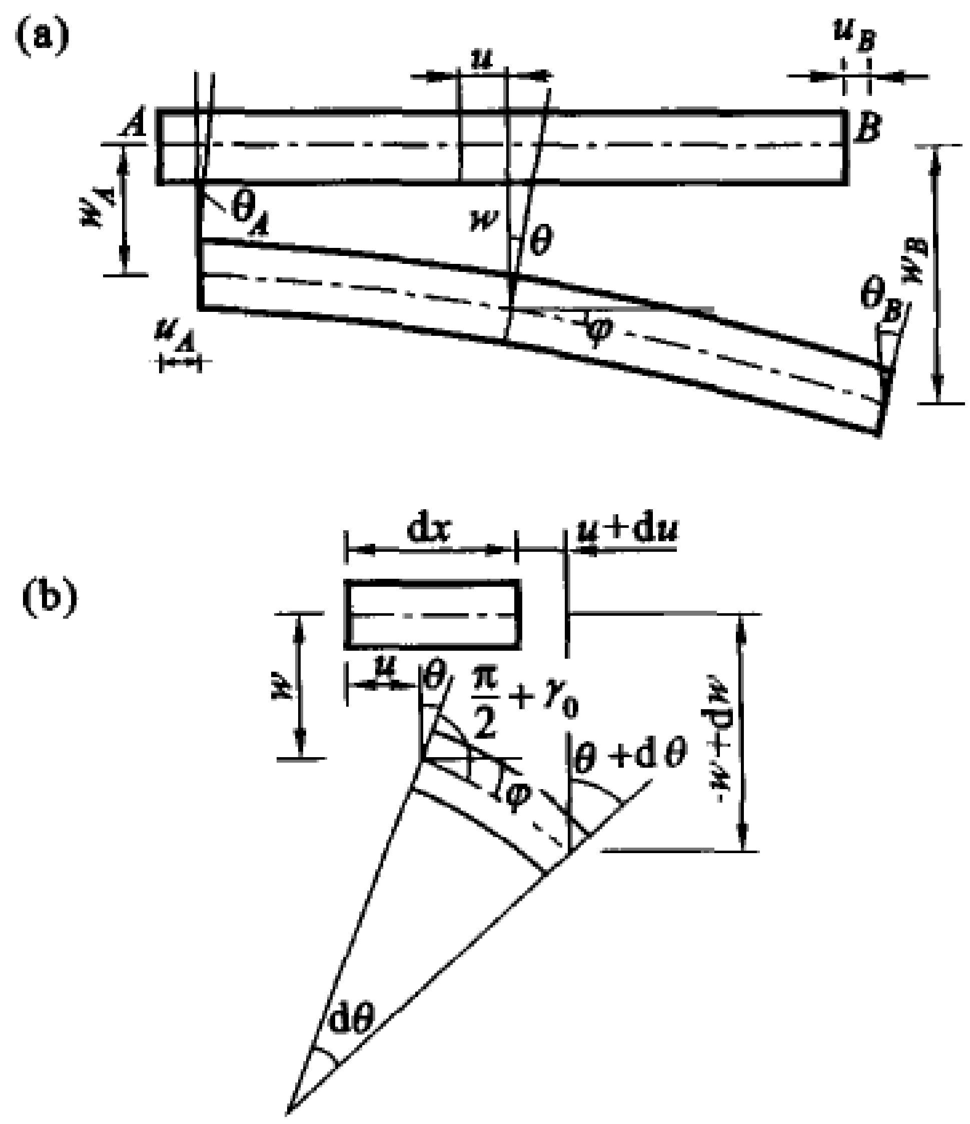


图 5-29

$$W=(M_B\theta_B+F_{NB}u_B+F_{QB}w_B)-(M_A\theta_A+F_{NA}u_A+F_{QA}w_A)+\int_A^B(pu+qw)\mathrm{d}x \tag{5-33}$$

式中前两项是杆端力作的虚功,第三项是分布荷载作的虚功。

微段 dx 两侧面的应力合力在变形上作的内虚功为

$$\mathrm{d}W_i=M\mathrm{d}\theta+F_N\varepsilon\mathrm{d}x+F_Q\gamma_0\mathrm{d}x$$

因此,整个变形体的内虚功为

$$W_i=\int_A^B(M\mathrm{d}\theta+F_N\varepsilon\mathrm{d}x+F_Q\gamma_0\mathrm{d}x) \tag{5-34}$$

将式(5-33)和式(5-34)代入式(5-16),得到变形体虚功方程:

$$(M_B\theta_B+F_{NB}u_B+F_{QB}w_B)-(M_A\theta_A+F_{NA}u_A+F_{QA}w_A)+\int_A^B(pu+qw)\mathrm{d}x=\int_A^B(M\mathrm{d}\theta+F_N\varepsilon\mathrm{d}x+F_Q\gamma_0\mathrm{d}x) \tag{5-35}$$

3. 变形体虚功方程的证明

现在对虚功方程式(5-35)加以证明。

首先,根据平衡微分方程式(5-29),可知下面等式成立:

$$\int_A^B[(\mathrm{d}F_N+p\mathrm{d}x)u+(\mathrm{d}F_Q+q\mathrm{d}x)w+(\mathrm{d}M+F_Q\mathrm{d}x)\theta]=0$$

上式可改写为

$$\int_A^B (u\mathrm{d}F_N + w\mathrm{d}F_Q + \theta\mathrm{d}M) + \int_A^B (pu + qw + F_Q\theta)\mathrm{d}x = 0 \tag{a}$$

由于

$$u\mathrm{d}F_N + w\mathrm{d}F_Q + \theta\mathrm{d}M = \mathrm{d}(uF_N + wF_Q + M\theta) - (F_N\mathrm{d}u + F_Q\mathrm{d}w + M\mathrm{d}\theta)$$

故式(a)又可改写为

$$[uF_N + wF_Q + M\theta]\Big|_A^B - \int_A^B (F_N\mathrm{d}u + F_Q\mathrm{d}w + M\mathrm{d}\theta) + \int_A^B (pu + qw)\mathrm{d}x + \int_A^B F_Q\theta\mathrm{d}x = 0 \tag{b}$$

由应变位移关系式(5－31)、(5－32)，可知

$$\mathrm{d}u = \varepsilon\mathrm{d}x,\mathrm{d}w - \theta\mathrm{d}x = \gamma_0\mathrm{d}x$$

代入式(b)，得

$$[F_{NB}u_B + F_{QB}w_B + M_B\theta_B] - [F_{NA}u_A + F_{QA}w_A + M_A\theta_A] + \int_A^B (pu + qw)\mathrm{d}x = \int_A^B (F_N\varepsilon\mathrm{d}x + F_Q\gamma_0\mathrm{d}x + M\mathrm{d}\theta) \tag{c}$$

式(c)就是式(5－35)。于是，变形体虚功方程式(5－35)得到了证明。

4．推广

如果杆上除分布荷载外，还有集中荷载，只需在外虚功 W 中计入集中荷载 F_P 作的虚功 $\sum F_P\Delta$（Δ 是与 F_P 相应的位移），便得到推广的变形体虚功方程。

式(5－35)中只讨论了单个杆件的情况。现在进一步讨论杆件结构的情况。

对结构中每个杆件分别应用式(5－35)，然后进行叠加，即得

$$\sum[M\theta + F_N u + F_Q w]_A^B + \sum\int_A^B (pu + qw)\mathrm{d}s + \sum F_P\Delta = \sum\int_A^B (M\mathrm{d}\theta + F_N\varepsilon\mathrm{d}s + F_Q\gamma_0\mathrm{d}s) \tag{d}$$

式中左边第一项是所有各杆杆端力所作虚功总和。现在将所有各杆的杆端截面分为两类：

第一类杆端截面是结构内部结点处的杆端截面（例如图 5－30 中杆件 1、2、3 的截面 A_1、A_2、A_3）。由于结点本身处于平衡状态，因此在同一结点周围各杆的杆端力组成一个平衡力系，它们在结点位移上所作虚功总和等于零。

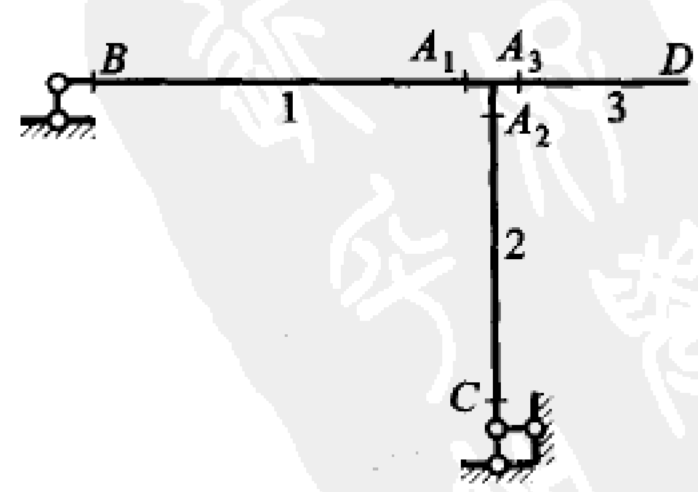


图　5－30

第二类杆端截面是结构的边界截面（例如图 5－30 中的截面 B、C、D）。这些杆端力的虚功总和就是结构边界外力的虚功，包括边界荷载和支座反力的虚功。其中，支座反力的虚功可记为 $\sum F_{RK}c_K$，这里

F_{RK} 是支座反力，c_K 是与 F_{RK} 相应的支座位移。

通常，可将结构边界荷载所作虚功与各杆集中荷载的虚功统一表示为 $\sum F_P\Delta$。于是，可得到杆件结构虚功方程的一般形式：

$$\sum F_P\Delta + \sum F_{RK}c_K + \sum\int(pu + qw)\mathrm{d}s$$
$$= \sum\int_A^B(M\mathrm{d}\theta + F_N\varepsilon\mathrm{d}s + F_Q\gamma_0\mathrm{d}s) \qquad (5-36)$$

上式左边第一项和第三项分别表示集中荷载和分布荷载作的虚功。这两项也可合成一项，仍记为 $\sum F_P\Delta$，则上式还可简写为（令 $\mathrm{d}\theta = \kappa\mathrm{d}s$）

$$\sum F_P\Delta + \sum F_{RK}c_K = \sum\int_A^B(M\kappa + F_N\varepsilon + F_Q\gamma_0)\mathrm{d}s \qquad (5-37)$$

在上面的证明过程中，只引用了力系的平衡条件和变形的协调条件。这两个条件就是应用变形体虚功原理时所需满足的全部条件。也就是说，虚功方程实际上是平衡方程和协调方程的综合。反过来，虚功方程既可以用来代替平衡方程，也可以用来代替几何方程，即协调方程。

上述两方面的条件是分别对力系和变形独立给出的。力系和变形彼此是独立无关的。如果力系是给定的，位移是虚设的，式(5－37)便称为变形体的虚位移方程，它代表力系的平衡方程，可用于求力系中的某未知力。如果位移是给定的，力系是虚设的，则式(5－37)称为变形体的虚力方程，它代表几何协调方程，可用于求给定变形状态中某未知位移。

5. 变形体虚功方程的两种应用

虚功方程是"两用"方程：既可当虚力方程用，也可当虚位移方程用。

(1) 变形体虚力方程

在虚功方程(5－37)中，如果令力系（F_P, F_{RK}, M, F_N, F_Q）是虚设的平衡力系，则可写为

虚设平衡力系

$$\sum F_P^*\Delta + \sum F_{RK}^*c_K = \sum\int(M^*\kappa + F_N^*\varepsilon + F_Q^*\gamma_0)\mathrm{d}s \qquad (5-38)$$

实际协调变形

这里，加 * 号的量表示虚设量。式(5－38)称为变形体虚力方程。当虚设力系设定之后，上式就成为关于变形状态中各物理量（位移 Δ 和支座位移 c_K 及应变 κ、ε、γ_0）之间应满足的条件，即几何条件。这是一种借用虚功形式表示的几何条件。单位荷载法就是应用这种形式的几何条件来求位移 Δ 的。

(2) 变形体虚位移方程

在虚功方程(5－37)中，如果令变形状态为虚设，则可写成

虚设变形状态

$$\sum F_P\Delta^* + \sum F_{RK}c_K^* = \sum\int(M\kappa^* + F_N\varepsilon^* + F_Q\gamma_0^*)\mathrm{d}s \qquad (5-39)$$

实际平衡力系

上式称为变形体虚位移方程。当虚设变形状态设定之后，上式就成为平衡受力状态中各物理量(荷载 F_P 和支座反力 F_{RK} 及内力 M、F_N、F_Q)之间应满足的条件，即平衡方程。这是一种借用虚功形式表示的平衡方程。这种形式的平衡方程可方便地用来计算某个拟求的支座反力。单位支座位移法就是应用这种形式的平衡条件来求支座反力的。

6. 单位支座位移法

考虑结构某个平衡受力状态，已知荷载 F_P 和各杆内力 M、F_N、F_Q，现在拟求某个支座反力(或约束反力)F_{R1}。

首先，根据拟求的支座反力 F_{R1}，虚设与之相应的单位支座位移 $c_1^*=1$(其余支座位移均设为零)，并确定由此单位支座位移引起的协调变形状态(包括与荷载 F_P 的相应位移 δ_{P1}^* 及应变 $\bar{\varepsilon}_1^*$、$\bar{\gamma}_{01}^*$、$\bar{\kappa}_1^*$)。

其次，将上述平衡受力状态和虚设的协调变形状态代入虚位移方程(5－39)，即得

$$F_{R1} = \sum\int(M\bar{\kappa}_1^* + F_N\bar{\varepsilon}_1^* + F_Q\bar{\gamma}_{01}^*)\mathrm{d}s - \sum F_P\delta_{P1}^* \qquad (5-40)$$

这就是应用单位支座位移法求结构支座反力 F_{R1} 的一般公式。

如果结构是静定结构，当虚设单位移支座位移时，结构只产生刚体体系的位移。此时，虚设应变为零，式(5－40)简化为

$$F_{R1} = -\sum F_P\delta_{P1}^*$$

此即在§3－8中已导出的式(d)，也即 $F_X = -\sum F_P\cdot\delta_P$。

§5－9　互等定理

本节讨论四个普遍定理——互等定理。在以后的章节中，经常要引用这些定理。

互等定理只适用于线性变形体系，其应用条件为

(1) 材料处于弹性阶段,应力与应变成正比。

(2) 结构变形很小,不影响力的作用。

1. 功的互等定理

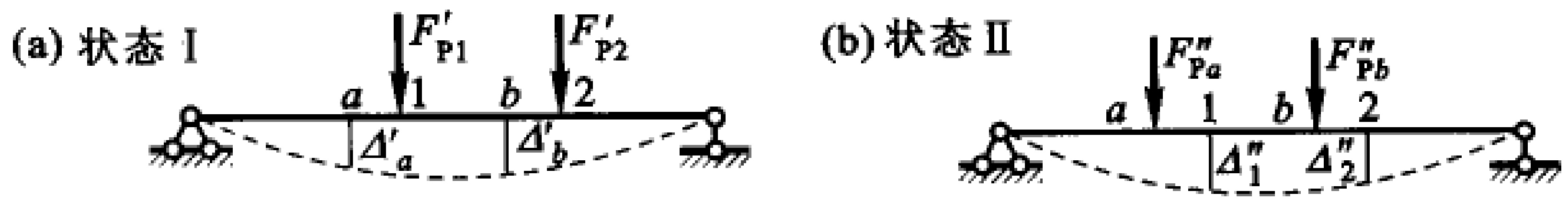


图　5-31

图 5-31a、b 所示为同一线性变形体系的两种状态。

在状态 I 中,力系用 F'_P、F'_N、M'、F'_Q 表示,位移和应变用 Δ'、ε'、κ'、γ'_0 表示。

在状态 II 中,力系用 F''_P、F''_N、M''、F''_Q 表示,位移和应变用 Δ''、ε''、κ''、γ''_0 表示。

令状态 I 的力系在状态 II 的位移和变形上作虚功,可写出虚功方程如下:

$$W_{12} \equiv \sum F'_P \Delta'' = \sum \int \frac{F'_N F''_N}{EA} ds + \sum \int \frac{M' M''}{EI} ds + \sum \int \frac{k F'_Q F''_Q}{GA} ds \qquad (a)$$

这里,外虚功 W 有两个下标,其中第一个表示受力状态,第二个表示位移和变形状态。

同理,令状态 II 的力系在状态 I 的位移和变形上作虚功,写出虚功方程如下:

$$W_{21} \equiv \sum F''_P \Delta' = \sum \int \frac{F''_N F'_N}{EA} ds + \sum \int \frac{M'' M'}{EI} ds + \sum \int \frac{k F''_Q F'_Q}{GA} ds \qquad (b)$$

由于式(a)、(b)右边的内虚功彼此相等,所以左边的外虚功也应相等:

$$\sum F'_P \Delta'' = \sum F''_P \Delta'$$

这就是功的互等定理:在任一线性变形体系中,第一状态外力在第二状态位移上所作的功 W_{12} 等于第二状态外力在第一状态位移上所作的功 W_{21},即

$$W_{12} = W_{21} \qquad (5-41)$$

在本节讨论的定理中,功的互等定理是基本定理,其他几个定理可由功的互等定理导出。

2. 位移互等定理

图 5-32 所示为功的互等定理应用的一个特殊情形。设状态 I 中只有一个荷载 F_{P1},状态 II 中也只有一个荷载 F_{P2}。这里,表示位移 Δ_{ij} 时也采用两个下标,其中第一个下标 i 表示位移是与 F_{Pi} 相应的,第二个下标 j 表示位移是由力

F_{Pj}引起的。例如,图5-32a中Δ_{21}表示力F_{P1}引起的与F_{P2}相应的位移。

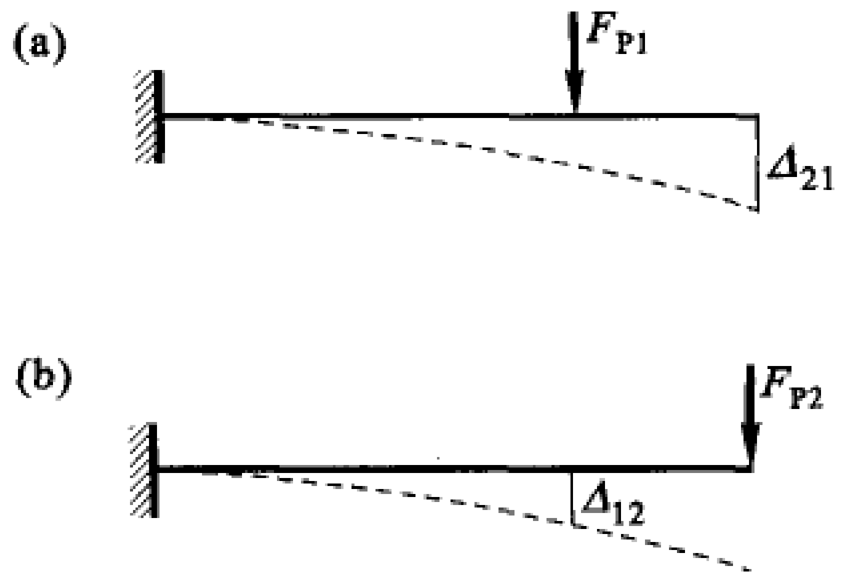


图　5-32

由功的互等定理式(5-41)可得

$$F_{P1}\Delta_{12}=F_{P2}\Delta_{21} \tag{c}$$

在线性变形体系中,位移Δ_{ij}与力F_{Pj}的比值是一个常数,记作δ_{ij},即

$$\frac{\Delta_{ij}}{F_{Pj}}=\delta_{ij}$$

或

$$\Delta_{ij}=F_{Pj}\delta_{ij} \tag{d}$$

δ_{ij}称为位移影响系数。

将式(d)代入式(c),得

$$F_{P1}F_{P2}\delta_{12}=F_{P2}F_{P1}\delta_{21} \tag{e}$$

由此得到下列等式

$$\delta_{12}=\delta_{21} \tag{5-42}$$

这就是位移互等定理:在任一线性变形体系中,由荷载F_{P1}引起的与荷载F_{P2}相应的位移影响系数δ_{21}等于由荷载F_{P2}引起的与荷载F_{P1}相应的位移影响系数δ_{12}。

由于式(e)两边分别是功W_{12}和W_{21},且彼此相等,可记为W,因此δ_{12}和δ_{21}的量纲就是$\left(\frac{W}{F_{P1}F_{P2}}\right)$的量纲。

应当指出,这里的荷载可以是广义荷载,而位移则是相应的广义位移。在一般情况下,定理中的两个广义位移的量纲可能是不相等的,但它们的影响系数在数值和量纲上仍然保持相等。因此,严格地说,位移互等定理应该称为位移影响系数互等定理。但在习惯上,仍称为位移互等定理。

3．反力互等定理

反力互等定理也是功的互等定理的一种特殊情况。

图 5－33 所示为同一线性变形体系的两种变形状态。在图 5－33a 中，由于支座 1 发生位移 c_1 而在支座 1 和 2 引起的反力分别用 F_{R11} 和 F_{R21} 表示；在图 5－33b中，由于支座 2 发生位移 c_2，在支座 1、2 分别引起反力 F_{R12} 和 F_{R22}。这里，反力 F_{Rij} 的两个下标中，第一个下标 i 表示反力是与位移 c_i 相应的，第二个下标 j 表示反力是由 c_j 引起的。

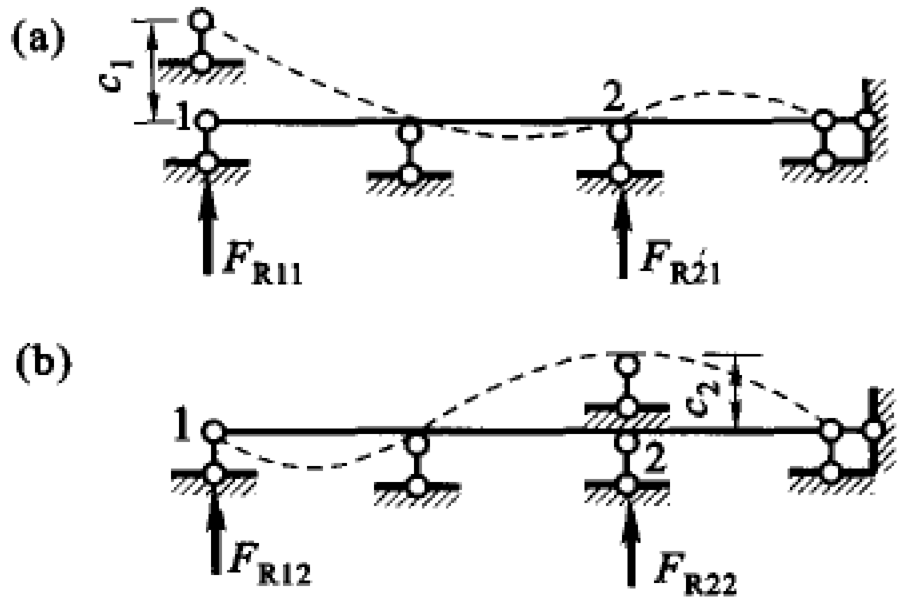


图　5－33

对上述两种状态应用功的互等定理，得

$$F_{R11}\times 0+F_{R21}\cdot c_2=F_{R12}\cdot c_1+F_{R22}\times 0$$

即

$$F_{R21}\cdot c_2=F_{R12}\cdot c_1 \tag{f}$$

在线性变形体系中，反力 F_{Rij} 与 c_j 的比值为一常数，记作 r_{ij}，即

$$r_{ij}=\frac{F_{Rij}}{c_j}$$

或

$$F_{Rij}=r_{ij}c_j \tag{g}$$

r_{ij} 称为反力影响系数。

将式(g)代入式(f)，得

$$c_1r_{21}c_2=c_2r_{12}c_1 \tag{h}$$

由此得到下列等式：

$$r_{21}=r_{12} \tag{5-43}$$

这就是反力互等定理：

在任一线性变形体系中，由位移 c_1 所引起的与位移 c_2 相应的反力影响系数 r_{21}，等于由位移 c_2 所引起的与位移 c_1 相应的反力影响系数 r_{12}。

由于式(h)的左边和右边都是功 W，因此反力影响系数 r_{12} 和 r_{21} 的量纲就是 $\left(\frac{W}{c_1c_2}\right)$ 的量纲。

上述所说的支座可以换成别的约束，支座位移 c_i 可以换成该约束相应的广义位移，因而支座反力可以换成与该约束相应的广义力。

4. 位移反力互等定理

图5－34所示为同一线性变形体系的两种变形状态。在图5－34a中，由于荷载 F_{P1} 作用，支座2产生反力 F_{R21}；在图5－34b中，由于支座2位移 c_2 而在 F_{P1} 方向产生相应的位移 Δ_{12}。

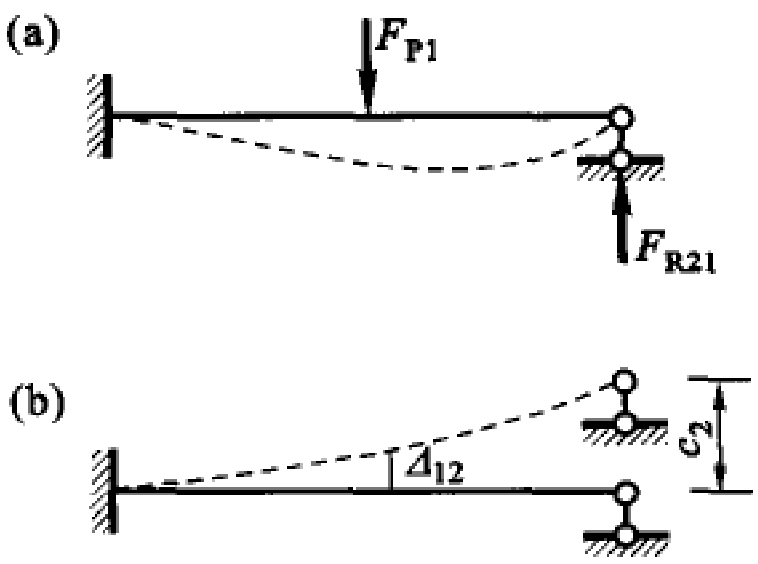


图　5－34

由功的互等定理可得

$$F_{P1}\Delta_{12}+F_{R21}c_2=0$$

即

$$F_{P1}\Delta_{12}=-F_{R21}c_2 \tag{i}$$

令

$$\frac{\Delta_{12}}{c_2}=\delta'_{12},\quad \frac{F_{R21}}{F_{P1}}=r'_{21}$$

即

$$\Delta_{12}=\delta'_{12}c_2,\quad F_{R21}=r'_{21}F_{P1} \tag{j}$$

将式(j)代入式(i)，得

$$F_{P1}\delta'_{12}c_2=-r'_{21}F_{P1}c_2 \tag{k}$$

由此得出下列等式：

$$\delta'_{12}=-r'_{21} \tag{5-44}$$

这就是位移反力互等定理：在任一线性变形体系中，由位移 c_2 所引起的与荷载 F_{P1} 相应的位移影响系数 δ'_{12}，在绝对值上等于由荷载 F_{P1} 所引起的与位移 c_2 相应的反力影响系数 r'_{21}，但二者差一个负号。同样，这里的力可以是广义力，位移可以是广义位移。

由于式(k)的左边和右边的量纲都是功 W 的量纲，因此影响系数 δ'_{12} 和 r'_{21} 的量纲都是 $\left(\frac{W}{F_{P1}c_2}\right)$ 的量纲。

§5－10 小 结

本章既是静定部分的结尾，又是超静定部分的先导。

作为静定部分的结尾，本章第一部分讨论静定结构两个基本问题之一——求位移的问题。先采用刚体体系虚力原理和叠加原理导出计算位移的一般公式，后来又指出还可以应用变形体虚力原理直接导出。

作为超静定部分的先导，本章第二部分将刚体虚功原理引申到变形体虚功原理(变形体虚力原理和变形体虚位移原理的综合)，变形体虚功原理既可用于求位移，也可用于求约束力；既可用于静定结构问题，也可用于超静定结构问题，从而为虚功法解超静定问题准备了理论基础。

1. 位移计算的一般公式及其灵活应用

位移计算的一般公式是式(5－10)，即

$$\Delta=\sum\int(\overline{M}\kappa+\overline{F}_{N}\varepsilon+\overline{F}_{Q}\gamma_{0})\mathrm{d}s-\sum\overline{F}_{RK}c_{K}$$

式中包含两组物理量：

一组是实际的位移和应变，包括拟求的实际位移 Δ 以及实际给定的支座位移 c_K 和应变 κ、ε、γ_0。

另一组是虚设外力和内力，包括虚设的与 Δ 共轭的单位荷载 $F_P=1$ 及与该单位荷载保持平衡的虚支座反力 $\overline{F}_{RK}$ 和虚内力 $\overline{M}$、$\overline{F}_N$、$\overline{F}_Q$。

这个位移计算方法由于要虚设力系，故称为虚力法；由于虚设力系以单位荷载为标志，故又称为单位荷载法。

对位移计算的一般公式要会灵活应用，现指出以下几点：

(1) 了解式(5－10)的应用范围——对于弹性和非弹性材料，对于荷载、温度、支座移动等因素，对于静定和超静定结构，式(5－10)都适用。

(2) 了解式(5－19)的应用范围——只适用于弹性材料和荷载因素。对静定和超静定结构都适用。

(3) 了解位移公式在各种具体条件下的简化形式(对于支座移动、温度与荷载等不同因素，对于梁、刚架、桁架、拱、混合结构等不同形式)。

(4) 了解图乘法的应用条件，熟练掌握计算方法(例如复杂图形的分解)。

(5) 在虚力法中，位移计算问题主要归结为内力计算问题。因此，在学习位移计算问题的同时，应当提高内力计算的能力。

(6) 如果 Δ 是拟求的广义位移，则虚设的荷载应是与广义位移 Δ 共轭的单位广义荷载 $F_P=1$，共轭的定义是指它们之间的虚功表示式应与下式保持一致：

$$W = F_P\Delta = 1\cdot\Delta$$

2. 变形体虚功方程的两类形式

(1) 变形体虚功方程的两类形式

变形体虚功方程(5-37),即

$$\sum F_P\Delta + \sum F_{RK}c_K = \sum\int(M\kappa + F_N\epsilon + F_Q\gamma_0)\mathrm{d}s$$

虚功方程(5-37)有两种应用形式:

如果虚设力系,则称为虚力方程(5-38)。它代表几何协调方程,可用于求位移。单位荷载法求位移的一般公式可以应用虚力方程直接导出。

如果虚设位移和变形状态,则称为虚位移方程(5-39)。它代表平衡方程,可用于求支座反力或约束反力。单位支座位移法求支座反力的一般公式(5-40)可以应用虚位移方程导出。

虚功方程不涉及到材料的性质,对弹性和非弹性问题都可用。

(2) 对偶量和对偶关系

从功的角度看,位移和力是一双对偶量。从问题类型看,求约束力和求位移是一双对偶问题。从方程类型看,虚位移方程和虚力方程是一双对偶方程,力系的平衡方程和位移的几何协调方程是一双对偶方程。从力学问题的解法来看,"平衡-几何"解法和"虚功解法"是一双对偶解法,静力法和机动法是一双对偶解法。

上述对偶关系可用表5-4列出。

表5-4 力学中的对偶关系

	求约束力	求位移
"平衡-几何"解法	平衡方程	几何协调方程
"虚功"解法	虚位移方程	虚力方程
	单位支座位移法	单位荷载法

3. 互等定理及其应用

有四个互等定理,其中虚功互等定理是基础,其余三个是特例:

虚功互等定理(式5-41): $W_{12} = W_{21}$

位移互等定理(式5-42): $\delta_{12} = \delta_{21}$

反力互等定理(式5-43): $r_{12} = r_{21}$

位移反力互等定理(式5-44): $\delta'_{12} = -r'_{21}$

互等定理的应用条件——只适用于线性变形体系。

互等关系中的对偶量——两个量互等是指在数值和量纲方面都相等。

在虚功互等定理中,式(5－41)的两边都是功(W_{12}和W_{21}),是指两种交互作用的功相等。显然,在数值和量纲上都相等。

在其余三个互等定理中,等式两边都是影响系数,是指两种交互作用的影响系数在数值和量纲上都相等。以位移互等定理为例,严格地说,应该称为位移影响系数互等定理。因为定理中的两个位移可以是两个广义位移(如一个线位移和一个角位移),两个广义位移的量纲可能是不相等的,但它们的影响系数在数值和量纲上仍然保持相等。

在前面的章节中是否可以找出互等定理的一些应用实例?例如,第4章的机动法作静定反力和内力影响线的理论基础。又如,§5－2式(5－5)、(5－6)

$$\Delta=\overline{M}\theta,\quad \Delta=\overline{F}_Q\eta$$

其中影响系数$\overline{M}$和$\overline{F}_Q$的理论解释,是否也可应用互等定理加以说明?

在以后的章节中也会有互等定理的应用实例,有心人不妨加以收集和整理。

§5－11 思考与讨论

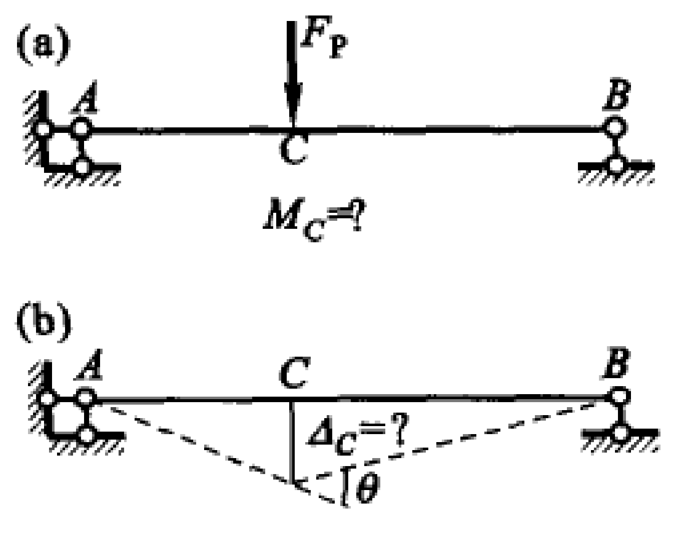
§5－1 思考题

5－1 应用虚功原理求位移时,怎样选择虚设的单位荷载?试应用虚功原理求图5－1中杆AC的转角α和铰C处两侧截面的相对转角θ。

5－2 详细比较单位位移法与单位荷载法的原理和步骤。详细比较下面图示两个问题的作法:

(a) C点作用荷载F_P时,求截面C的弯矩M_C(单位位移法)。

(b) 截面C有相对转角θ时,求C点的竖向位移Δ_C(单位荷载法)。

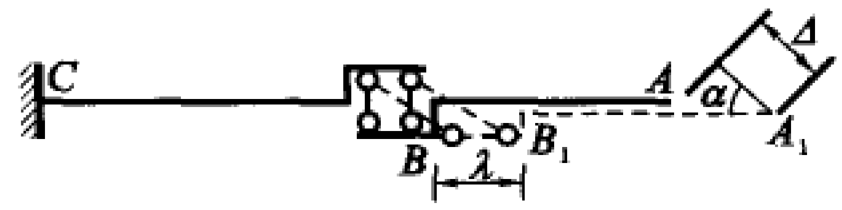


思考题5－2图

§5－2 思考题

5－3 图示中,设截面B有相对轴向位移λ,现在拟求A点的斜向位移Δ,应如何选取虚

设力系？又 Δ 与 λ 之间的比例系数是什么？



思考题5-3图

5-4 如果把均布荷载 q(图5-8a)看作一个广义荷载：荷载集度 q 代表广义荷载的值(模)，集度 $q=1$ 的均布荷载代表单位广义荷载，试问与之共轭的广义位移 Δ 代表什么？

5-5 在§5-2中推导位移一般公式(5-10)时是结合静定结构进行的。试问式(5-10)是否可用于求超静定结构的位移？

提示：可参见思考题5-24。

§5-3 思考题

5-6 试说明式(5-10)和(5-19)中各量的物理意义和正负号规定，分别说明式(5-10)、式(5-19)的适用条件。

5-7 在非弹性情况下，怎样计算荷载作用下的位移？设曲率与弯矩之间有如下的非线性关系：$\kappa = aM + bM^2$。试导出在荷载作用下梁的位移公式。

5-8 试证明矩形截面系数 k 值是1.2(见表5-2)。

§5-4 思考题

5-9 在例5-4中计算桁架结点 C 的竖向位移时，曾将均布荷载化为结点荷载，试问这一变换对所求位移有没有影响？

5-10 对于例5-6中的简支梁，先求截面 A 转角 θ_A，再求截面 B 转角 θ_B，然后验证例5-6中求得的相对转角 Δ 计算结果。

5-11 如果规定当 $\frac{\Delta_N}{\Delta_M}$ 和 $\frac{\Delta_Q}{\Delta_M}$ 两个比值不超过5%时，可以忽略剪切变形和轴力变形对位移的影响，则对于例5-5中曲梁，使用式(5-20)计算位移时，h/R 应符合什么条件？

§5-5 思考题

5-12 图乘法的适用条件是什么？求变截面梁和拱的位移时是否可用图乘法？如果梁的截面沿杆长成阶梯形变化，求位移时能否用图乘法？

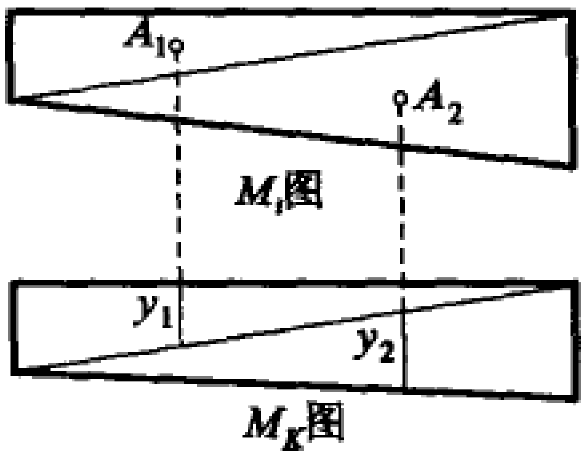
5-13 应用图乘法计算位移时，正负号怎样确定？

5-14 设图示 M_i 图和 M_K 图都是梯形，试问下列算法是否正确？

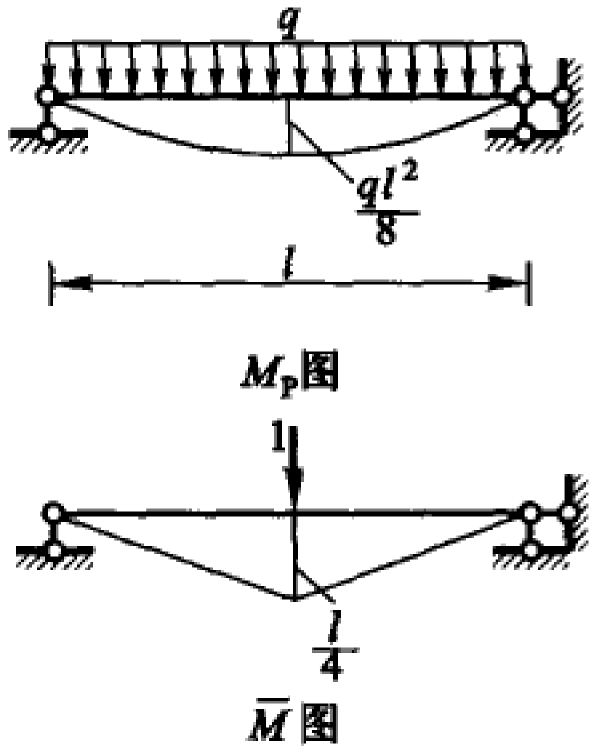
$$\int M_i M_K \mathrm{d}x = A_1 y_1 + A_2 y$$

5-15 图示 M_P 图和 $\bar{M}$ 图分别为抛物线和三角形，试问下列算法是否正确？

$$\int M_P \bar{M} \mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \cdot l\right) \times \frac{l}{4}$$

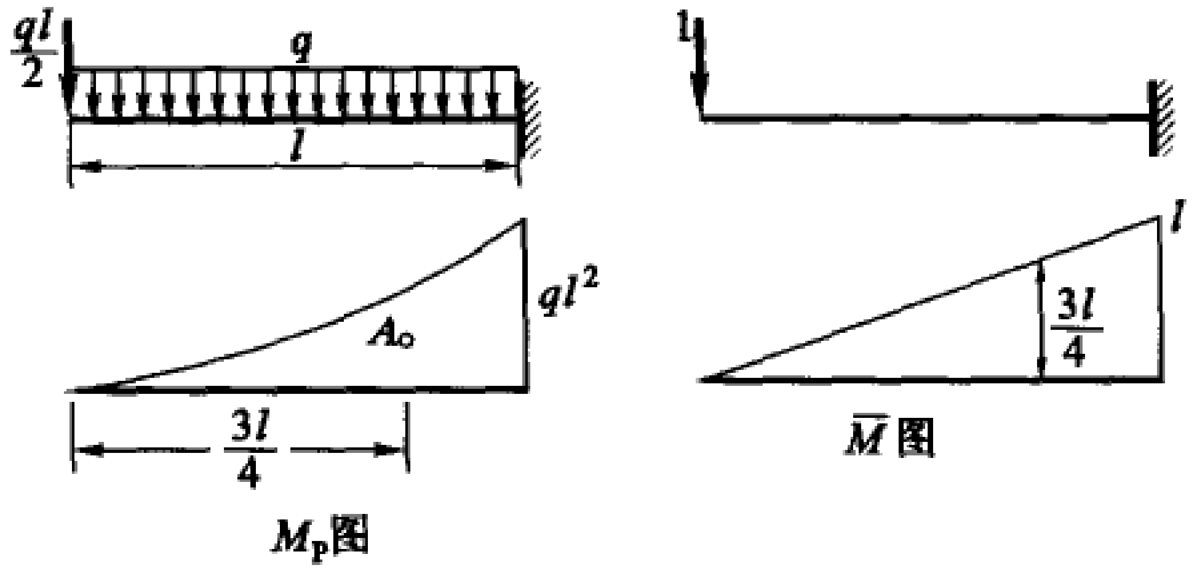


思考题 5－14 图



思考题 5－15 图

5－16　对于图示的 M_P 图和 $\overline{M}$ 图，下列算法是否正确？



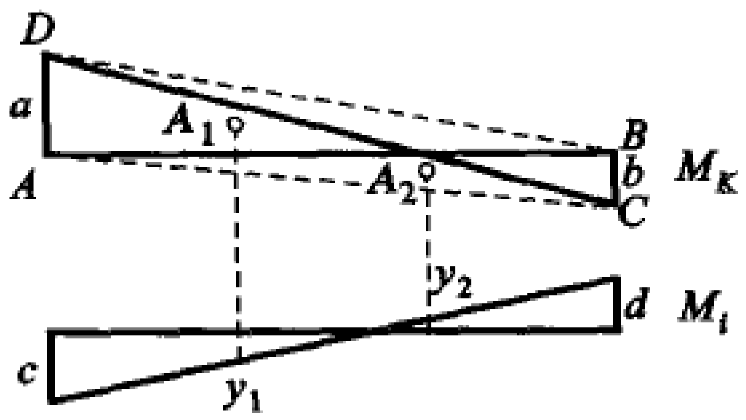
思考题 5－16 图

$$\int M_P \overline{M} \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3} \cdot ql^2 \cdot l\right) \times \frac{3l}{4}$$

5－17　对于图 5－19 所示的两个梯形，试导出下列计算公式：

$$\int M_i M_K \mathrm{d}x = \frac{al}{6}(2c + d) + \frac{bl}{6}(c + 2d) \qquad \text{(a)}$$

5－18　对于图示的两个图形，是否可用上式(a)计算？其中，a、b、c、d 的正负号如何定？



思考题 5－18 图

§5-6 思考题

5-19 计算温度改变引起的位移时,式(5-28b)中各项的符号如何确定?如果例5-12中梁上侧和柱侧温度升高15℃,梁下侧和柱右侧温度不变,试求位移Δ_C。

§5-8 思考题

5-20 试说明变形体虚功原理与刚体虚功原理的区别。

5-21 试说明变形体虚功原理的应用条件和应用范围。

5-22 试说明变形体虚功方程与力系平衡方程、变形协调方程的关系。为什么说变形体虚力方程实际上就是变形协调方程?

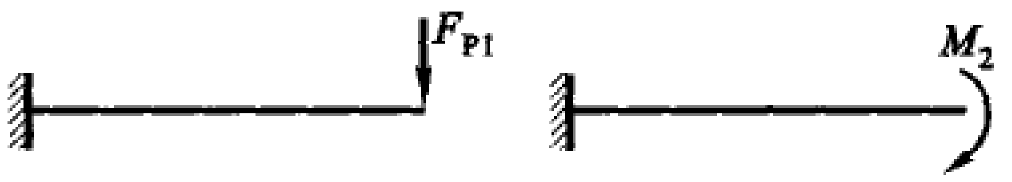
5-23 直接由变形体虚力方程推导支座移动时的位移计算公式(5-4)和局部变形时的位移公式(5-8)。

5-24 直接由变形体虚力方程推导位移计算一般公式(5-10)。为什么说此式同样适用于静定和超静定结构?试从推导过程加以说明。

讨论:位移计算一般公式(5-10)既可直接由变形体虚力方程导出,又可像在§5-2中那样由刚体体系虚力方程和叠加原理导出。但在§5-2中是结合静定结构进行的,因而尚未证明式(5-10)还可用于求超静定结构的位移(参见思考题5-5)。

§5-9 思考题

5-25 试就下列两图说明位移互等定理,并说明其中δ_{12}和δ_{21}的量纲是什么?

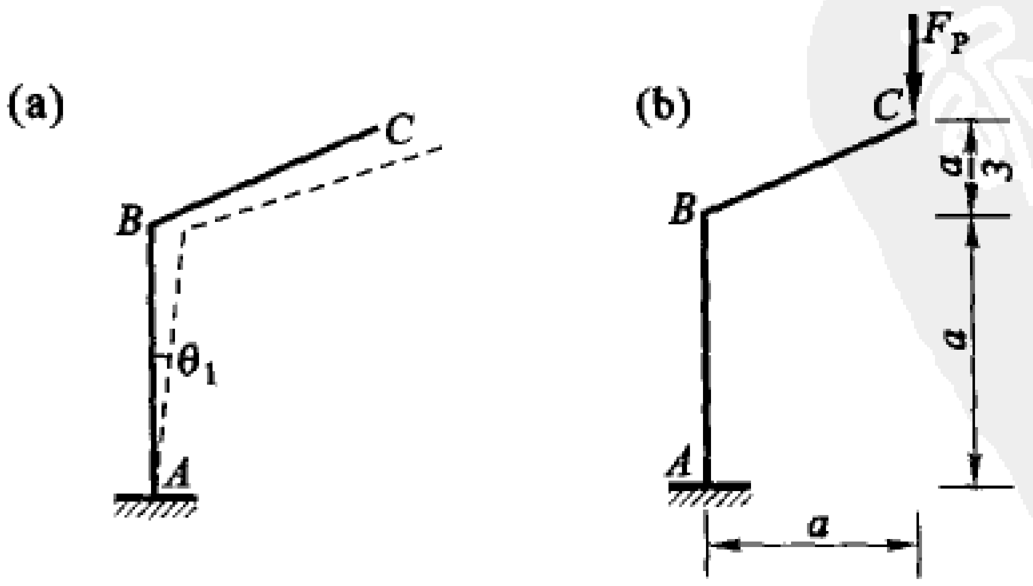


思考题5-25图

5-26 反力互等定理是否可用于静定结构?这时会得出什么结果?

5-27 位移反力互等定理是否可用于静定结构?是否可用于非弹性的静定结构?

5-28 试就静定刚架的两种状态说明位移反力互等定理。在图a所示状态中,设刚架的支座A有给定转角θ_1;在图b所示状态中,设刚架在C点有给定荷载F_P。



思考题5-28图

5－29　思考题 5－28 中 δ'_{21} 和 r'_{12} 的量纲是什么？设 $\theta_1=0.001$ rad，试用位移反力互等定理求 C 点的竖向位移。

5－30　式(5－4)、(5－5)、(5－6)都是计算位移的公式：

$$\Delta=-\sum\bar{F}_{RK}c_K,\quad \Delta=\bar{M}\theta,\quad \Delta=\bar{F}_Q\eta$$

其中 $-\bar{F}_{RK}$、$\bar{M}$、$\bar{F}_Q$ 都是位移影响系数。试用反力位移互等定理及其公式(5－44)加以论证。

习　题

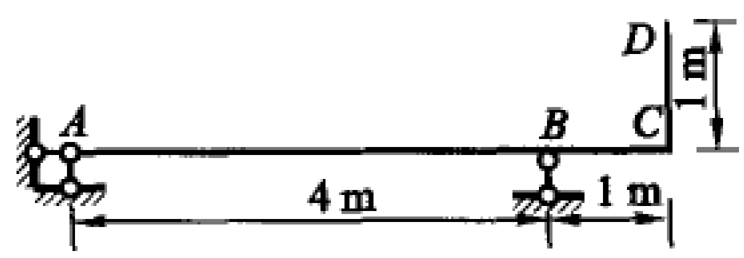
5－1　试用刚体体系虚力原理求图示结构 D 点的水平位移：

(a) 设支座 A 向左移动 1 cm。

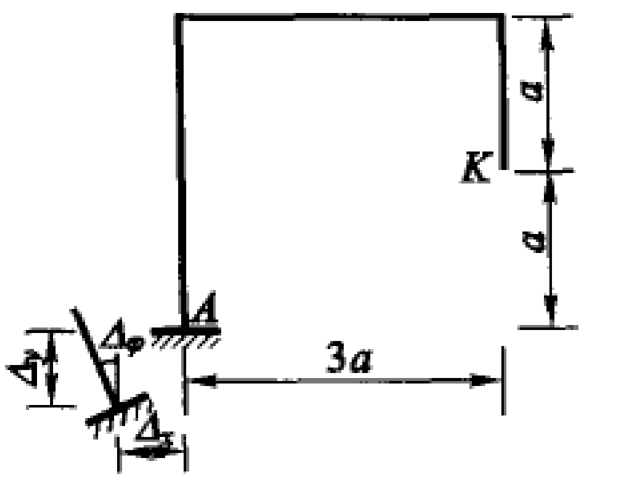
(b) 设支座 A 下沉 1 cm。

(c) 设支座 B 下沉 1 cm。

5－2　设图示支座 A 有给定位移 Δ_x、Δ_y、Δ_φ。试求 K 点的竖向位移 Δ_V、水平位移 Δ_H 和转角 θ。



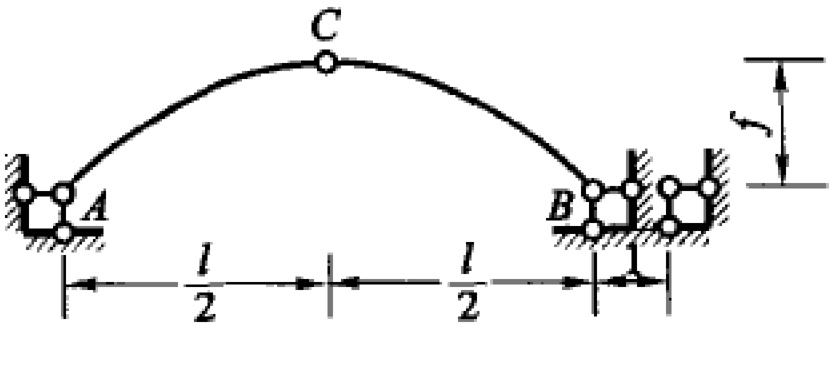
题 5－1 图



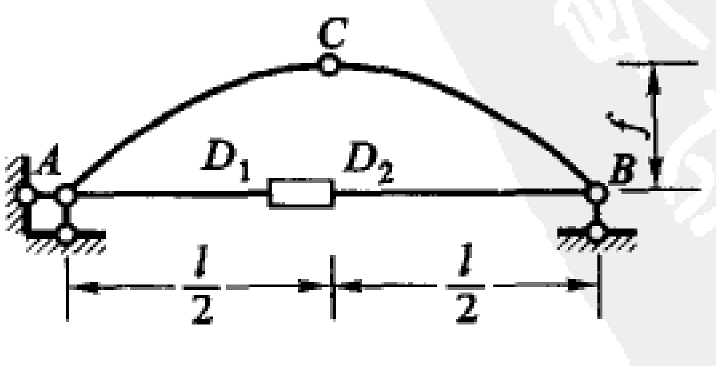
题 5－2 图

5－3　设图示三铰拱支座 B 向右位移单位距离。试求 C 点的竖向位移 Δ_1、水平位移 Δ_2 和两个半拱的相对转角 Δ_3。

5－4　设图示三铰拱中的拉杆 AB 在 D 点装有花兰螺丝。如果拧紧螺丝，使截面 D_1 与 D_2 彼此靠近的距离为 λ，试求 C 点的竖向位移 Δ。



题 5－3 图

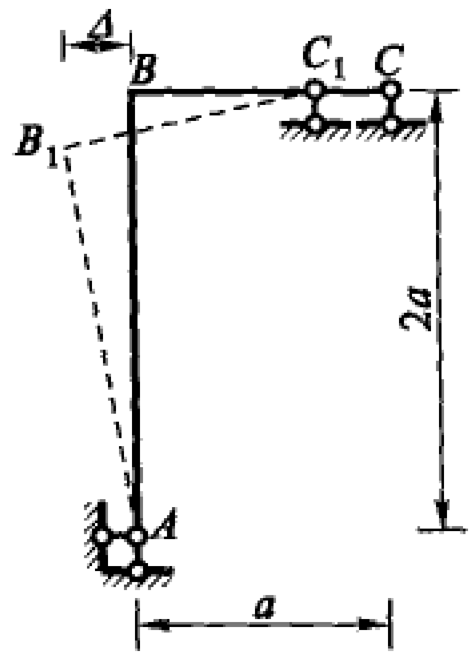


题 5－4 图

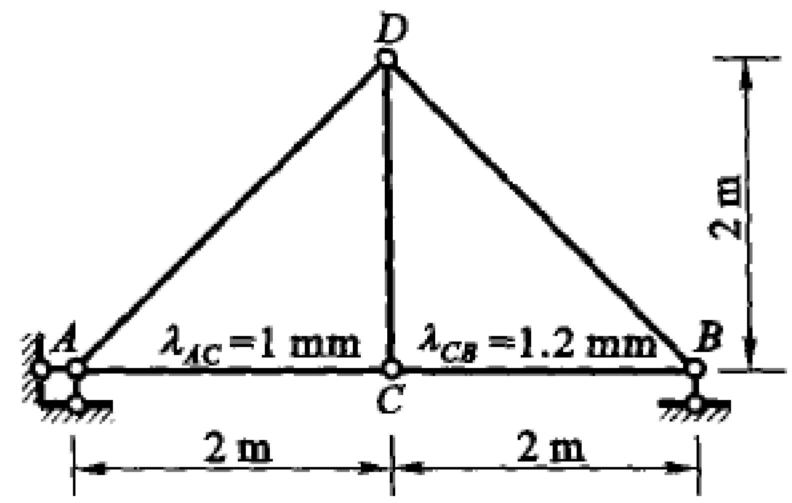
5－5　设图示柱 AB 由于材料收缩，产生应变 $-\varepsilon_1$。试求 B 点的水平位移 Δ。

5－6　设由于温度升高，图示杆 AC 伸长 $\lambda_{AC}=1$ mm，杆 CB 伸长 $\lambda_{CB}=1.2$ mm。试求 C

点的竖向位移 Δ。



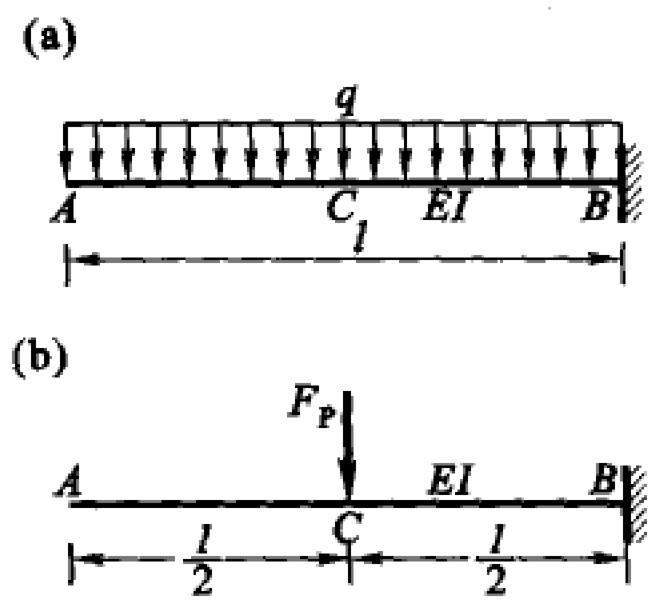
题 5－5 图



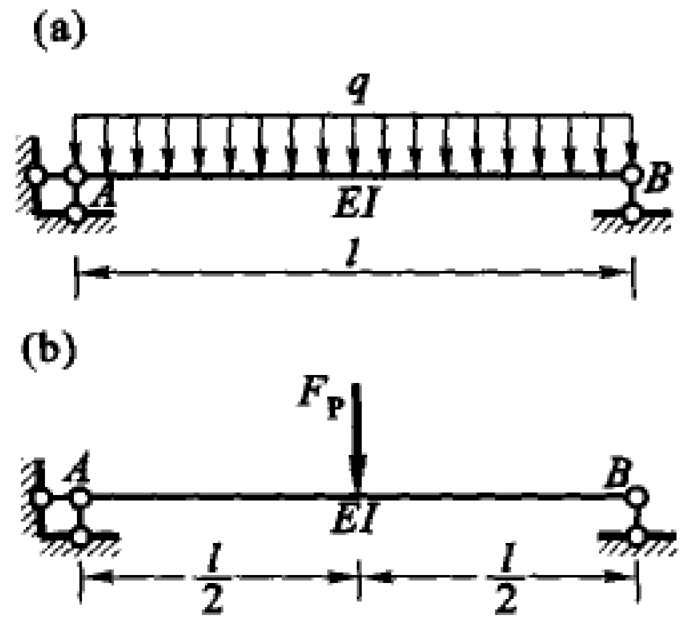
题 5－6 图

5－7　试用积分法求图示悬臂梁 A 端和跨中 C 点的竖向位移和转角(忽略剪切变形的影响)。

5－8　试用积分法求图示梁的跨中挠度(忽略剪切变形的影响)。



题 5－7 图



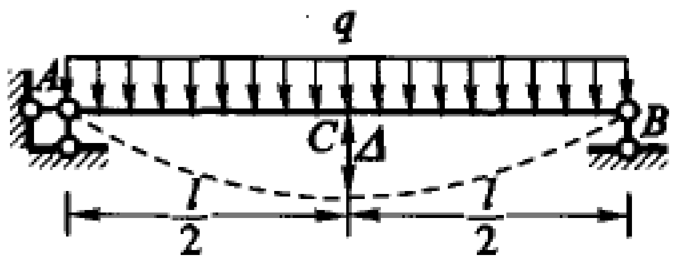
题 5－8 图

5－9　试求图示简支梁中点 C 的竖向位移 Δ，并将剪力和弯矩对位移的影响加以比较。设截面为矩形，h 为截面高度，$G=\dfrac{3}{8}E$，$k=1.2$，$\dfrac{h}{l}=\dfrac{1}{10}$。

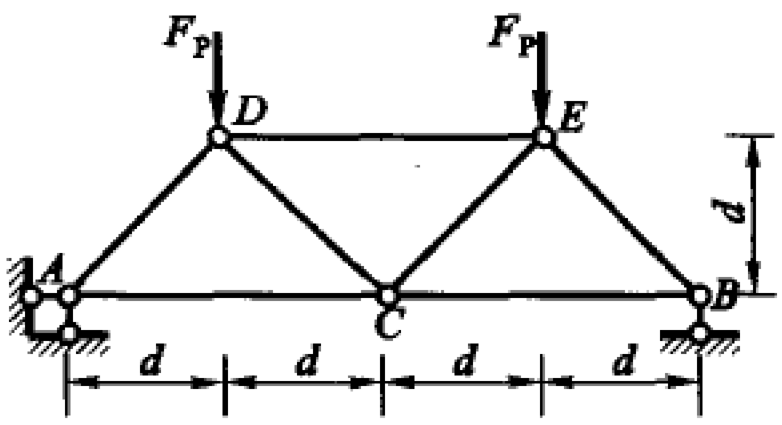
5－10　试求图示结点 C 的竖向位移 Δ_C，设各杆的 EA 相等。

5－11　试求图示结构结点 C 的水平位移 Δ_C，设各杆的 EA 相等。

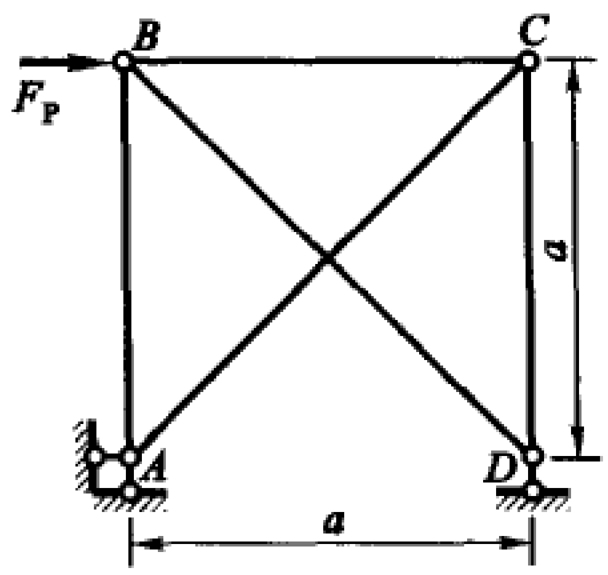
5－12　试求图示结构结点 C 的水平位移 Δ_C，设各杆的 EA 相等。



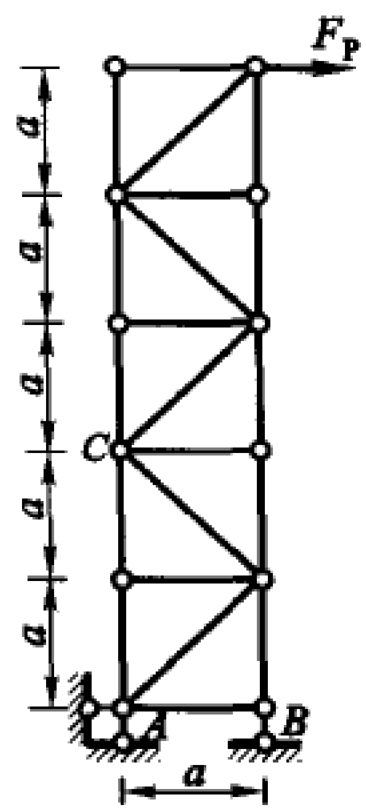
题 5－9 图



题 5－10 图

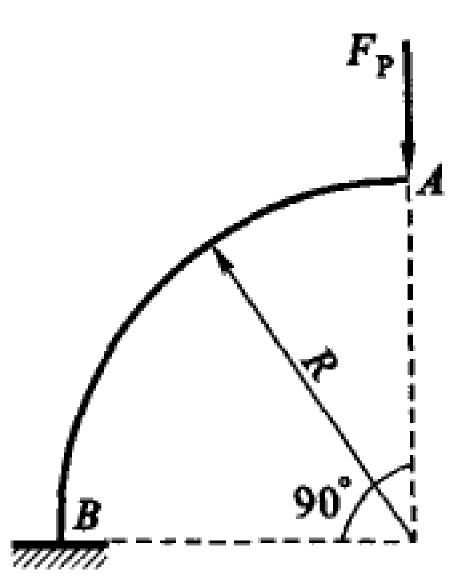


题 5－11 图

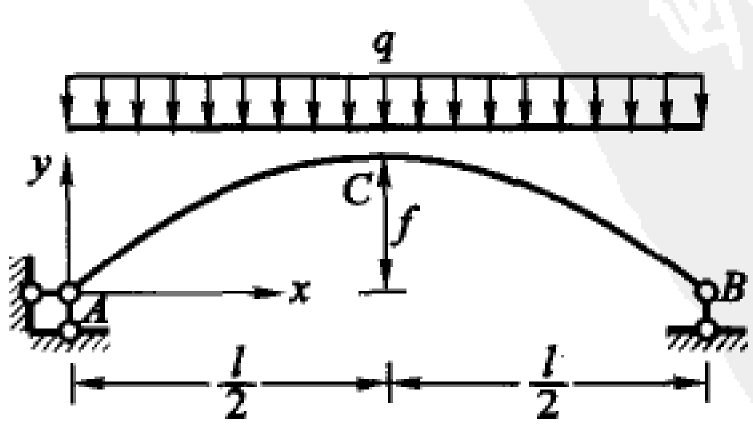


题 5－12 图

5－13　试求图示等截面圆弧曲杆 A 点的竖向位移 Δ_V 和水平位移 Δ_H。设圆弧 AB 为 $\frac{1}{4}$ 个圆周，半径为 R，EI 为常数。



题 5－13 图



题 5－14 图

5－14　试求图示曲梁 B 点的水平位移 Δ_B，已知曲梁轴线为抛物线，方程为

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

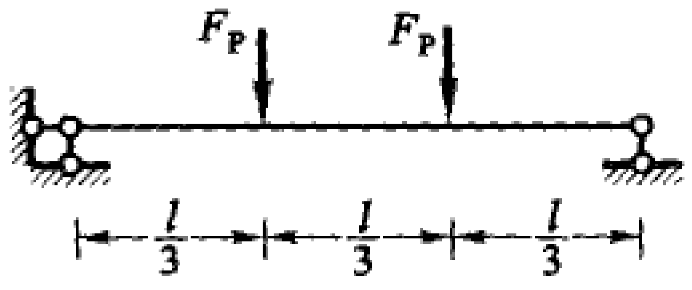
EI 为常数，承受均布荷载 q。计算时可只考虑弯曲变形。设拱比较平，可取 $ds=dx$。

5-15　试用图乘法解习题 5-7。

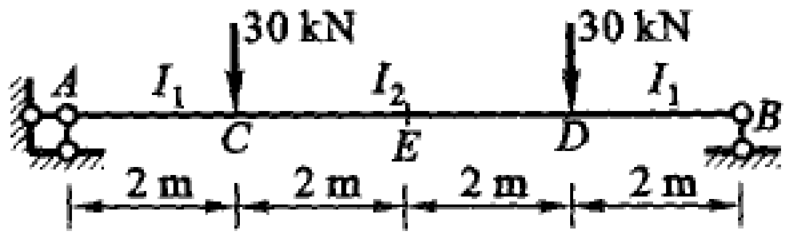
5-16　试用图乘法解习题 5-8。

5-17　试用图乘法求图示梁的最大挠度 f_{max}。

5-18　试求图示梁在截面 C 和 E 的挠度。已知 $E=2.0\times10^5$ MPa，$I_1=6\ 560\ \text{cm}^4$，$I_2=12\ 430\ \text{cm}^4$。



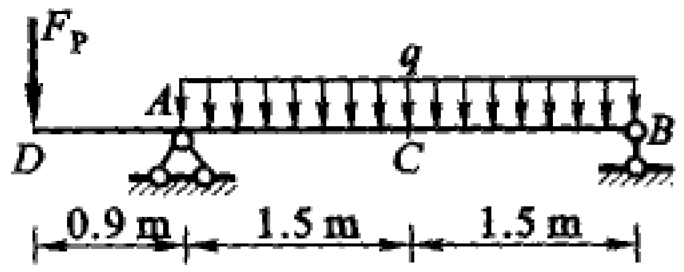
题 5-17 图



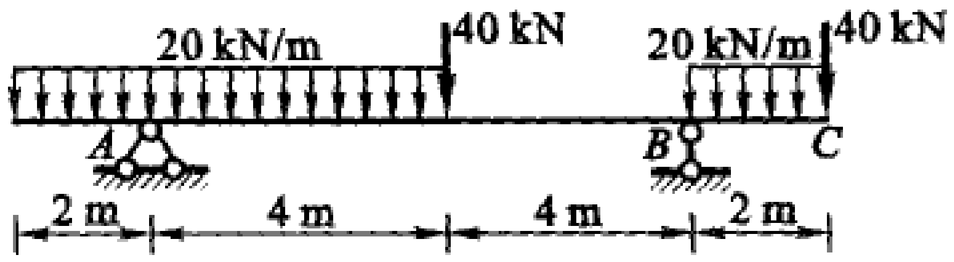
题 5-18 图

5-19　试求图示梁 C 点挠度，已知 $F_P=9\ 000$ N、$q=15\ 000$ N/m，梁为18号工字钢，$I=1\ 660\ \text{cm}^4$，$h=18$ cm，$E=2.1\times10^5$ MPa。

5-20　试求图示梁 C 点挠度。已知 $EI=2\times10^8\ \text{kN}\cdot\text{cm}^2$。



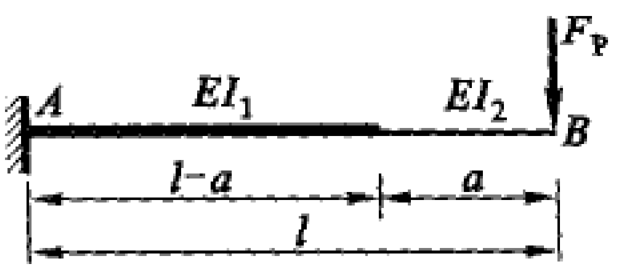
题 5-19 图



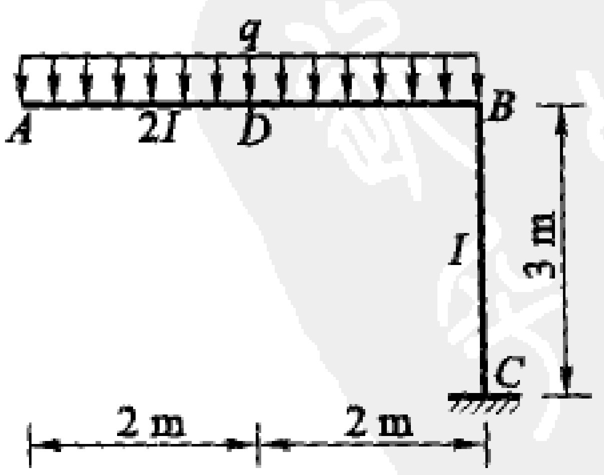
题 5-20 图

5-21　试求图示梁 B 端的挠度。

5-22　试求图示刚架 A 点和 D 点的竖向位移。已知梁的惯性矩为 $2I$，柱的惯性矩为 I。



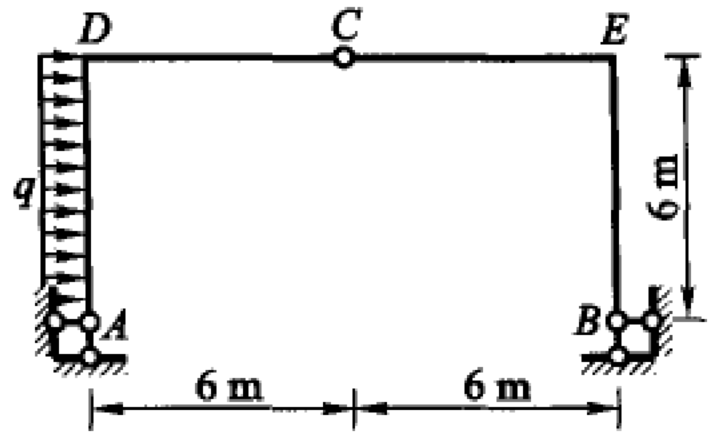
题 5-21 图



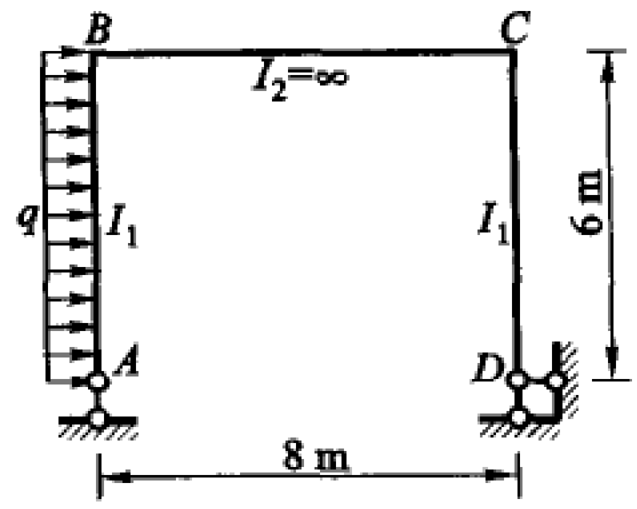
题 5-22 图

5-23　试求图示三铰刚架 E 点的水平位移和截面 B 的转角。设各杆 EI 为常数。

5－24　试求图示结构 B 点的水平位移。



题 5－23 图



题 5－24 图

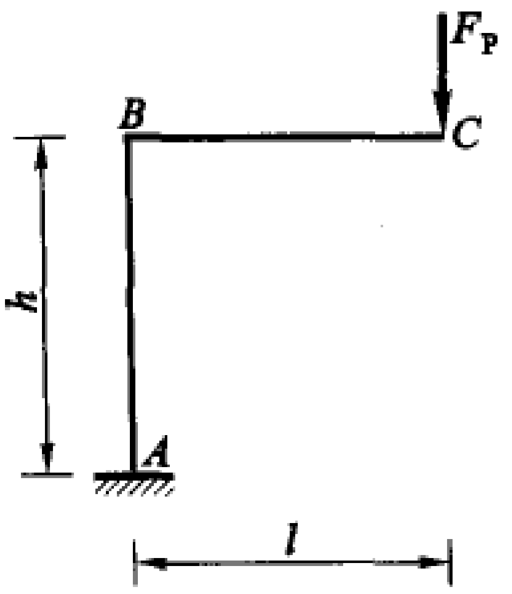
5－25　试求图示结构 C 点的水平位移 Δ_H，竖向位移 Δ_V，转角 θ。设各杆 EI 与 EA 为常数。

(a) 忽略轴向变形的影响。

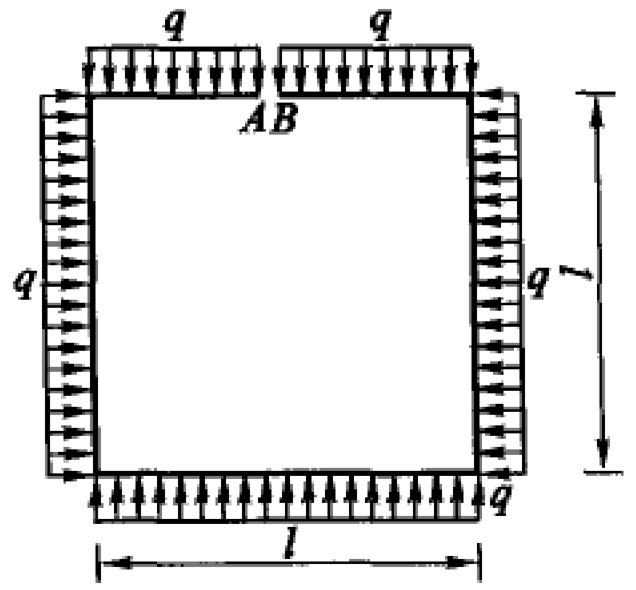
(b) 考虑轴向变形的影响。

5－26　试求题 5－8 简支梁截面 A 和 B 的相对转角 Δ。

5－27　图示框形刚架，在顶部横梁中点被切开。试求切口处两侧截面 A 与 B 的竖向相对位移 Δ_1，水平相对位移 Δ_2 和相对转角 Δ_3。设各杆 EI 为常数。

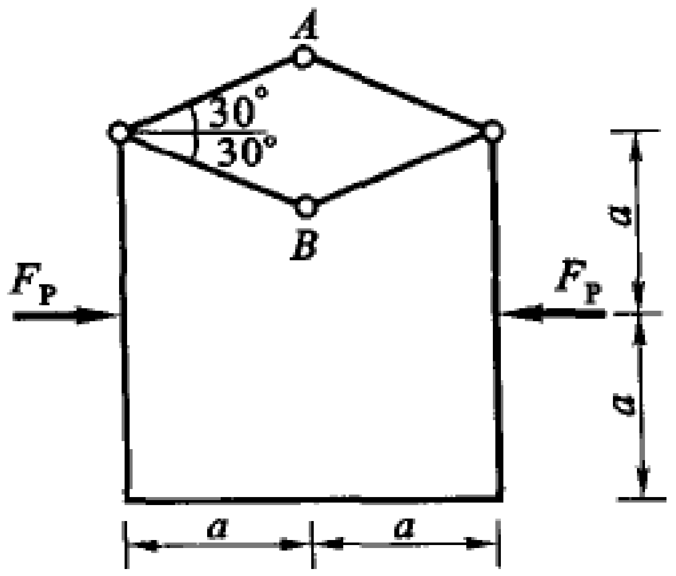


题 5－25 图



题 5－27 图

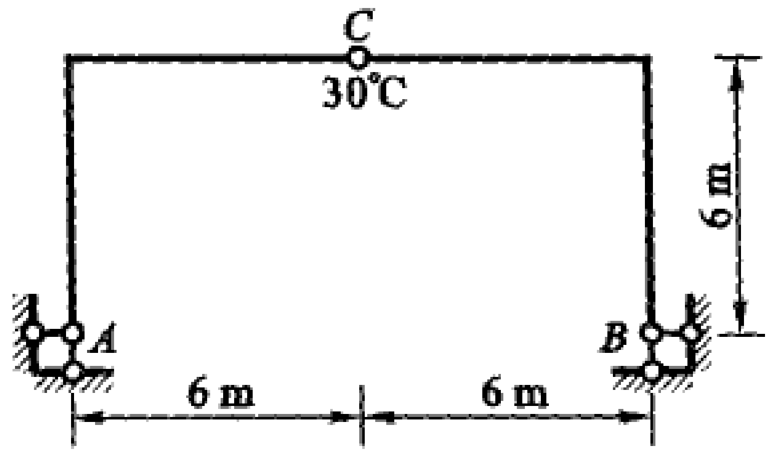
5－28　试求图示结构中 A、B 两点距离的改变值 Δ。设各杆截面相同。



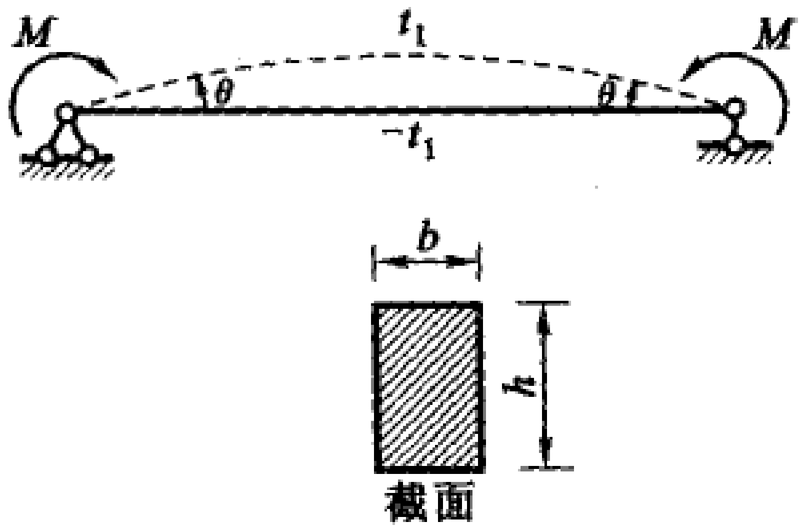
题 5－28 图

5-29　设图示三铰刚架内部升温30 ℃，各杆截面为矩形，截面高度 h 相同。试求 C 点的竖向位移 Δ_C。

5-30　在简支梁两端作用一对力偶 M，同时梁上边温度升高 t_1，下边温度下降 t_1。试求端点的转角 θ。如果 $\theta=0$，问力偶 M 应是多少？设梁为矩形截面，截面尺寸为 $b \cdot h$。



题5-29图



题5-30图

5-31　题5-3中的三铰拱温度均匀上升 t。试求 C 点的竖向位移 Δ_1 和 C 铰两侧截面的相对转角 Δ_2，拱轴方程为 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$。

5-32　题5-10中桁架的下弦杆温度上升 t。试求 C 点的竖向位移 Δ_C。

第6章 力　法

以下第6章至第9章讨论超静定结构的计算问题。

结构计算的内容包括计算内力和位移,以校核强度和刚度。解算这些内力和位移所依据的条件包括静力平衡条件和变形协调条件。

超静定结构与静定结构在计算方面的主要区别在于:静定结构的内力只根据静力平衡条件即可求出,而不必考虑变形协调条件,也就是说,内力是静定的;超静定结构的内力则不能单从静力平衡条件求出,而必须同时考虑变形协调条件,换句话说,内力是超静定的。

为了解算问题的方便,常在超静定结构的所有未知量中选出一部分作为基本未知量。解算时,首先把其余未知量表示成基本未知量的函数,然后再集中力量来解出基本未知量。

根据基本未知量选择方法的不同,超静定结构的解法可分为两大类:

力法——取某些力作基本未知量。

位移法——取某些位移作基本未知量。

力法和位移法是计算超静定结构的两个基本方法。

力法是提出较早、发展最完备的计算方法,同时也是更为基本的方法。力法是把超静定结构拆成静定结构,再由静定结构过渡到超静定结构。静定结构的内力和位移计算是力法计算的基础,因而在学习力法时,要求巩固地掌握静定结构的分析方法。本章讨论力法的原理及其应用。先讨论力法的一般原理,再讨论其在超静定刚架、排架、拱、桁架和组合结构等体系中的应用。

位移法的提出较力法稍晚些,是在20世纪初为了计算复杂刚架而建立起来的。位移法是把结构拆成杆件,再由杆件过渡到结构。杆件的内力和位移关系是位移法的计算基础,因而在学习位移法时,要求巩固地掌握杆件的分析方法及杆件的基本特性。位移法虽然主要用于超静定结构,但也可用于静定结构。从力法角度看,静定与超静定的界限是很分明的,但从位移法角度看,这条界限是无关紧要的。第7章将讨论位移法的原理及其应用。

用力法和位移法计算结构时,都要求解联立方程。求解联立方程,可采用直接解法或渐近解法。在渐近解法中,开始只是得出近似解,然后逐步加以修正,最后收敛于精确解。结构力学中的渐近法有两种应用方式。一种方式是先从力学上建立方程组,然后从数学上对方程组采用渐近解法。另一种方式是不建立

方程组，而是直接考虑结构的受力状态，从开始时的近似状态逐步调整，最后收敛于真实状态。力法和位移法都可以采用渐近解法，但以位移法的收敛性能较好而被广泛采用。第8章将介绍的力矩分配法和无剪力分配法都是属于位移法类型的渐近解法，是不建立方程组，直接从力学意义去渐近。它的优点是，计算过程中的每个步骤都有明确的物理意义，便于理解和记忆，因而是一种便于掌握的手算方法。

第9章矩阵位移法将讨论一种适合计算机进行计算的结构分析方法。这个方法与位移法一样，计算时先把结构拆开，分解成杆件；然后再将这些杆件按一定条件集合成结构。为了适应电算的特点，在理论推导中采用了矩阵方法。矩阵方法使推导过程书写简明，便于使计算过程程序化。

本章介绍超静定结构的第一个基本解法——力法。力法的要点是以静定结构为基本结构，将多余约束力作为基本未知量，根据变形条件建立力法方程并求解。

学习本章时首先要掌握力法的原理，然后是对各种结构形式在荷载、温度和支座移动等条件下加以应用。此时，应注意各种结构形式的受力和变形特点。

§6-1 超静定结构的组成和超静定次数

1. 超静定结构的组成

为了认识超静定结构的特性，现把它与静定结构作一些对比。

一个结构，如果它的支座反力和各截面的内力都可以用静力平衡条件唯一地确定，就称为静定结构。图6-1a所示简支梁是静定结构的一个例子。一个结构，如果它的支座反力和各截面的内力不能完全由静力平衡条件唯一地加以确定，就称为超静定结构。图6-1b所示连续梁是超静定结构的一个例子。

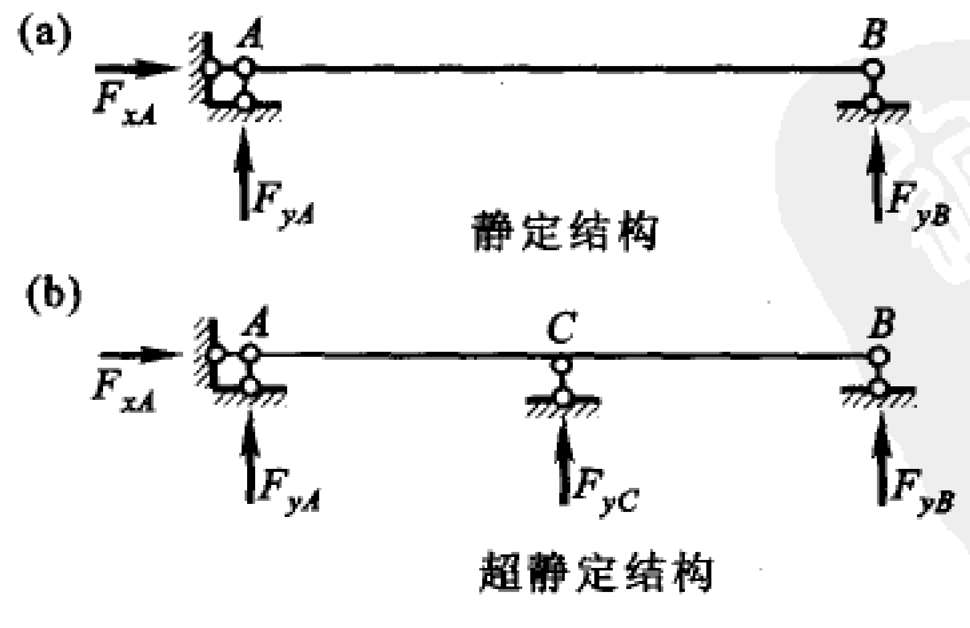


图 6-1

再从几何构造看，简支梁和连续梁都是几何不变的。如果从简支梁中去掉支杆 B，就变成了几何可变体系。反之，如果从连续梁中去掉支杆 C，则仍是几何不变的。因此，支杆 C 是多余约束。由此引出如下结论：静定结构是没有多余约束的几何不变体系，而超静定结构则是有多余约束的几何不变体系。

总起来说，内力是超静定的，约束有多余的，这就是超静定结构区别于静定结构的基本特点。

2. 超静定次数

从几何构造看，超静定次数是指超静定结构中多余约束的个数。如果从原结构中去掉 n 个约束，结构就成为静定的，则原结构即为 n 次超静定结构。

由于原结构是几何不变的，因此由§2－3可知，超静定次数 n 为

$$n = -W \tag{a}$$

从静力分析看，超静定次数等于根据平衡方程计算未知力时所缺少的方程的个数，即多余未知力（多余约束力）的个数。

例如，图6－2a、b、c、d所示超静定结构，在撤去或切断多余约束后，即变为图6－3a、b、c、d中的静定结构，在图中同时还标明了相应的多余约束力 X_i。因此，其超静定次数分别为2、4、6、3。

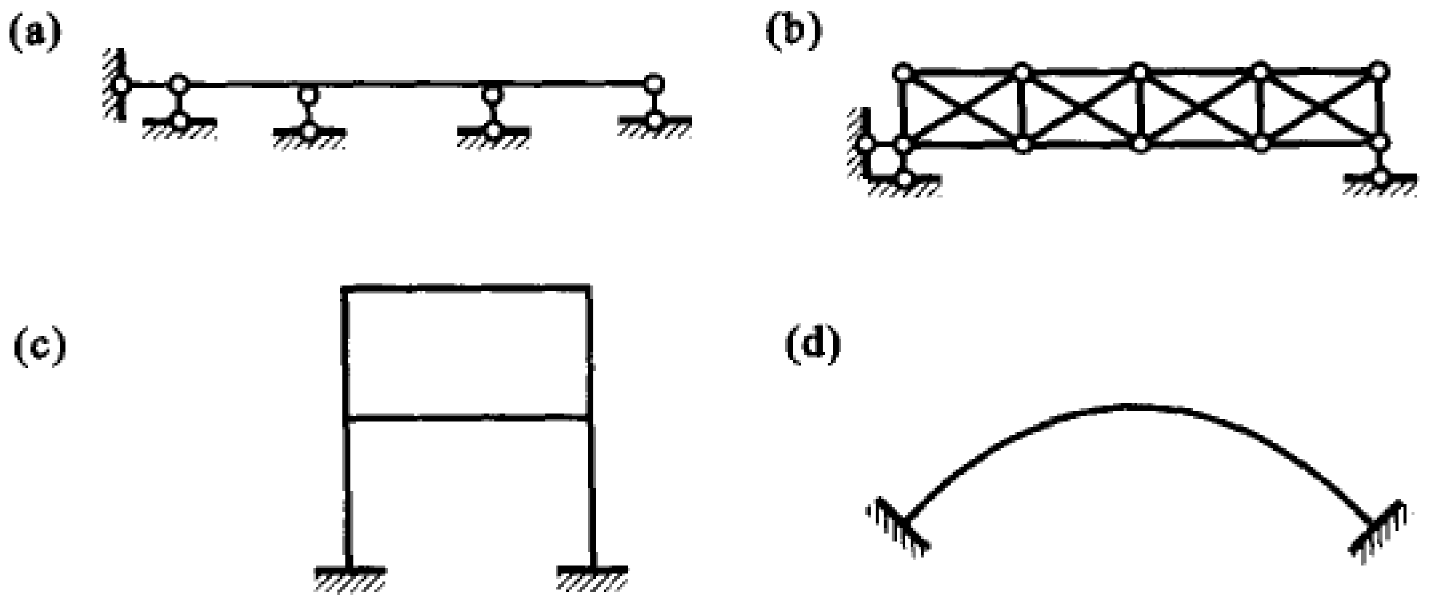


图　6－2

按照式(a)求超静定次数时，关键是要学会把原结构拆成一个静定结构。这里要注意以下几点：

(1) 撤去一根支杆或切断一根链杆，等于拆掉一个约束（图6－3a、b）。

(2) 撤去一个铰支座或撤去一个单铰，等于拆掉两个约束。

(3) 撤去一个固定端或切断一个梁式杆，等于拆掉三个约束（图6－3c）。

(4) 在连续杆中加入一个单铰，等于拆掉一个约束（图6－3d）。

此外，还要注意：

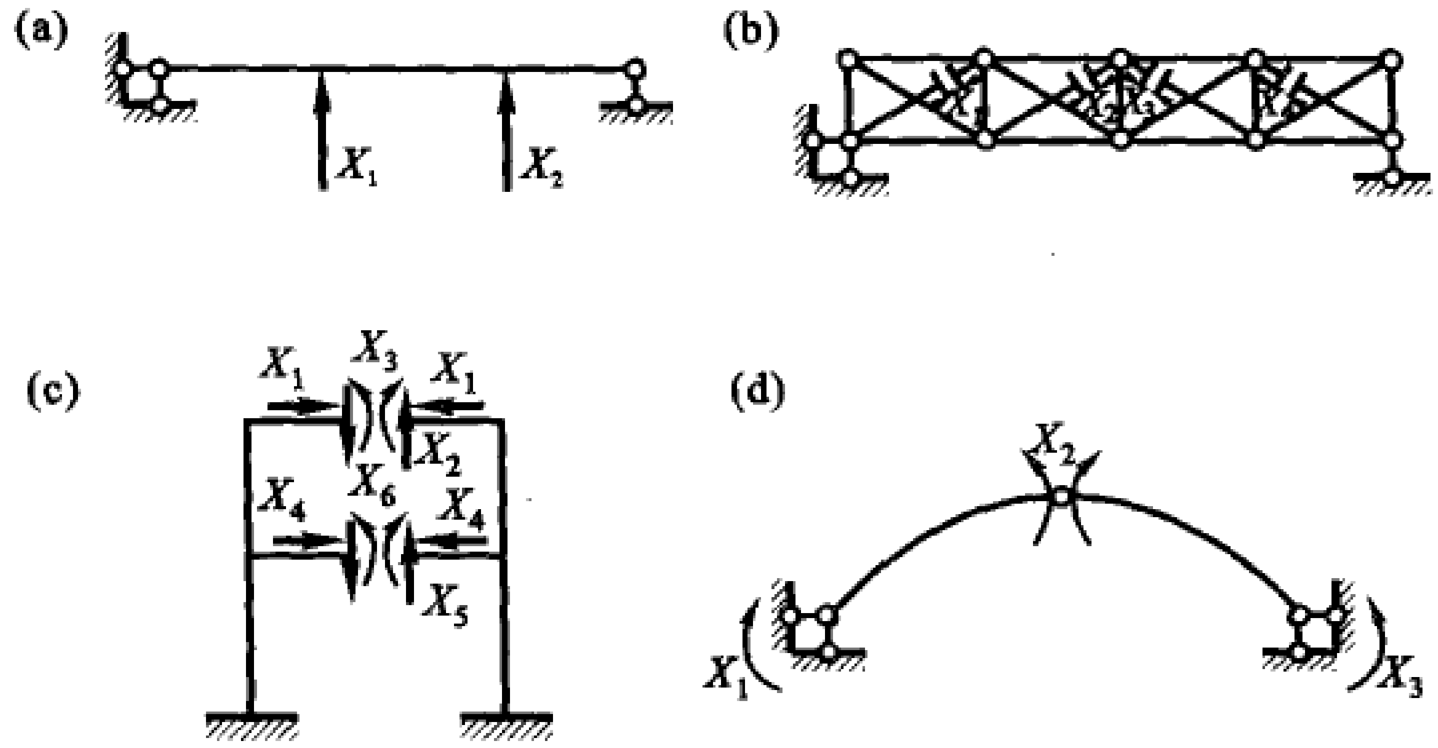


图 6-3

(5) 不要把原结构拆成一个几何可变体系,即不能去掉必要约束。例如,如果把图 6-2a 所示梁中的水平支杆拆掉,它就变成了几何可变体系。

(6) 要把全部多余约束都拆除。例如,图 6-4a 中的结构,如果只拆去一根竖向支杆,如图 6-4b 所示,则其中的闭合框仍然具有三个多余约束。必须把闭合框再切开一个截面,如图 6-4c 所示,这时才成为静定结构。因此,原结构总共有四个多余约束。

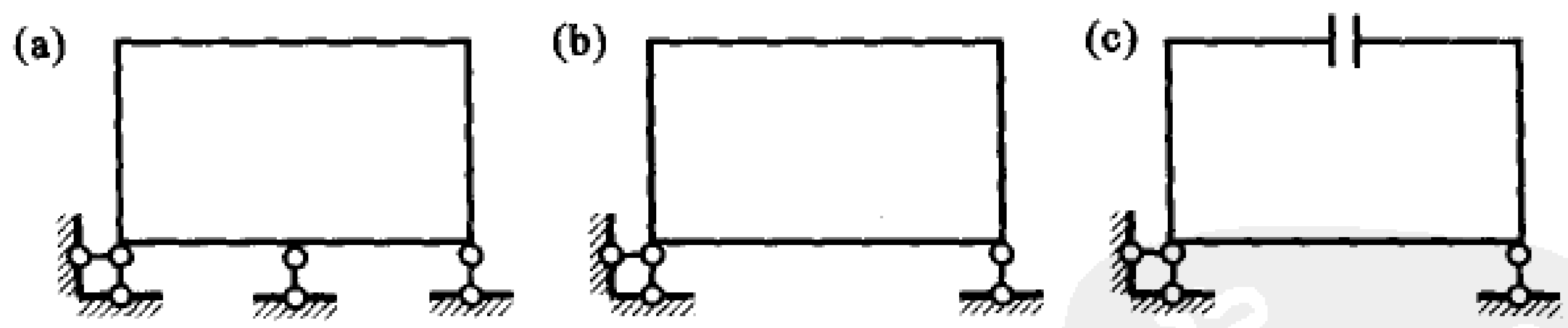


图 6-4

也可以按式(a)利用第 2 章的式(2-6)和式(2-7)来计算超静定次数。如桁架的超静定次数 n 为

$$n = -W = b - 2j$$

以图 6-2b 所示桁架为例,$b = 24$,$j = 10$,所以

$$n = 24 - 2 \times 10 = 4$$

§6－2　力法的基本概念

1．基本思路

力法是计算超静定结构的最基本的方法。

采用力法解超静定结构问题时，不是孤立地研究超静定问题，而是把超静定问题与静定问题联系起来，加以比较，从中找到由静定过渡到超静定的途径。

下面结合图6－5a所示一次超静定结构说明力法中的三个基本概念。

（1）力法的基本未知量

将图6－5a中的超静定结构与图6－5b中的静定结构加以比较：

在图6－5b中有三个未知反力 F_{xA}、F_{yA}、M_A，可用三个平衡方程全部求出。

在图6－5a中，在支座 B 处还多了一个未知力 X_1。这个多余未知力无法由平衡方程求出。因此，在超静定结构中遇到的新问题就是计算多余未知力 X_1 的问题。只要 X_1 能够设法求出，则剩下的问题就是静定的问题了。

力法的第一个特点是：把多余未知力的计算问题当作超静定问题的关键问题，把多余未知力当作处于关键地位的未知力——称为力法的基本未知量。力法这个名称就是由此而来的。

在力法中，不是把全部未知力 F_{xA}、F_{yA}、M_A、X_1 平均看待，而是从中把基本未知量 X_1 突出出来，作为主攻目标。因为只要 X_1 能解出，其余的未知力也就迎刃而解了（在图6－5a中，也可以把 F_{yA} 或 M_A 取作基本未知量。）

（2）力法的基本体系

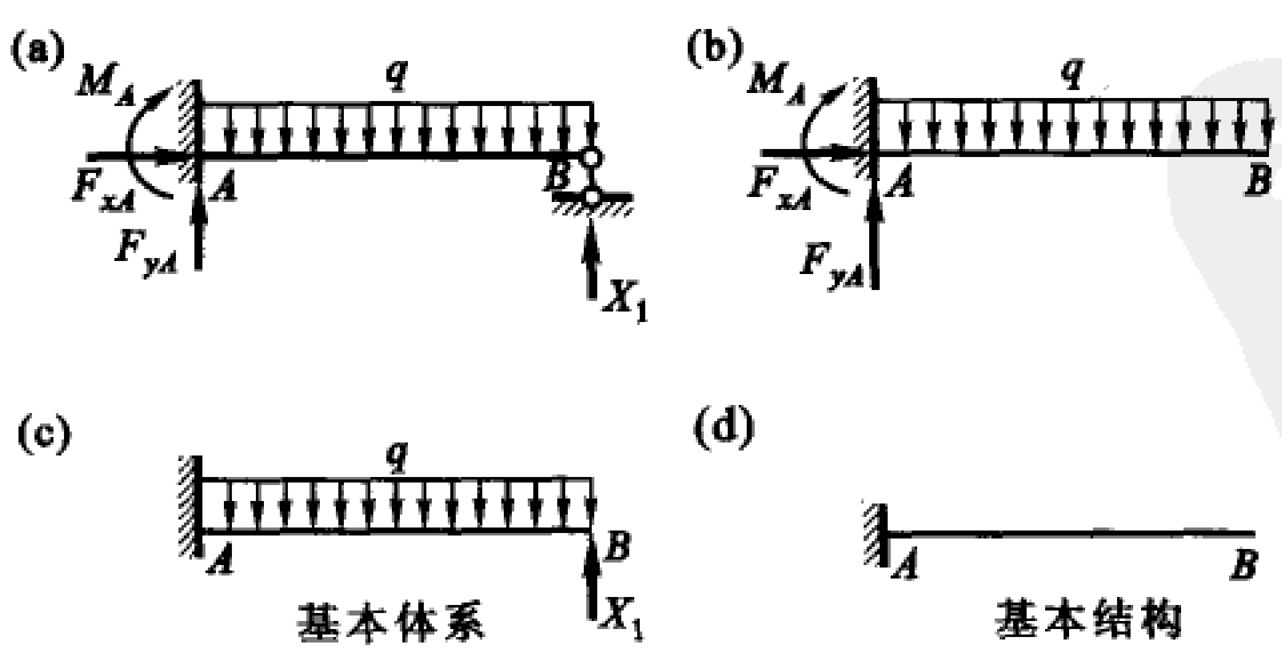


图　6－5

在图6－5c中，把图6－5a中的多余约束（支座 B）去掉，而代之以多余未知

力 X_1，这样得到的含有多余未知力的静定结构称为力法的基本体系。与之相应，把图 6-5a 中原超静定结构中多余约束（支座 B）和荷载都去掉后得到的静定结构称为力法的基本结构（图 6-5d）。

在基本体系中仍然保留原结构的多余约束反力 X_1，只是把它由被动力改为主动力，因此基本体系的受力状态可使之与原结构完全相同。由此看出，基本体系本身既是静定结构，又可用它代表原来的超静定结构。因此，它是由静定结构过渡到超静定结构的一座桥梁。

（3）力法的基本方程

怎样才能求出图 6-5a 中基本未知量 X_1 的确定值？显然不能利用平衡条件求出，必须补充新的条件。

前面已经说明：图 6-5c 中的基本体系可以转化为图 6-5a 中的超静定结构。现在需要说明，在什么条件下，图 6-5c 中的基本体系才能真正变成图 6-5a 中的超静定结构。为此，将图 6-5a 和图 6-5c 加以比较。

在图 6-5a 所示的超静定结构中，X_1 是被动力，是固定值。与 X_1 相应的位移 Δ_1（即 B 点的竖向位移）等于零。

在图 6-5c 的基本体系中，X_1 是主动力，是变量。如果 X_1 过大，则梁的 B 端往上翘；如果 X_1 过小，则 B 端往下垂。只有当 B 端的竖向位移正好等于零时，基本体系中的变力 X_1 才与超静定结构中常力 X_1 正好相等，这时基本体系才能真正转化为原来的超静定结构。

由此看出，基本体系转化为原来超静定结构的条件是：基本体系沿多余未知力 X_1 方向的位移 Δ_1 应与原结构相同，即

$$\Delta_1 = 0 \tag{a}$$

这个转化条件是一个变形条件，也就是计算多余未知力时所需要的补充条件。

下面只讨论线性变形体系的情形，并应用叠加原理把变形条件(a)写成显含多余未知力 X_i 的展开形式，称为力法的基本方程。

图 6-6a 所示基本体系承受荷载 q 和未知力 X_1 的共同作用。根据叠加原理，状态(a)应等于状态(b)与(c)的总和，这里状态(b)、(c)分别表示基本结构在 q 和 X_1 单独作用下的受力状态，如图 6-6b、c 所示。因此，变形条件(a)可表示如下：

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0 \tag{b}$$

这里，Δ_1 是基本体系在荷载与未知力 X_1 共同作用下沿 X_1 方向的总位移（图 6-6a 中 B 点的竖向位移）。

Δ_{1P}是基本结构在荷载单独作用下沿 X_1 方向的位移（图 6-6b）。

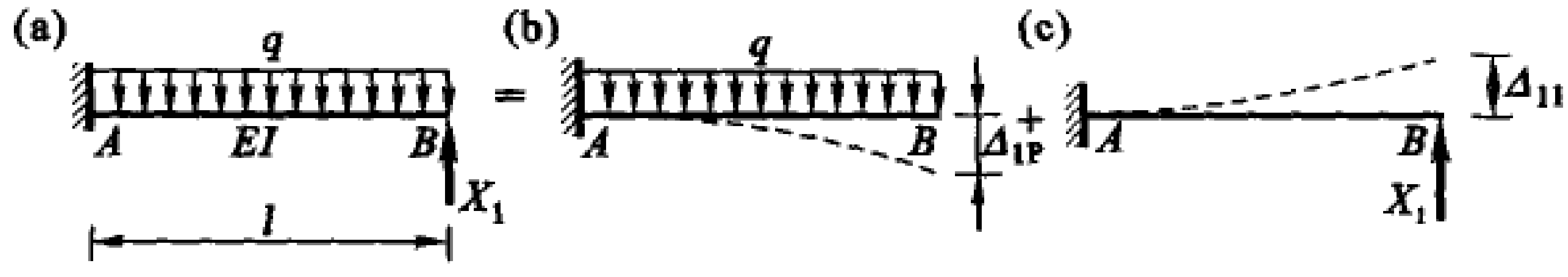


图　6－6

Δ_{11}是基本结构在未知力 X_1 单独作用下沿 X_1 方向的位移(图 6－6c)。

位移 Δ_1、Δ_{1P}、Δ_{11}的方向如果与未知力 X_1 的正方向相同,则规定为正。

Δ_{11}是由未知力 X_1 引起的位移。根据叠加原理,位移 Δ_{11}应与未知力 X_1 成正比,其中的比例系数如用 δ_{11}表示,则可写成

$$\Delta_{11}=\delta_{11}X_1 \tag{c}$$

由此看出,系数 δ_{11}在数值上等于基本结构在单位力 $X_1=1$ 单独作用下沿 X_1 方向产生的位移(图 6－7b)。将式(c)代入式(b),即得

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0 \tag{6－1}$$

这就是在线性变形条件下一次超静定结构的力法基本方程。

力法方程中的系数 δ_{11}和自由项 Δ_{1P}都是基本结构即静定结构的位移,我们已经熟悉其计算方法。为了计算 δ_{11}和 Δ_{1P},作基本结构在荷载作用下的弯矩图 M_P(图 6－7c)和在单位力 $X_1=1$ 作用下的弯矩图 $\overline{M}_1$(图 6－7d)。应用图乘法,得

$$\Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}x=-\frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{ql^2}{2}\cdot l\right)\times\frac{3l}{4}=-\frac{ql^4}{8EI}$$

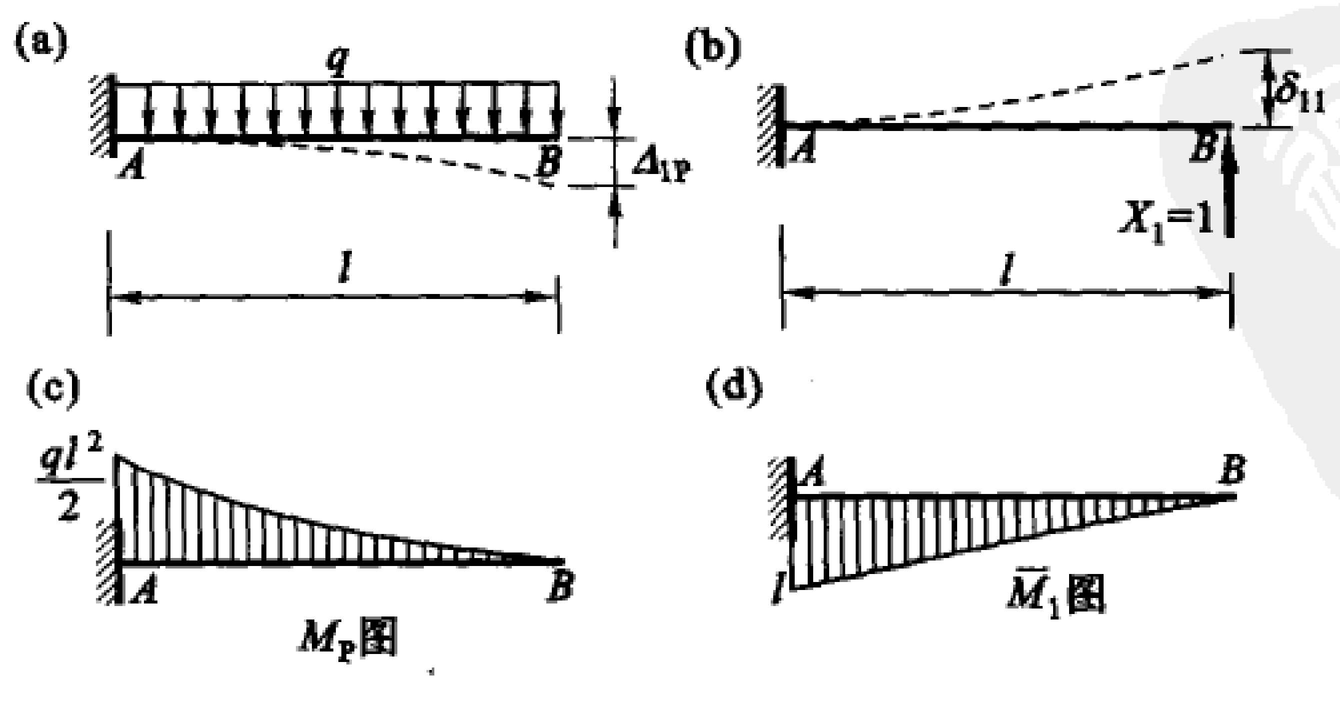


图　6－7

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_1}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\times\left(\frac{l\cdot l}{2}\times\frac{2l}{3}\right)=\frac{l^3}{3EI}$$

代入力法方程(6-1)得

$$\frac{l^3}{3EI}X_1-\frac{ql^4}{8EI}=0$$

由此求出：

$$X_1=\frac{3}{8}ql$$

求得的未知力是正号，表示反力 X_1 的方向与原设的方向相同。

多余未知力求出以后，就可以利用平衡条件求原结构的支座反力，作内力图，计算结果如图6-8a、b、c所示。

根据叠加原理，结构任一截面的弯矩 M 也可以用下列公式表示：

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P \qquad (6-2)$$

这里，$\overline{M}_1$ 是单位力 $X_1=1$ 在基本结构中任一截面所产生的弯矩，M_P 是荷载在基本结构中所产生的弯矩。

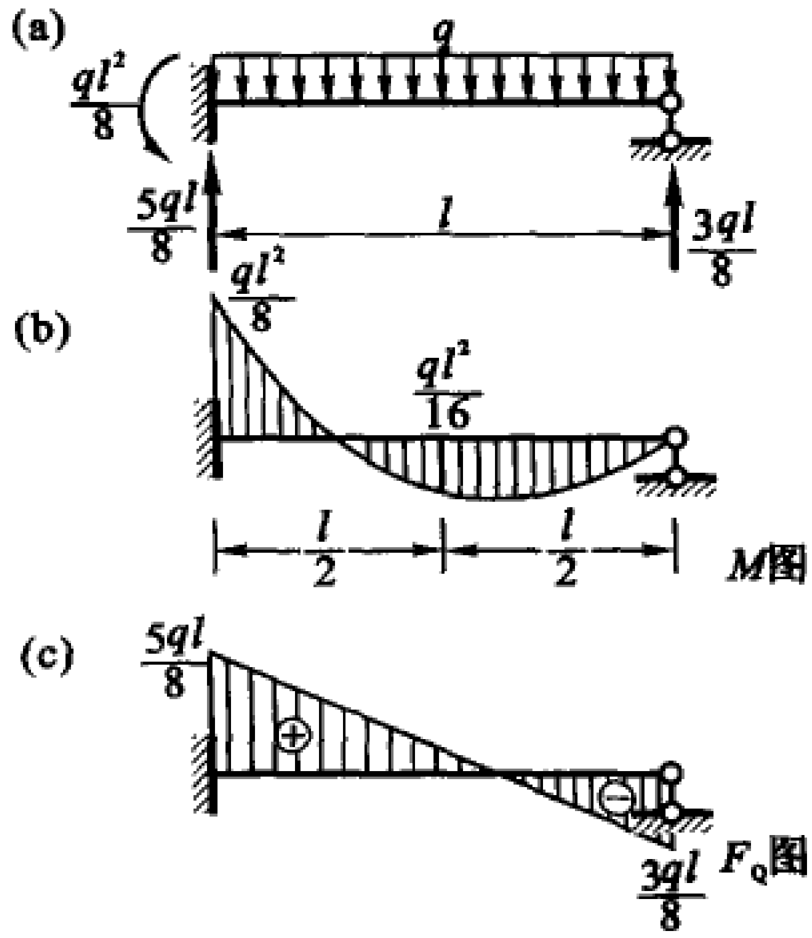


图 6-8

2．多次超静定结构的计算

结合图6-9a所示刚架进行讨论。这是一个两次超静定结构。如果取 B 点两根支杆的反力 X_1 和 X_2 为基本未知量，则基本体系如图6-9b所示，相应的基本结构如图6-9c所示。

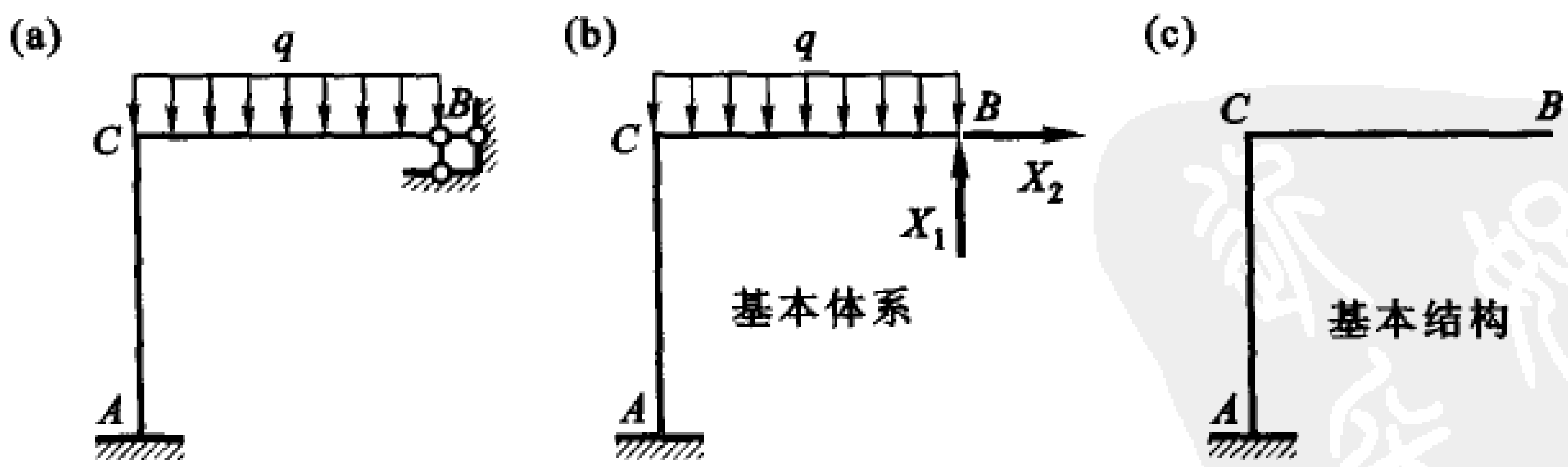


图 6-9

为了确定多余未知力 X_1 和 X_2，可利用多余约束处的变形条件：即基本体系在 B 点沿 X_1 和 X_2 方向的位移应与原结构相同，即应等于零。因此，可写成

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1=0\\ \Delta_2=0\end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

这里，Δ_1 是基本体系沿 X_1 方向的位移，即 B 点的竖向位移；Δ_2 是基本体系沿

X_2 方向的位移，即 B 点的水平位移。

下面应用叠加原理把变形条件式(d)写成展开形式。为了计算基本体系在荷载和未知力 X_1、X_2 共同作用下的位移 Δ_1、Δ_2，先分别计算基本结构在每种力单独作用下的位移如下：

(1) 荷载单独作用时，相应位移为 Δ_{1P}、Δ_{2P}(图 6-10a)。

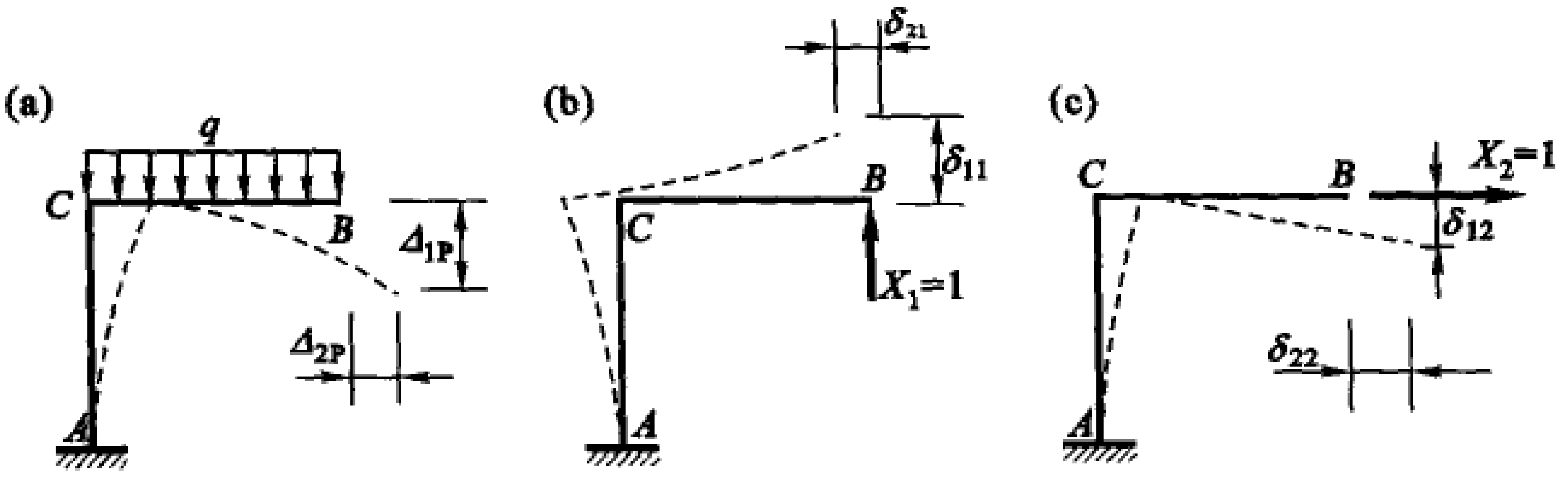


图 6-10

(2) 单位力 $X_1=1$① 单独作用时，相应位移为 δ_{11}、δ_{21}(图 6-10b)；未知力 X_1 单独作用时，相应位移为 $\delta_{11}X_1$、$\delta_{21}X_1$。

(3) 单位力 $X_2=1$ 单独作用时，相应位移为 δ_{12}、δ_{22}(图 6-10c)；未知力 X_2 单独作用时，相应位移为 $\delta_{12}X_2$、$\delta_{22}X_2$。

由叠加原理，得

$$\Delta_1=\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}$$
$$\Delta_2=\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}$$

因此变形条件(d)即为

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\end{aligned}\right\}\qquad(6-3)$$

这就是二次超静定结构的力法基本方程。

力法基本方程中的系数 δ 和自由项 Δ 都是基本结构的位移。由于基本结构是静定结构，所以计算这些系数和自由项时并无困难。

由基本方程求出多余未知力 X_1、X_2 以后，利用平衡条件便可求出原结构的支座反力和内力。此外，也可利用叠加原理求内力，例如任一截面的弯矩 M 可用下面的叠加公式计算：

$$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+M_P$$

这里，M_P 是荷载在基本结构任一截面产生的弯矩，$\overline{M}_1$ 和 $\overline{M}_2$ 分别是单位力 $X_1=1$ 和 $X_2=1$ 在基本结构同一截面产生的弯矩。

① 参见本书符号表说明 3。

同一结构可以按不同方式选取力法的基本体系和基本未知量。例如,图6－9a所示结构,其基本体系也可采用图6－11a或b所示体系。这时,力法基本方程在形式上与式(6－3)完全相同,但由于X_1和X_2的实际含义不同,因而变形条件的实际含义也不同。此外,还要注意,基本体系应是几何不变的,因此图6－11c所示瞬变体系不能取作基本体系。

下面讨论n次超静定的一般情形。这时力法的基本未知量是n个多余未知力$X_1, X_2, \cdots, X_n$,力法的基本体系是从原结构中去掉n个多余约束,而代之以相应的n个多余未知力后所得到的静定结构,力法的基本方程是在n个多余约束处的n个变形条件——基本体系中沿多余未知力方向的位移应与原结构中相应的位移相等。在线性变形体系中,根据叠加原理,n个变形条件通常可写为

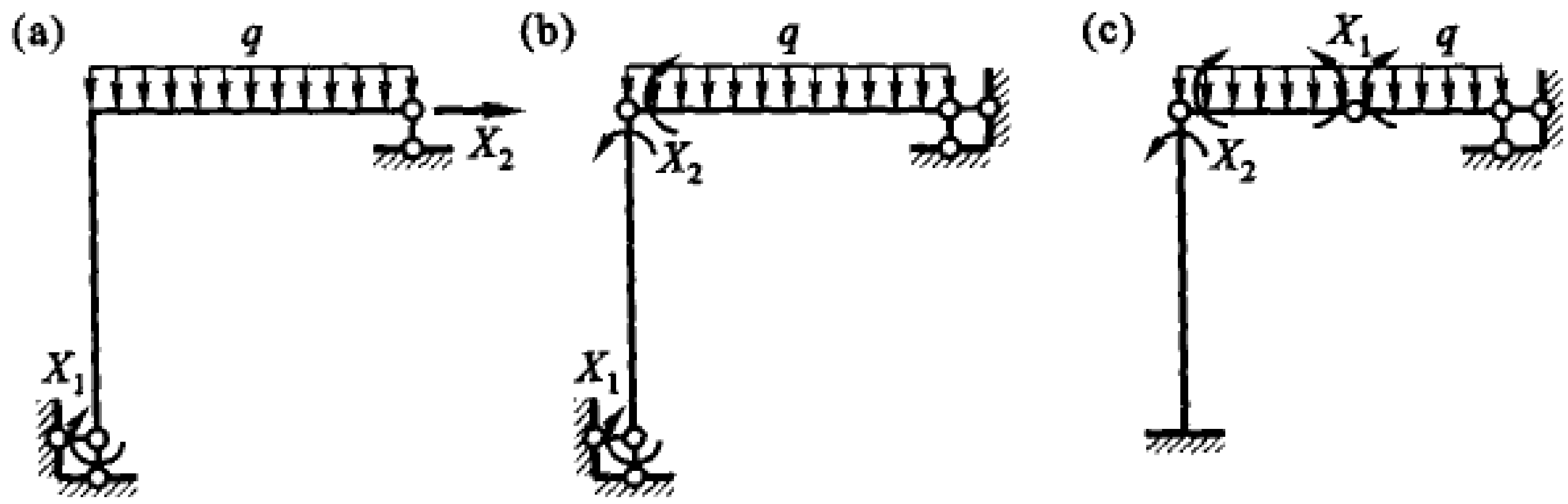


图 6－11

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2P}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0\end{aligned}\right\} \tag{6-4}$$

式(6－4)为n次超静定结构在荷载作用下力法方程的一般形式,因为不论结构是什么形式,结构的基本体系和基本未知量怎么选取,其力法的基本方程均为此形式,故常称为力法典型方程。

在方程(6－4)中,系数δ_{ij}和自由项Δ_{iP}都代表基本结构的位移。位移符号中采用两个下标,第一个下标表示位移的方向,第二个下标表示产生位移的原因。例如,

Δ_{iP}——由荷载产生的沿X_i方向的位移;

δ_{ij}——由单位力$X_j=1$产生的沿X_i方向的位移,常称为柔度系数。

位移正负号规则:当位移Δ_{iP}或δ_{ij}的方向与相应力X_i的正方向相同时,则位移规定为正。

根据位移互等定理,系数δ_{ij}与δ_{ji}是相等的,即

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}$$

把方程组(6－4)中的柔度系数合在一起,可写成下列的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn}\end{pmatrix} \tag{6-5}$$

这个矩阵就称为柔度矩阵。从矩阵的左上角到右下角的对角线称为主对角线,主对角线上的系数 $\delta_{11},\delta_{22},\cdots,\delta_{nn}$ 称为主系数,主系数都是正值,且不为零。不在主对角线上的系数 $\delta_{ij}(i\neq j)$,称为副系数。副系数可以是正值或负值,也可以为零。根据位移互等定理,柔度矩阵是一个对称矩阵。

解力法方程得到多余未知力 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的数值后,超静定结构的内力可根据平衡条件求出,或者根据叠加原理用下式计算:

$$\left.\begin{aligned}M&=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\cdots+\overline{M}_nX_n+M_P\\F_Q&=\overline{F}_{Q1}X_1+\overline{F}_{Q2}X_2+\cdots+\overline{F}_{Qn}X_n+F_{QP}\\F_N&=\overline{F}_{N1}X_1+\overline{F}_{N2}X_2+\cdots+\overline{F}_{Nn}X_n+F_{NP}\end{aligned}\right\} \tag{6-6}$$

式中 $\overline{M}_i$、$\overline{F}_{Qi}$ 和 $\overline{F}_{Ni}$ 是基本结构由于 $X_i=1$ 作用而产生的内力,M_P、F_{QP} 和 F_{NP} 是基本结构由于荷载作用而产生的内力。在应用式(6－6)第一式画出原结构的弯矩图后,也可以直接应用平衡条件计算 F_Q 和 F_N,并画出 F_Q 和 F_N 图。

§6－3　超静定刚架和排架

计算刚架和排架位移时,通常忽略轴力和剪力的影响,而只考虑弯矩的影响,因而使计算得到简化。轴力的影响在高层刚架的柱中比较大,剪力的影响当杆件短而粗时比较大,当遇到这种情况时要作特殊处理。

图 6－12 所示为装配式单层单跨厂房的排架计算简图。其中的柱是阶梯形变截面杆件,柱底为固定端,柱顶与横梁(屋架)为铰接。计算时常忽略横梁的轴向变形。

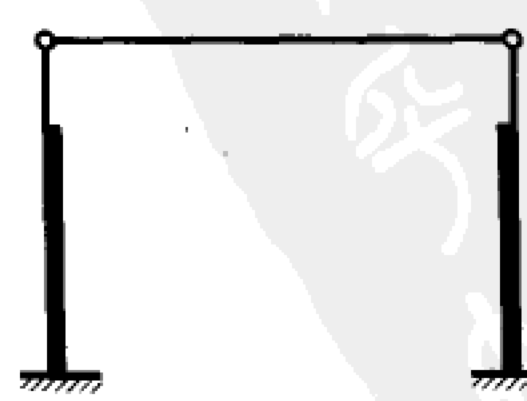


图　6－12

例 6－1　图 6－13a 所示为一超静定刚架,梁和柱的截面惯性矩分别为 I_1 和 I_2,$I_1:I_2=2:1$。当横梁承受均布荷载 $q=20\ \mathrm{kN/m}$作用时,试作刚架的内力图。

解　(1) 选取基本体系

这个刚架是一次超静定。可以取 B 点的水平反力为多余未知力。撤去 B

点水平支杆而代以未知力 X_1 后,得到图 6－13b 所示的基本体系。

(2) 列出力法方程

基本体系应满足 B 点无水平位移的变形条件。力法方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

(3) 求系数和自由项

系数 δ_{11} 和自由项 Δ_{1P} 都是基本结构(静定刚架)的位移。计算刚架位移时只考虑弯矩的影响。为此,绘制基本结构在荷载作用下的弯矩图,即 M_P 图(称为荷载弯矩图);在单位力 $X_1=1$ 作用下的弯矩图,即 $\overline{M}_1$ 图(称为单位弯矩图),分别如图 6－13c、d 所示。

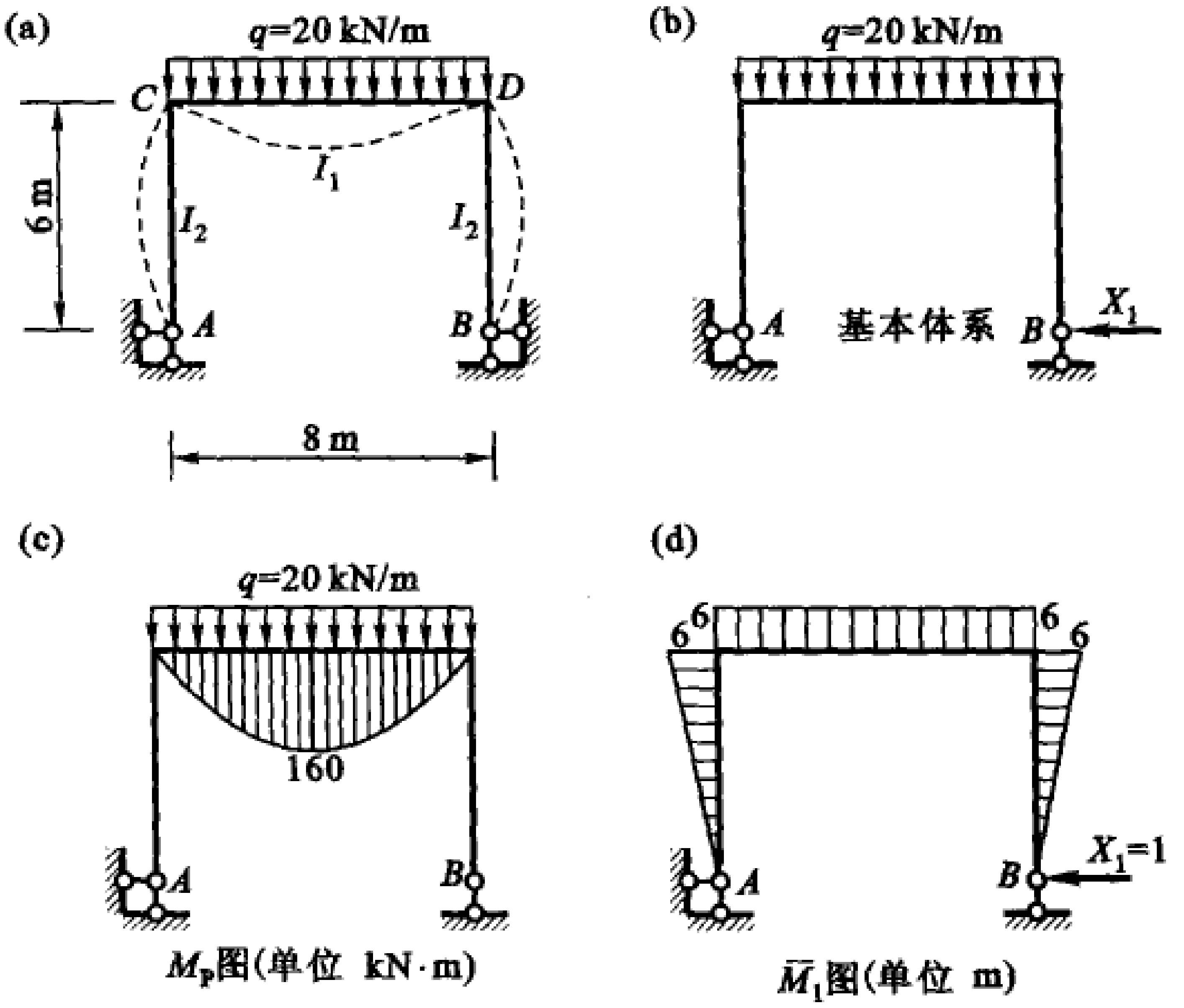


图　6－13

计算位移时采用图乘法:

$$\Delta_{1P}=\sum\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}ds=-\frac{1}{EI_1}\times\left(\frac{2}{3}\times8\ \text{m}\times160\ \text{kN}\cdot\text{m}\right)\times6\ \text{m}$$

$$=-\frac{5\ 120\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI_1}$$

这里,由于横梁的 M_P 图与 $\overline{M}_1$ 图不在同一边,故乘积为负值。

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_1}{EI}ds=\frac{1}{EI_1}\times(6\ \text{m}\times8\ \text{m})\times6\ \text{m}+\frac{2}{EI_2}\times\left(\frac{1}{2}\times6\ \text{m}\times6\ \text{m}\right)\times$$

$$\left(\frac{2}{3}\times 6\ \text{m}\right)=\frac{288\ \text{m}^3}{EI_1}+\frac{144\ \text{m}^3}{EI_2}$$

因 $I_2=\frac{1}{2}I_1$，故

$$\delta_{11}=\frac{576\ \text{m}^3}{EI_1}$$

(4) 求多余未知力

将 δ_{11} 及 Δ_{1P} 代入力法方程，得

$$\frac{576\ \text{m}^3}{EI_1}X_1-\frac{5\ 120\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI_1}=0$$

所以

$$X_1=\frac{80}{9}\ \text{kN}$$

因为力法方程的各项都有 EI_1，可以消去。由此可见，计算超静定刚架在荷载作用下的内力时，只需要知道各杆 EI 的相对值，而不需要各杆 EI 的绝对值。

(5) 作内力图

多余未知力求出以后，作内力图的问题即属于静定问题。通常作内力图的次序为：首先，利用已经作好的 $\overline{M}_1$ 图和 M_P 图作最后弯矩图；然后，利用弯矩图作剪力图；最后，利用剪力图作轴力图。现分述如下：

1) 作弯矩图

弯矩叠加公式为

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$

因此，以 $X_1=80/9$ kN 乘 $\overline{M}_1$ 图后，再与 M_P 图相加，即得出 M 图(图 6-14a)。

2) 作剪力图

作任一杆的剪力图时，可取此杆为隔离体，利用已知的杆端弯矩，由平衡条件求出杆端剪力，然后作此杆的剪力图。

以 CD 杆为例，其隔离体图如图 6-14b 所示(其中杆端轴力未画出)。求出杆端剪力后，即可在图 6-14c 中作杆 CD 的 F_Q 图。

最后的 F_Q 图如图 6-14c 所示。

3) 作轴力图

作任一杆的轴力图时，可取结点为隔离体，利用已知的杆端剪力，由平衡条件求出杆端轴力，然后作此杆的轴力图。

以结点 C 为例，其隔离体图如图 6-14d 所示(隔离体上作用的力矩未画出)，每个结点有两个投影方程。按照适当的次序截取结点，就可以求出所有杆端轴力。轴力图如图 6-14e 所示。

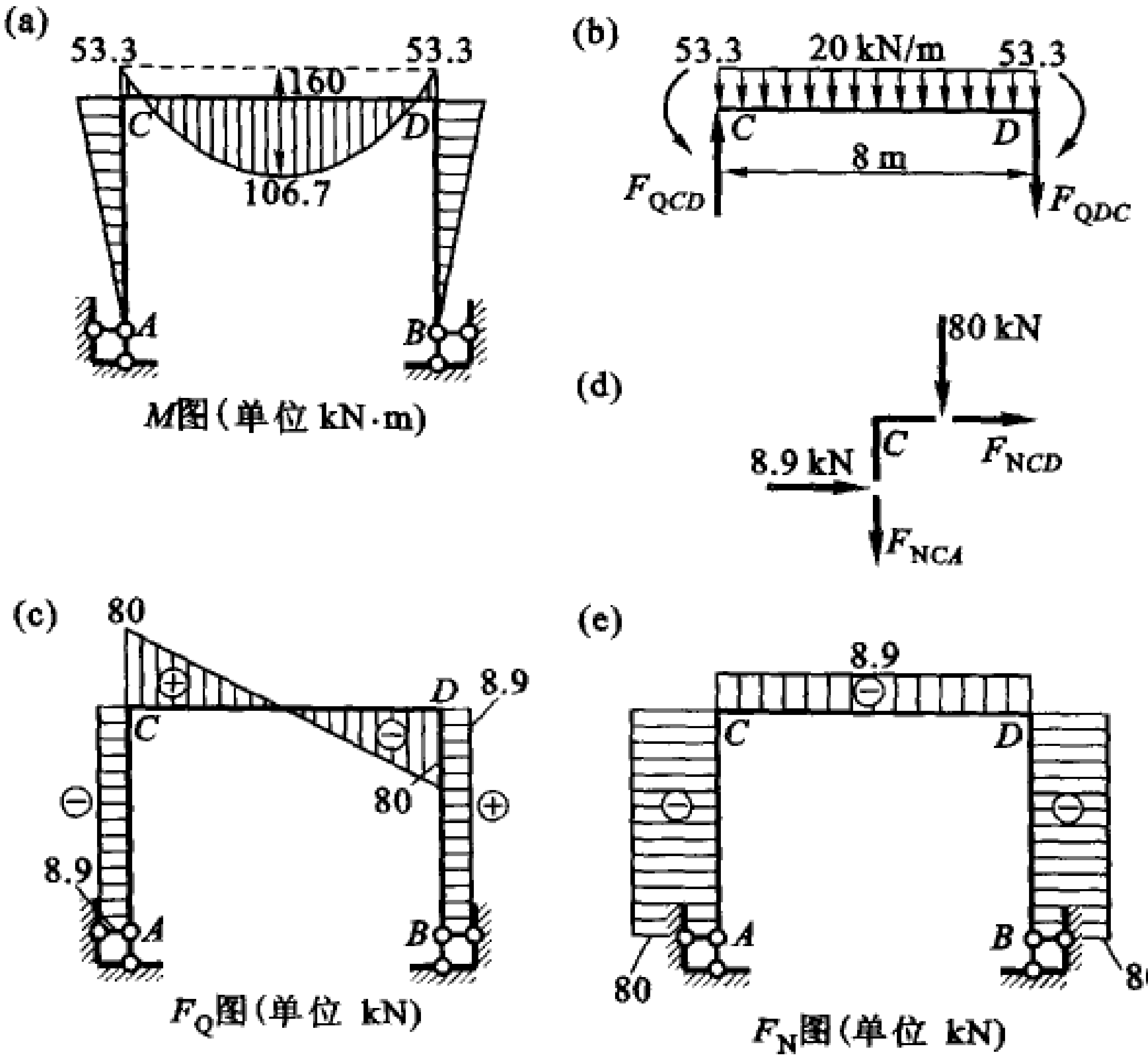


图 6-14

例 6-2 图 6-15 为两跨厂房排架的计算简图,试求在所示吊车荷载作用下的内力。计算资料如下:

(1) 截面惯性矩

左柱:上段 $I_{s1}=10.1\times10^4\ \text{cm}^4$,下段 $I_{x1}=28.6\times10^4\ \text{cm}^4$。

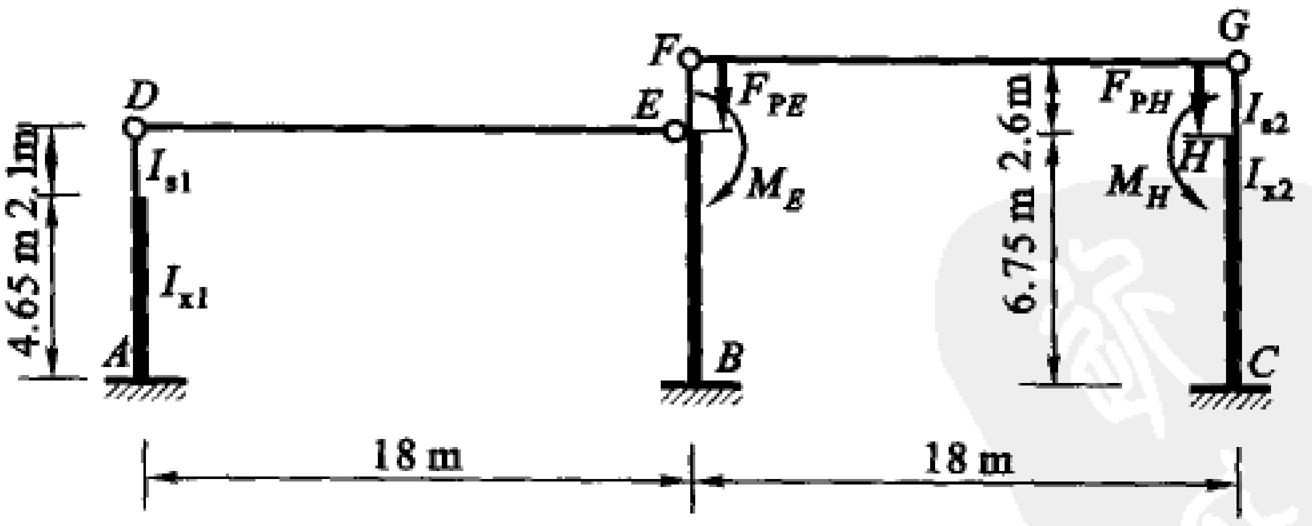


图 6-15

右柱及中柱:上段 $I_{s2}=16.1\times10^4\ \text{cm}^4$,下段 $I_{x2}=81.8\times10^4\ \text{cm}^4$。

(2) 右跨吊车荷载

竖向荷载为 $F_{PH}=108\ \text{kN}$,$F_{PE}=43.9\ \text{kN}$。由于 F_{PH}、F_{PE}与下柱轴线有偏

心距 $e = 0.4$ m,因此在 H、E 点的力偶荷载为

$$M_H = F_{PH}\,e = 43.2\ \text{kN}\cdot\text{m},\quad M_E = F_{PE}\,e = 17.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

解 此排架是二次超静定。横梁 FG 和 DE 是两端铰接的杆件,在吊车荷载作用下横梁起链杆作用,只受轴力。吊车荷载的作用除使 E、H 两截面有力偶 M_E、M_H 外,还有竖向的压力;因为竖向压力只使下柱产生轴力,故在图 6-16a 计算弯曲内力的基本体系中,未将竖向力 F_{PE}、F_{PH} 标出。

取链杆 FG 和 DE 的轴力 X_1 和 X_2 为多余未知力。截断两个链杆的轴向约束,在切口处加上轴力 X_1 和 X_2,得出基本体系如图 6-16a 所示。这里,需要说明两点:

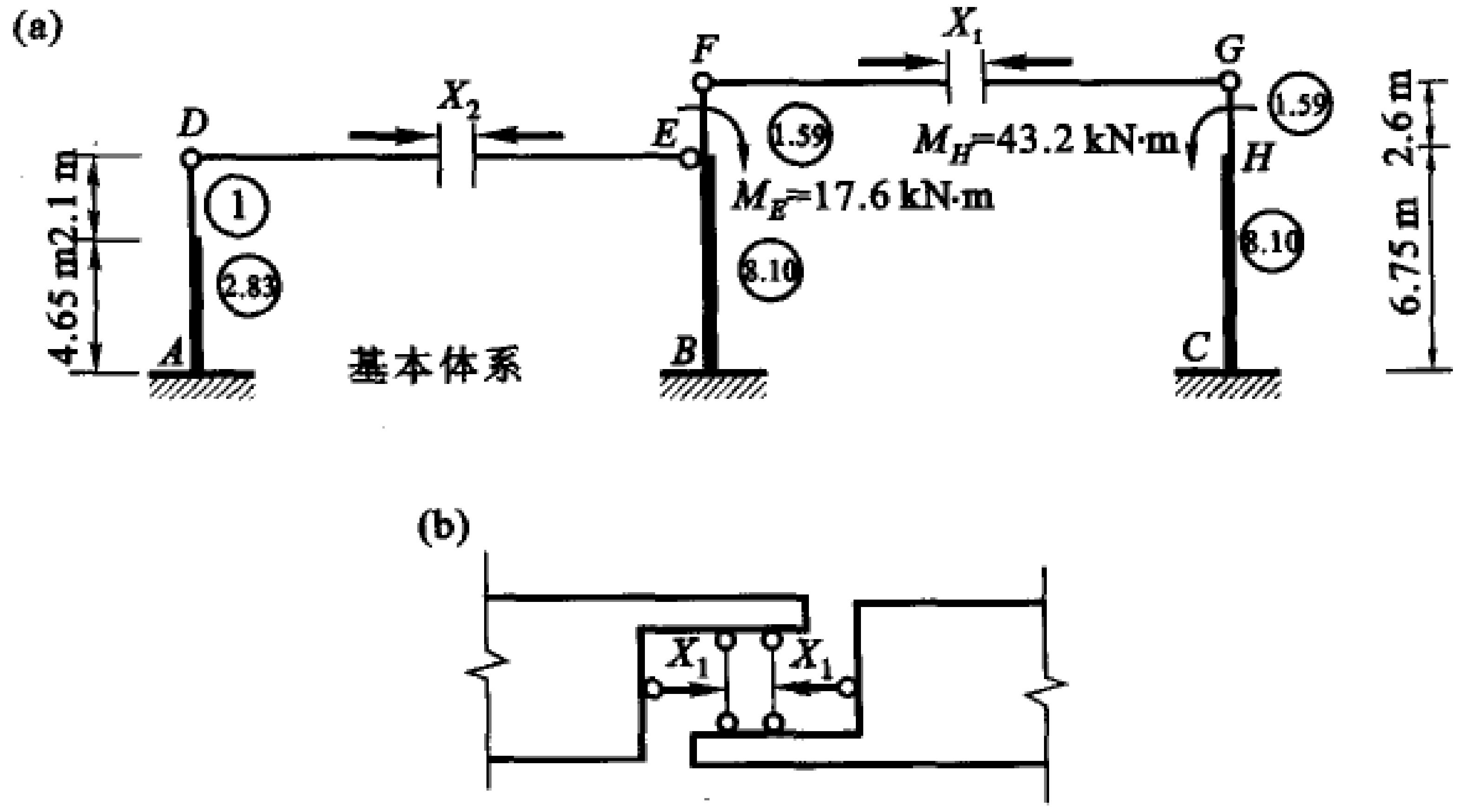


图 6-16

第一,多余未知力 X_1 和 X_2 都是内力;内力在基本体系中是广义力,是由数值相等、方向相反的一对力组成的。

第二,切断一根杆件,是指在切口处把与轴力、剪力、弯矩相应的三个约束全部切断。这里,指的是切断杆件中的轴向约束,即只切断与轴力相应的那一个约束,另外两个约束仍然保留。图 6-16b 所示为杆 FG 在切口处详细情形,只切断了轴向约束。

力法基本方程为

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

这里,Δ_1 和 Δ_2 分别表示与轴力 X_1 和 X_2 相应的广义位移,即切口处两个截面的轴向相对位移。因此,这里力法基本方程所表示的变形条件为:切口处两个截

面沿轴向应仍保持接触，即沿轴向的相对位移应为零。

作基本结构的 M_P、$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 图（图 6－17a、b、c），由此求得自由项和系数如下（图 6－16a 中圆圈内的数字是各杆 EI 的相对值）①：

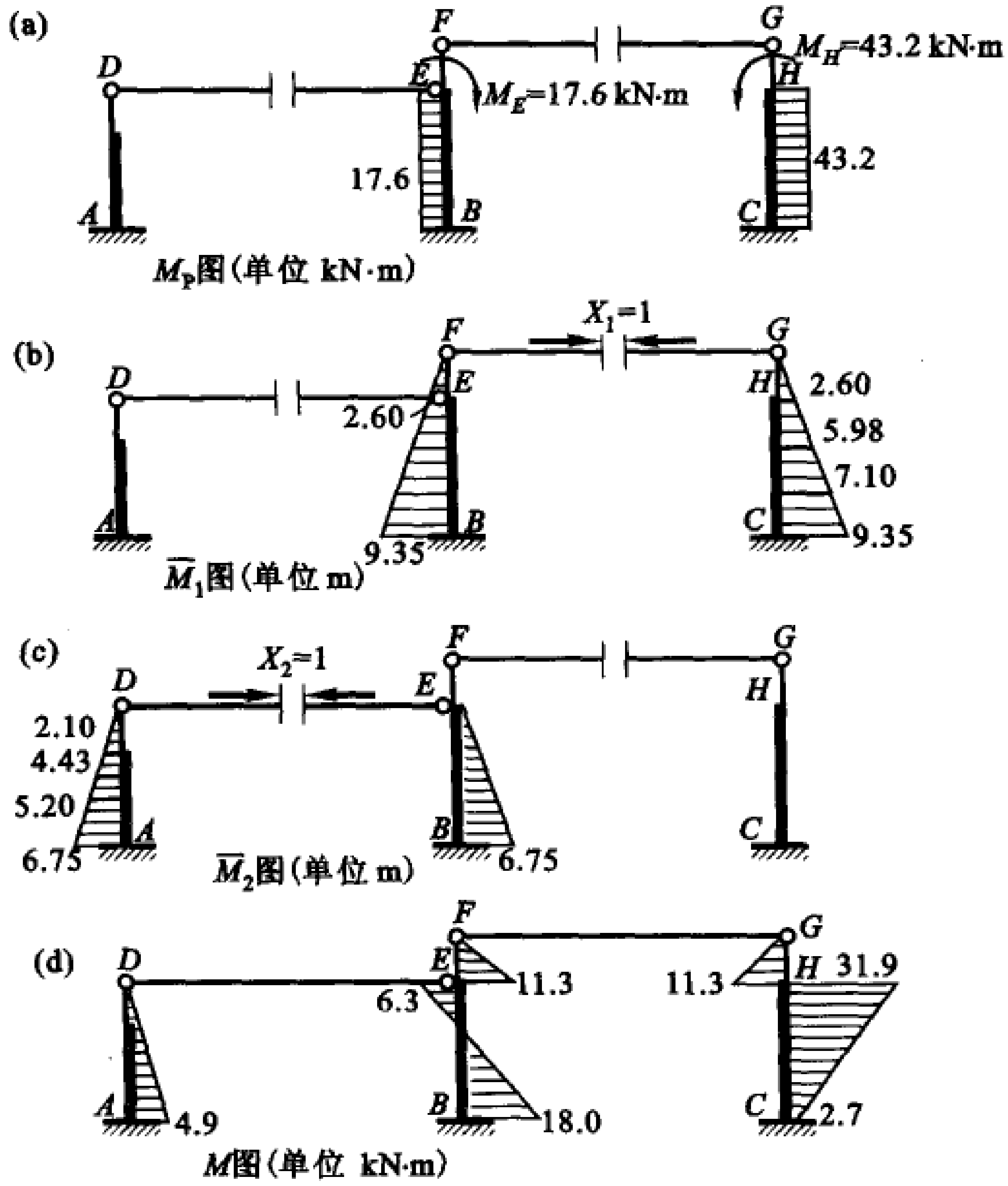


图 6－17

$$\Delta_{1P}=\sum\int\frac{\overline{M}_1 M_P}{EI}\mathrm{d}s=\frac{1}{8.10}\times\frac{2.60+9.35}{2}\times6.75\times(43.2+17.6)=303$$

$$\Delta_{2P}=\sum\int\frac{\overline{M}_2 M_P}{EI}\mathrm{d}s=-\frac{1}{8.10}\times\frac{6.75\times6.75}{2}\times17.6=-49.5$$

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1^2\mathrm{d}s}{EI}$$

---

① 因为超静定结构在荷载作用下的内力只与各杆 EI 的相对值有关，与各杆 EI 的绝对值（真值）无关；以后为了计算的简单，常采用相对值。这时，中间过程的计算结果 δ_{ij}、Δ_{iP} 等已不是真值，而只是相对值，故本例题在运算中不注明其单位。最后内力 X_i 是真值，注明其单位。本书中以后凡是用相对值而非真值计算的算例均按此处理，不再一一说明。

$$=\frac{1}{1.59}\times\frac{2.6\times2.6}{2}\times\frac{2}{3}\times2.6\times2+\frac{1}{8.10}\times\left[2.6\times6.75\times5.98+\frac{6.75\times6.75}{2}\times7.10\right]\times2=73.4$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{\overline{M}_2^2}{EI}ds=\frac{1}{8.10}\times\frac{6.75\times6.75}{2}\times\frac{2}{3}\times6.75+\frac{1}{1}\times\frac{2.1\times2.1}{2}\times\frac{2}{3}\times2.1+\frac{1}{2.83}\times\left[2.1\times4.65\times4.43+\frac{4.65\times4.65}{2}\times5.20\right]=50.9$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{1}{8.1}\times\frac{6.75\times6.75}{2}\times7.10=-20$$

力法方程为

$$\begin{cases}73.4X_1-20X_2+303=0\\-20X_1+50.9X_2-49.5=0\end{cases}$$

解方程，得

$$X_1=-4.33\ \text{kN},\quad X_2=-0.73\ \text{kN}$$

利用叠加公式 $M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+M_P$ 作 M 图，如图 6－17d 所示。

§6－4 超静定桁架和组合结构

桁架是链杆体系，计算力法方程的系数和自由项时，只考虑轴力的影响。组合结构中既有链杆也有梁式杆，计算力法方程的系数和自由项时，对链杆只考虑轴力的影响；对梁式杆通常可忽略轴力和剪力的影响，只考虑弯矩的影响。

例 6－3 试求图 6－18a 所示超静定桁架的内力。各杆截面面积在表6－1中给出。

解 此桁架为一次超静定，基本体系如图 6－18b 所示。基本结构在荷载作用下的各杆轴力 F_{NP}示于图 6－18c，在单位力 $X_1=1$ 作用下的各杆轴力 $\overline{F}_{N1}$ 示于图 6－18d。位移公式为

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}^2l}{EA},\quad\Delta_{1P}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}F_{NP}l}{EA}$$

可列表(表 6－1)进行计算。代入力法方程后，解得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{-1\ 082\ \text{kN/cm}\ E}{89.5\ \text{cm}^{-1}E}=12.1\ \text{kN}$$

各杆轴力可用下式计算：

$$F_N=\overline{F}_{N1}X_1+F_{NP}$$

计算结果也列在表 6－1 中。

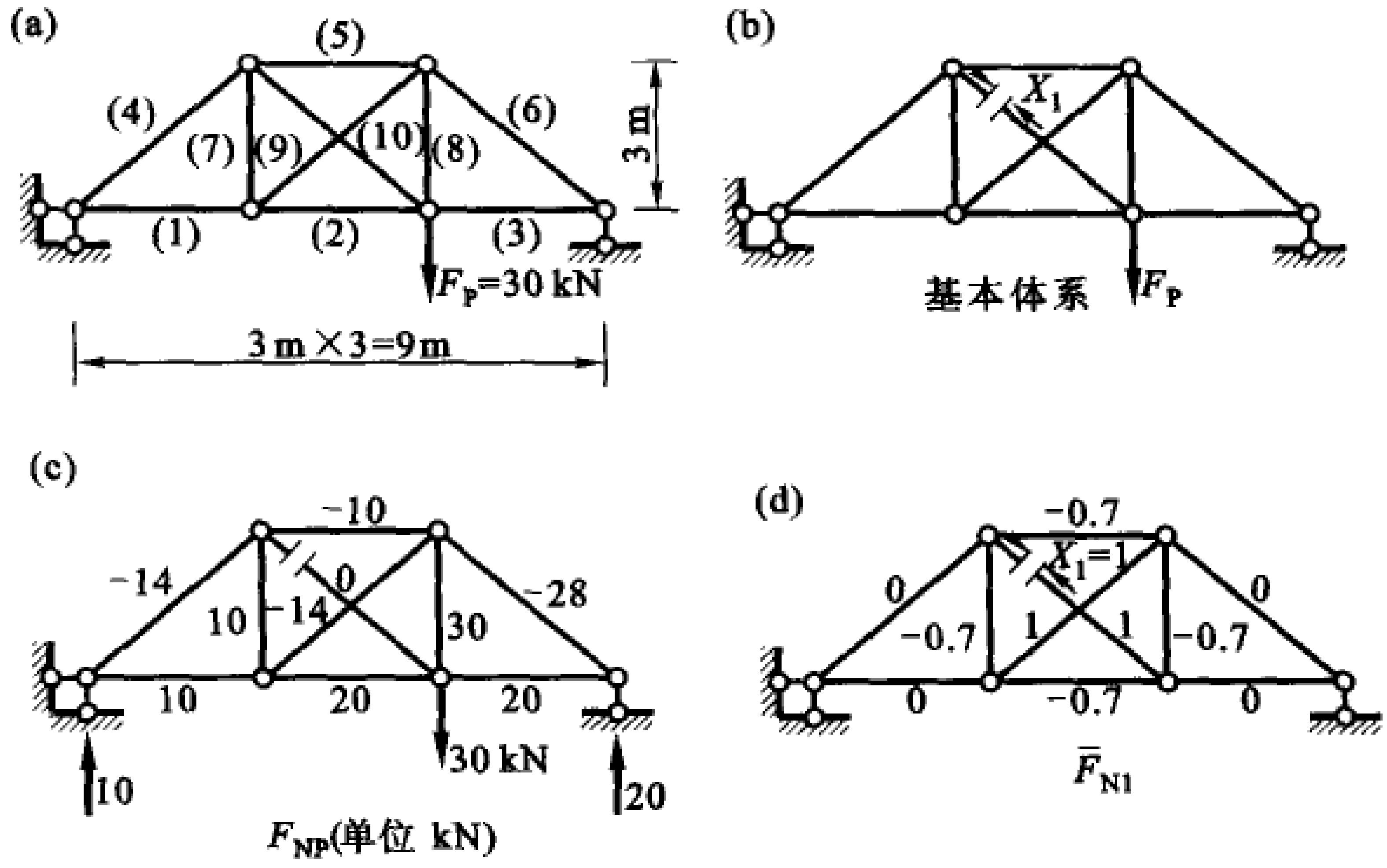


图 6-18

表 6-1 δ_{11}、Δ_{1P}和轴力 F_N 的计算

杆件	l/cm	A/cm^2	F_{NP}/kN	$\bar{F}_{N1}$	$\frac{\bar{F}_{N1}^2 l}{A}$/cm^{-1}	$\frac{\bar{F}_{N1}F_{NP}l}{A}$/kN·cm^{-1}	$F_N=(\bar{F}_{N1}X_1+F_{NP})$/kN
1	300	15	10	0	0	0	10.0
2	300	20	20	-0.7	7.5	-210	11.5
3	300	15	20	0	0	0	-20.0
4	424	20	-14	0	0	0	-14.0
5	300	25	-10	-0.7	6	84	-18.5
6	424	20	-28	0	0	0	-28.0
7	300	15	10	-0.7	10	-140	1.5
8	300	15	30	-0.7	10	-420	21.5
9	424	15	-14	1	28	-396	-1.9
10	424	15	0	1	28	0	12.1
Σ					89.5	-1 082	

例 6-4 试求图 6-19a 所示一次超静定组合结构在荷载作用下的内力。各杆的刚度给定如下：

杆 AD 为梁式杆，

$$EI=1.40\times10^4\ \text{kN·m}^2$$

$$EA=1.99\times10^6\ \text{kN}$$

杆 AC 和 CD 为链杆，$EA=2.56\times10^5$ kN

杆 BC 为链杆，　　　$EA=2.02\times10^5$ kN

解　(1) 基本体系和力法方程

本题为一次超静定结构，切断多余链杆 BC，在切口处代以未知轴力 X_1，得到图 6－19b 所示基本体系。基本体系由于荷载和未知力在 X_1 方向的位移应当是零，亦即切口处两截面的相对位移应为零。由此得力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

(2) 系数和自由项

在基本结构切口处加单位力 $X_1=1$。各杆轴力可由结点法求得，如图 6－20a 所示。杆 AD 还有弯矩，$\overline{M}_1$ 图如图 6－20c 所示。

基本结构在荷载作用下，各杆没有轴力，只有杆 AD 有弯矩，两个 M_P 图如图 6－20b、d 所示。

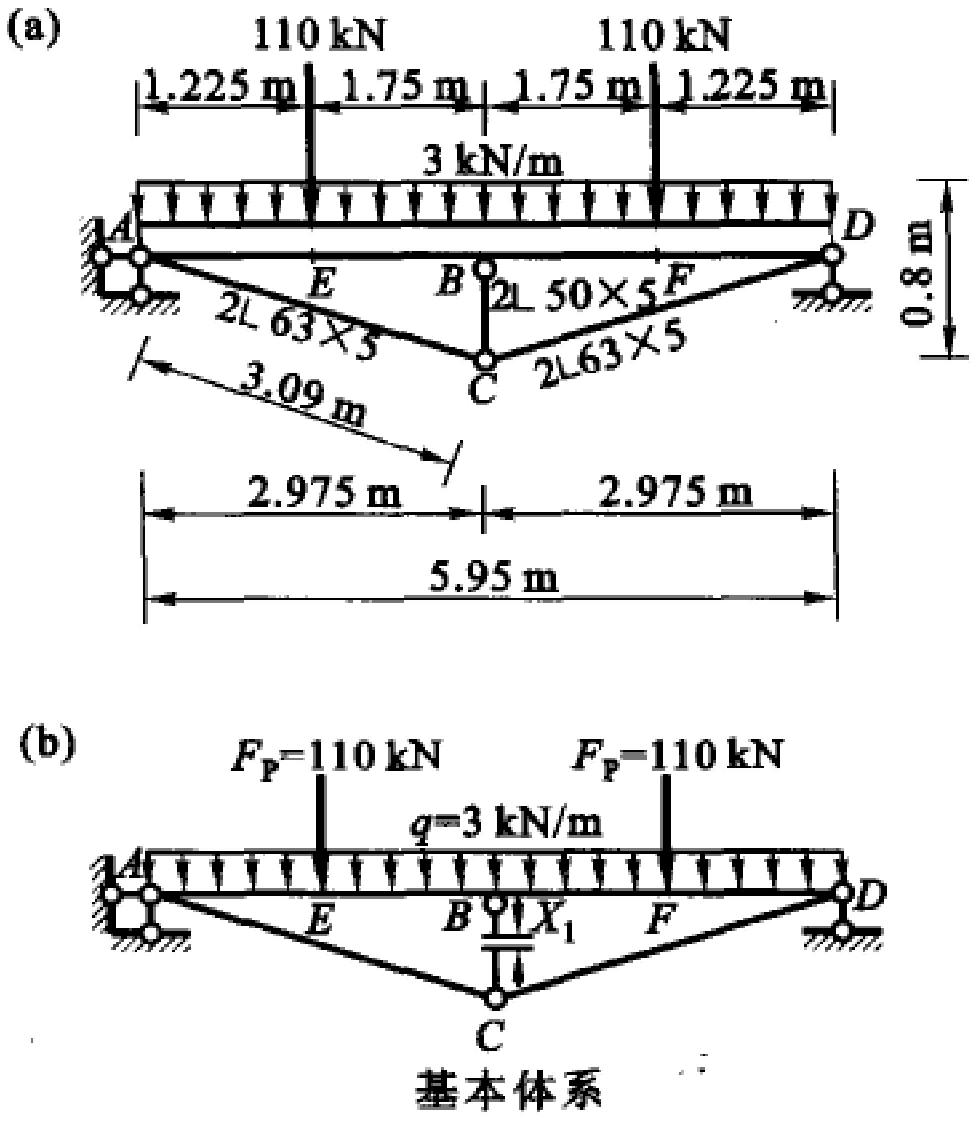


图　6－19

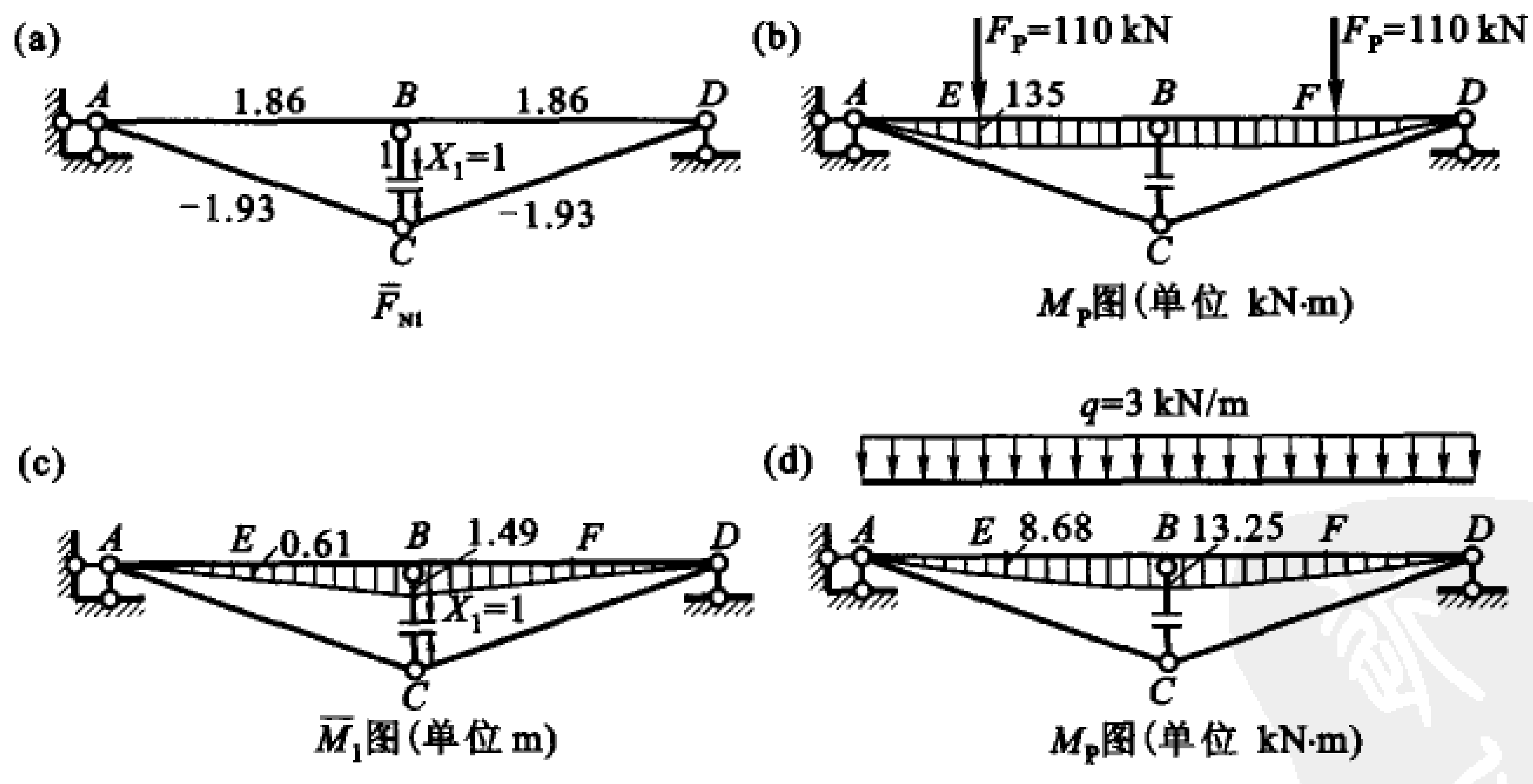


图　6－20

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\,ds+\sum\frac{\overline{F}_{N1}^2 l}{EA}=\frac{1}{1.4\times10^4\ \text{kN·m}^2}\times\left[\frac{1.49\ \text{m}\times2.975\ \text{m}}{2}\times\right.$$

$$\left(\frac{2}{3}\times1.49\ \text{m}\right)\Big]\times2+\frac{1}{1.99\times10^{6}\ \text{kN}}\times(1.86^{2}\times5.95\ \text{m})+\frac{1}{2.56\times10^{5}\ \text{kN}}\times$$

$$(1.93^{2}\times3.09\ \text{m})\times2+\frac{1}{2.02\times10^{5}\ \text{kN}}\times(1^{2}\times0.80\ \text{m})$$

$$=0.000\ 419\ \text{m/kN}$$

$$\Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\text{d}s=\frac{1}{1.4\times10^{4}\ \text{kN}\cdot\text{m}}\times\Big[\left(\frac{2}{3}\times13.25\ \text{kN}\cdot\text{m}\times2.975\ \text{m}\right)\times$$

$$\left(\frac{5}{8}\times1.49\ \text{m}\right)\times2+\left(\frac{1}{2}\times135\ \text{kN}\cdot\text{m}\times1.225\ \text{m}\right)\times$$

$$\left(\frac{2}{3}\times0.61\ \text{m}\right)\times2+(135\ \text{kN}\cdot\text{m}\times1.75\ \text{m})\times$$

$$\left(\frac{0.61\ \text{m}+1.49\ \text{m}}{2}\right)\times2\Big]$$

$$=0.043\ 8\ \text{m}$$

(3) 求多余未知力

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{0.043\ 8\ \text{m}}{0.000\ 419\ \text{m/kN}}=-104.5\ \text{kN}\ (压力)$$

(4) 求内力

内力叠加公式为

$$F_N=\overline{F}_{N1}X_1+F_{NP}$$
$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$

各杆轴力及横梁 AD 弯矩图如图 6-21a、b 所示。

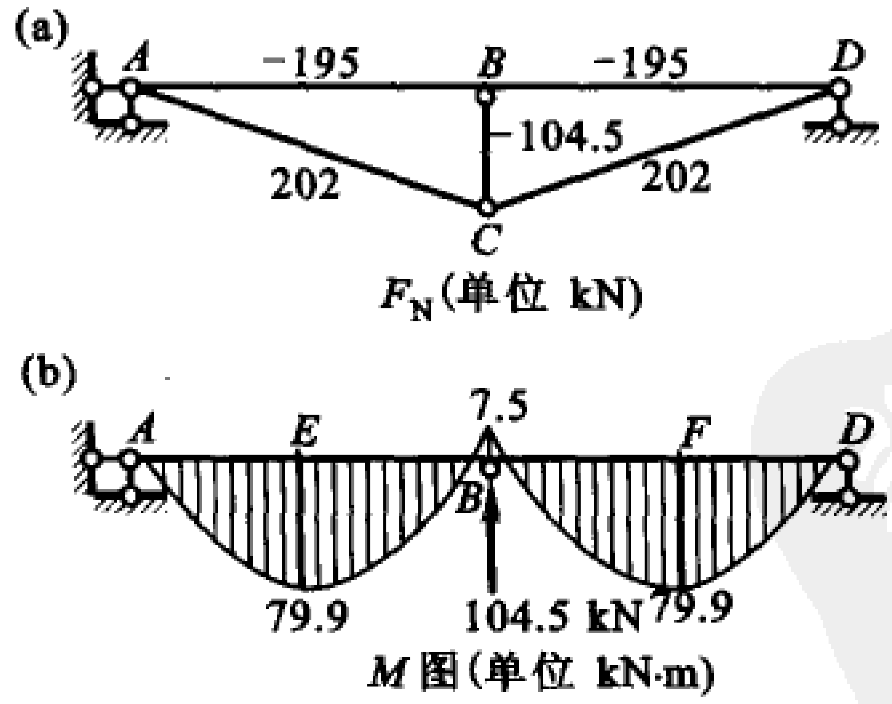
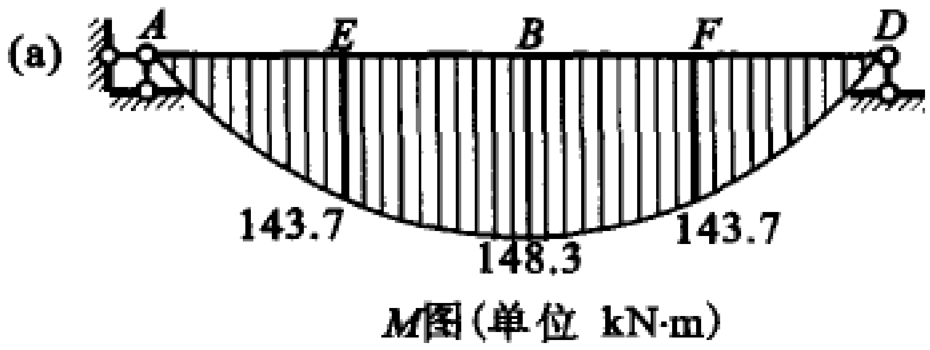


图 6-21

(5) 讨论

由图 6-21b 可以看出，横梁 AD 在中点 B 受到下部桁架的支承反力为 104.5 kN，这时横梁最大弯矩为 79.9 kN·m，如果没有下部桁架的支承，则横梁

AD 为一简支梁，其弯矩图如图 6－22a 所示，其最大弯矩为 148.3 kN·m。可见，由于桁架的支承，横梁的最大弯矩减少了 46%。



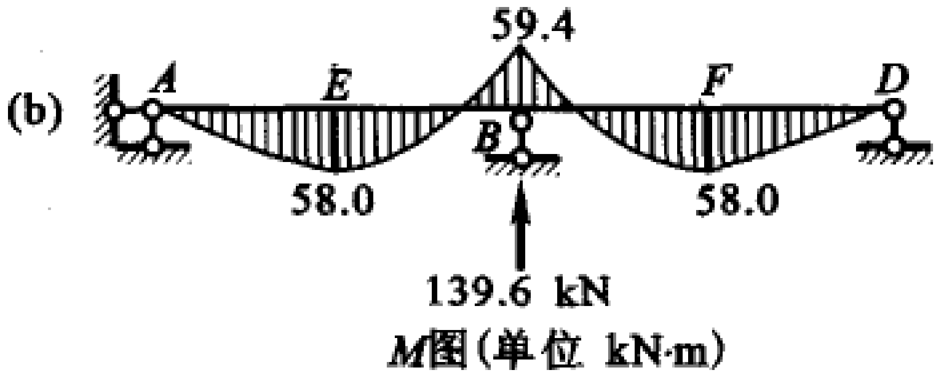


图　6－22

还需指出，这个超静定结构的内力分布与横梁和桁架的相对刚度有关。如果下部链杆的截面很小，则横梁的 M 图接近于简支梁的 M 图（图 6－22a）。如果下部链杆的截面很大，则横梁的 M 图接近于两跨连续梁的 M 图（图 6－22b）。

§6－5　对称结构的计算

在工程中，很多结构具有对称性，图 6－23 是一些具有对称性的结构的例子。利用对称性可以使计算工作得到简化。本节只讨论具有单对称轴的常见情况。

图 6－24a 所示的对称单跨刚架，有一根竖向对称轴。所谓对称结构，就是指：

(1) 结构的几何形式和支承情况对某轴对称。

(2) 杆件截面和材料性质也对此轴对称（因而杆件的截面刚度 EI 对此轴对称）。

作用在对称结构上的任何荷载（图 6－24b）都可分解为两组：一组是对称荷载（图 6－24c），另一组是反对称荷载（图 6－24d）。对称荷载绕对称轴对折后，左右两部分的荷载彼此重合（作用点相对应、数值相等、方向相同）；反对称荷载绕对称轴对折后，左右两部分的荷载正好相反（作用点相对应、数值相等、方向相反）。

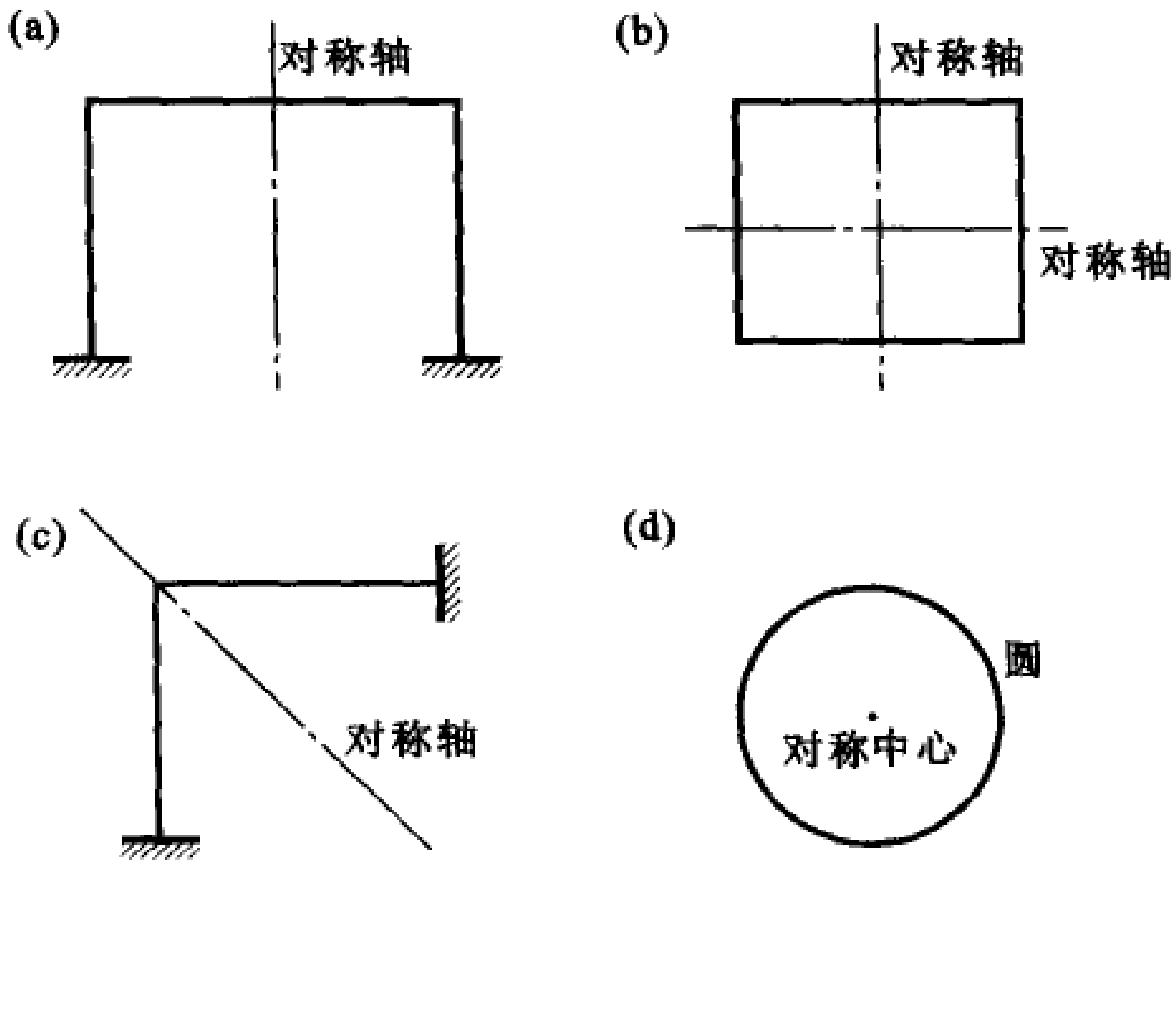


图 6-23

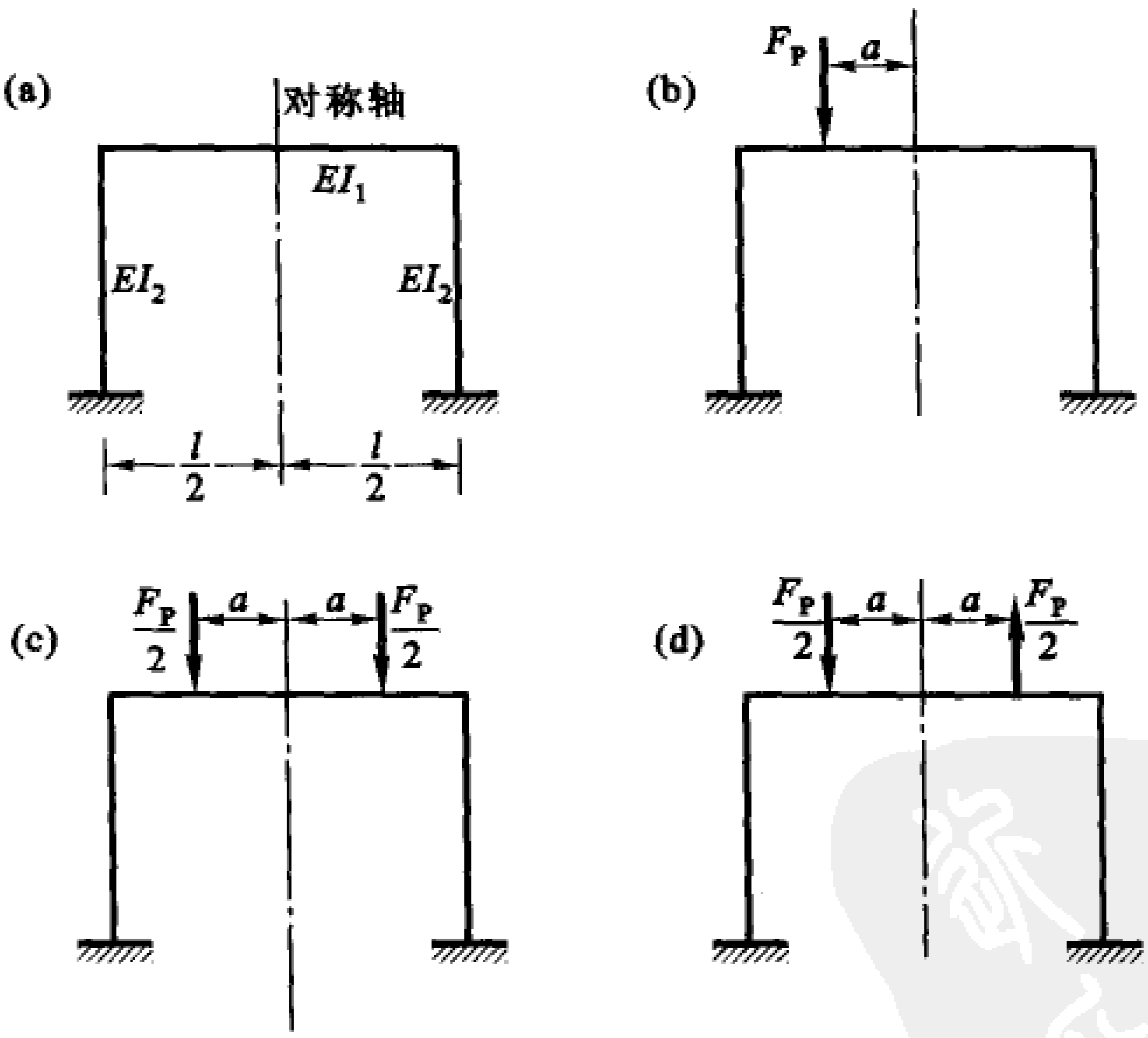


图 6-24

计算超静定对称结构时，为了简化计算，应当选择对称的基本体系，并取对称力或反对称力作为多余未知力。以图 6-24b 所示刚架为例，可沿对称轴上梁的中间截面切开，这样得到的基本体系是对称的(图 6-25a)。这时，多余未知力包括三个广义力 X_1、X_2 和 X_3。它们分别是一对弯矩、一对轴力和一对剪力。

其中，X_1 和 X_2 是对称力，X_3 是反对称力。

基本体系（图 6－25a）所要满足的变形条件是：

$$\Delta_1 = 0$$
$$\Delta_2 = 0$$
$$\Delta_3 = 0$$

这里，Δ_1是沿 X_1 方向的位移。由于 X_1 是一对弯矩，所以位移 Δ_1是指切口两侧截面的相对转角，而第一个力法方程是指切口两侧截面的相对转角应等于零（注意，这里不是指截面的转角等于零，而是指相对转角等于零，即两侧截面的转角应彼此相等）。同样，第二个和第三个力法方程分别表示切口两侧截面的水平相对位移和竖向相对位移应等于零。

图 6－25b、c、d 所示为各单位未知力作用时的单位弯矩图和变形图。显然，对称未知力 X_1 和 X_2 所产生的弯矩图 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 和变形图是对称的，反对称未知力 X_3 所产生的弯矩图 $\overline{M}_3$ 和变形图是反对称的。因此，

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_3}{EI} \mathrm{d}s = 0$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_3}{EI} \mathrm{d}s = 0$$

这样，力法方程就简化为

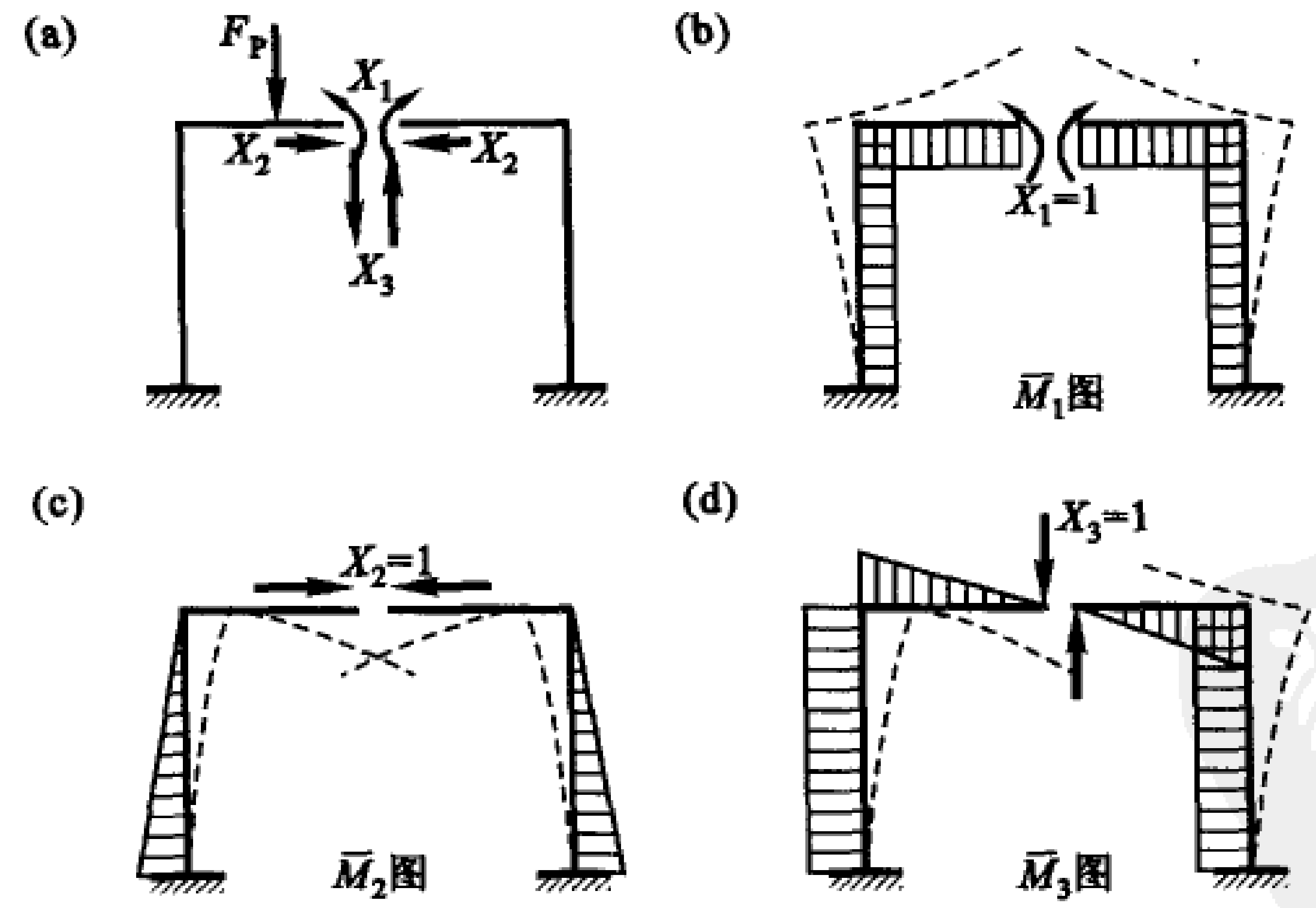


图　6－25

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6-7)$$

可以看出,方程已分为两组。一组只包含对称未知力 X_1、X_2,另一组只包含反对称未知力 X_3。

一般地说,采用力法计算任何对称结构时,只要所取的基本未知量都是对称力或反对称力,则力法方程必然分解成独立的两组,其中一组只包含对称未知力,另一组只包含反对称未知力,原来的高阶方程组现在分解为两个低阶方程组,因而使计算得到简化。

下面先就对称荷载和反对称荷载两种情况作进一步的讨论。

(1) 对称荷载

以图 6-24c 所示荷载为例,这时基本结构的荷载弯矩图 M_P 是对称的(图 6-26a)。由于 $\overline{M}_3$ 是反对称的,因此

$$\Delta_{3P}=\sum\int\frac{\overline{M}_3 M_P}{EI}\mathrm{d}s=0$$

代入力法方程(6-7)的第三式,可知反对称未知力 $X_3=0$。对于对称未知力 X_1 和 X_2,则需根据前两式进行计算(图 6-26b)。

一般地说,对称结构在对称荷载作用下,如果所取的基本未知量都是对称力或反对称力,则反对称未知力必等于零,只需计算对称未知力。

(2) 反对称荷载

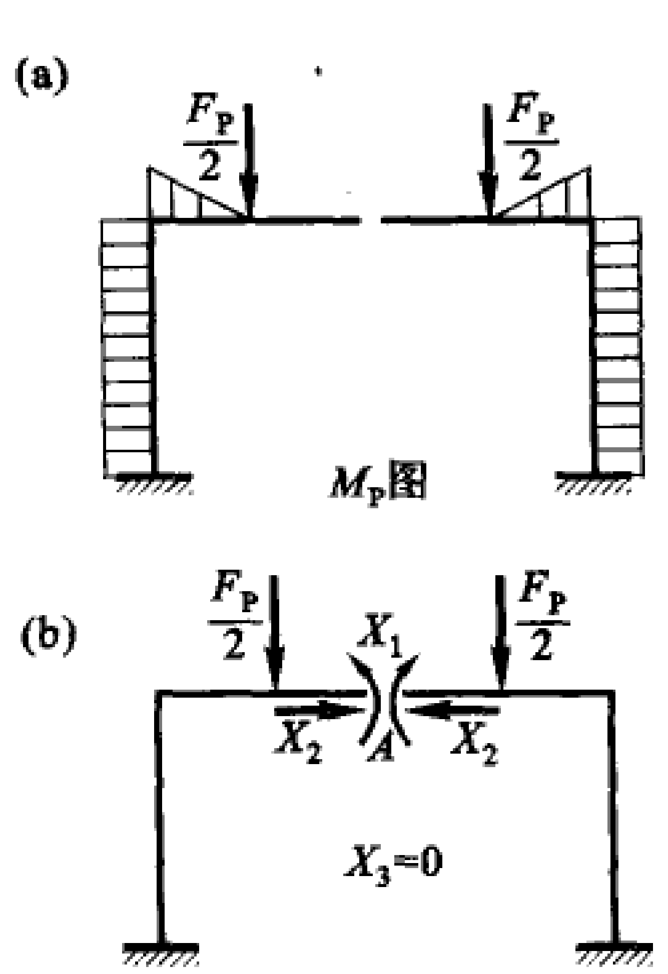


图 6-26

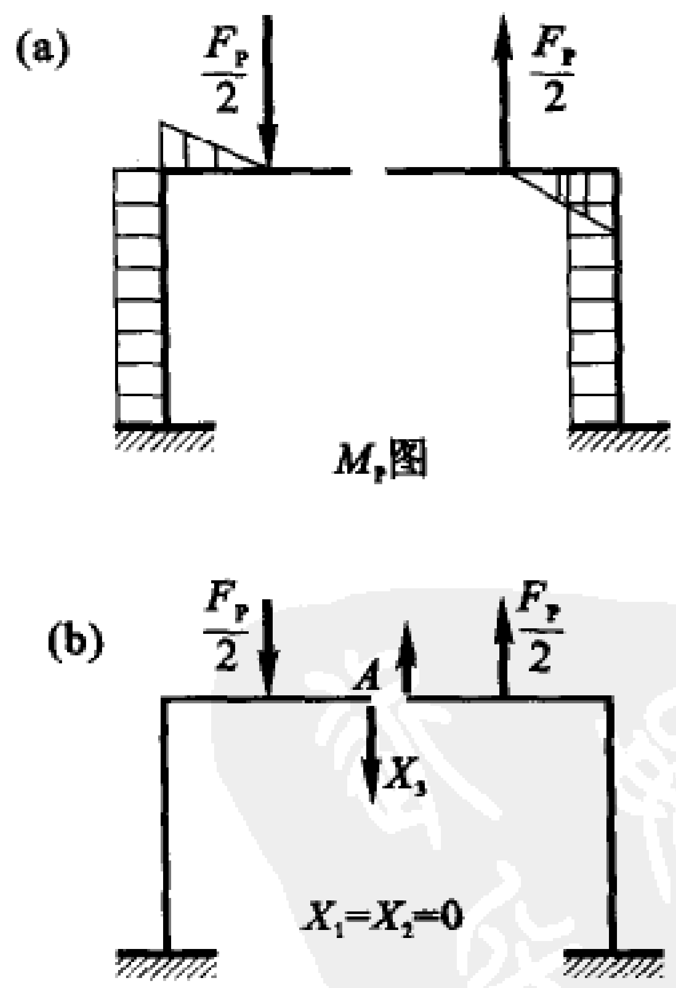


图 6-27

以图 6-24d 所示荷载为例,这时基本结构的荷载弯矩图 M_P 是反对称的(图 6-27a)。由于 $\overline{M}_1$ 与 $\overline{M}_2$ 是对称的,因此

$$\Delta_{1P}=\sum\int\frac{\overline{M}_1 M_P}{EI}\mathrm{d}s=0$$

$$\Delta_{2P}=\sum\int\frac{\overline{M}_2 M_P}{EI}ds=0$$

代人力法方程(6-7)的前两式,可知对称力 $X_1=X_2=0$。对于反对称未知力 X_3,则需根据第三式进行计算(图 6-27b)。

一般地说,对称结构在反对称荷载作用下,如果所取的基本未知量都是对称力或反对称力,则对称未知力必等于零,只需计算反对称未知力。

最后,讨论非对称荷载的情形。这里有两种作法。

第一种作法,把荷载分解为对称与反对称两部分,对这两部分荷载分别计算,然后把两种结果叠加起来。

第二种作法,不进行分解,直接取非对称荷载进行计算。

以上两种做法各有利弊,可根据情况选用。

归纳起来,利用对称性以简化计算的要点如下:

(1) 选用对称的基本结构,选用对称力或反对称力作为基本未知量。

(2) 在对称荷载作用下,只考虑对称未知力(反对称未知力等于零)。

(3) 在反对称荷载作用下,只考虑反对称未知力(对称未知力等于零)。

(4) 非对称荷载可分解为对称荷载和反对称荷载。

最后指出,对称结构的计算还有另一种方法——取半边结构进行计算,见§7-6。

例 6-5 试作图 6-28a 所示对称刚架在水平力 F_P 作用下的弯矩图。

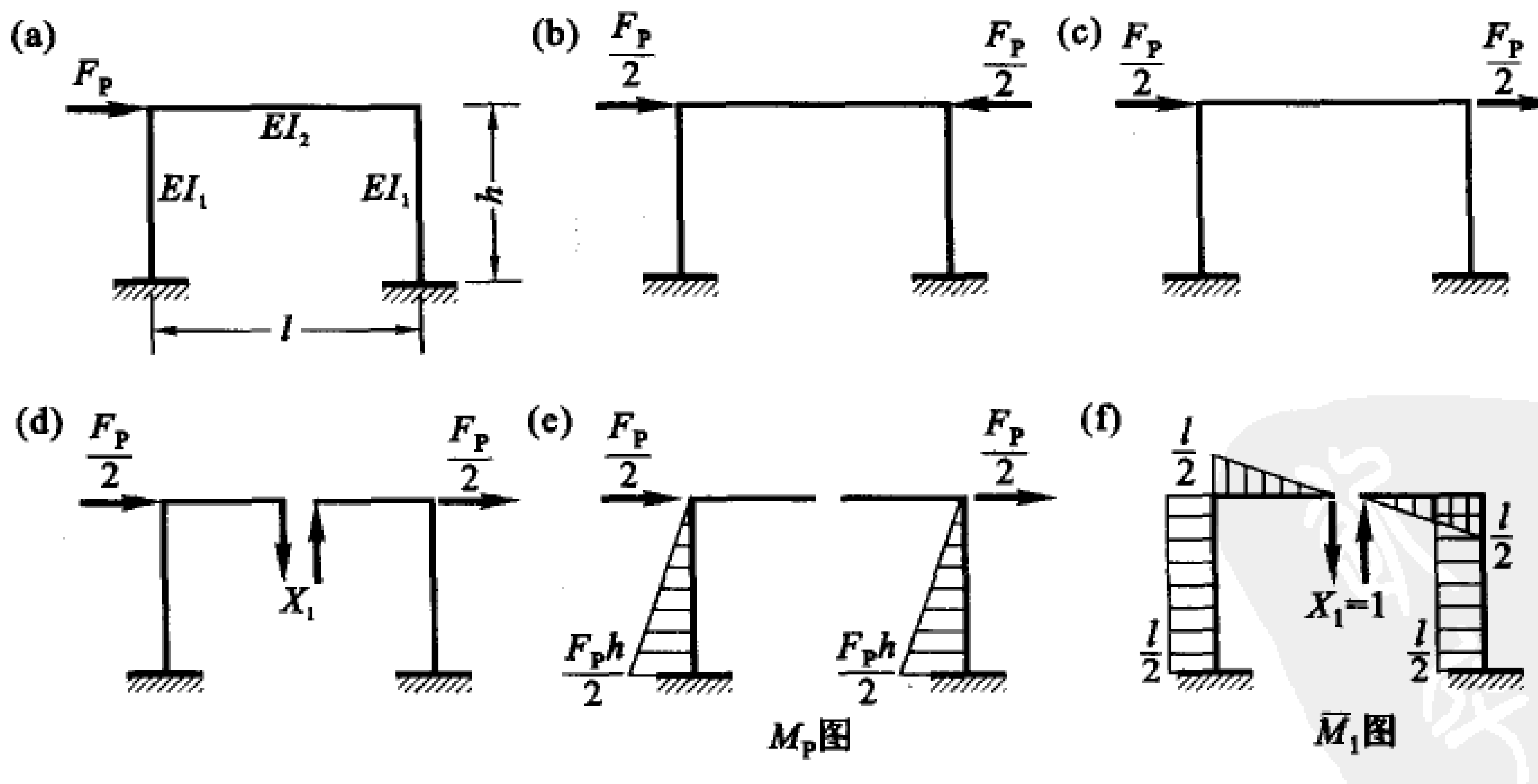


图 6-28

解 荷载 F_P可分为对称荷载(图 6-28b)和反对称荷载(图 6-28c)。

在对称荷载作用下(图 6－28b),可以得出只有横梁承受压力$\frac{F_P}{2}$,而其他杆无内力的结论。这是因为计算刚架时通常忽略轴力对变形的影响,对此刚架也就是忽略横梁的压缩变形。在这个条件下,上述内力状态不仅满足了平衡条件,也同时满足了变形条件,所以就是真正的内力状态。因此,为了求作图 6－28a 所示刚架的弯矩图,只需求作图 6－28c 中刚架在反对称荷载作用下的弯矩图即可。

在反对称荷载作用下,基本体系如图 6－28d 所示。切口截面的弯矩、轴力都是对称未知力,应为零;只有反对称未知力 X_1 存在。基本结构在荷载和单位未知力作用下的弯矩图,如图 6－28e、f 所示。由此得

$$\Delta_{1P}=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{F_P h}{2}h\right)\times\frac{l}{2EI_1}=\frac{F_P h^2 l}{4EI_1}$$

$$\delta_{11}=2\times\left[\frac{l}{2}h\times\frac{l}{2EI_1}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\right)\times\frac{l}{3}\frac{1}{EI_2}\right]=\frac{l^2 h}{2EI_1}+\frac{l^3}{12EI_2}$$

代入力法方程,并设 $k=\frac{I_2 h}{I_1 l}$,得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{6k}{6k+1}\cdot\frac{F_P h}{2l}$$

刚架的弯矩图如图 6－29a 所示。

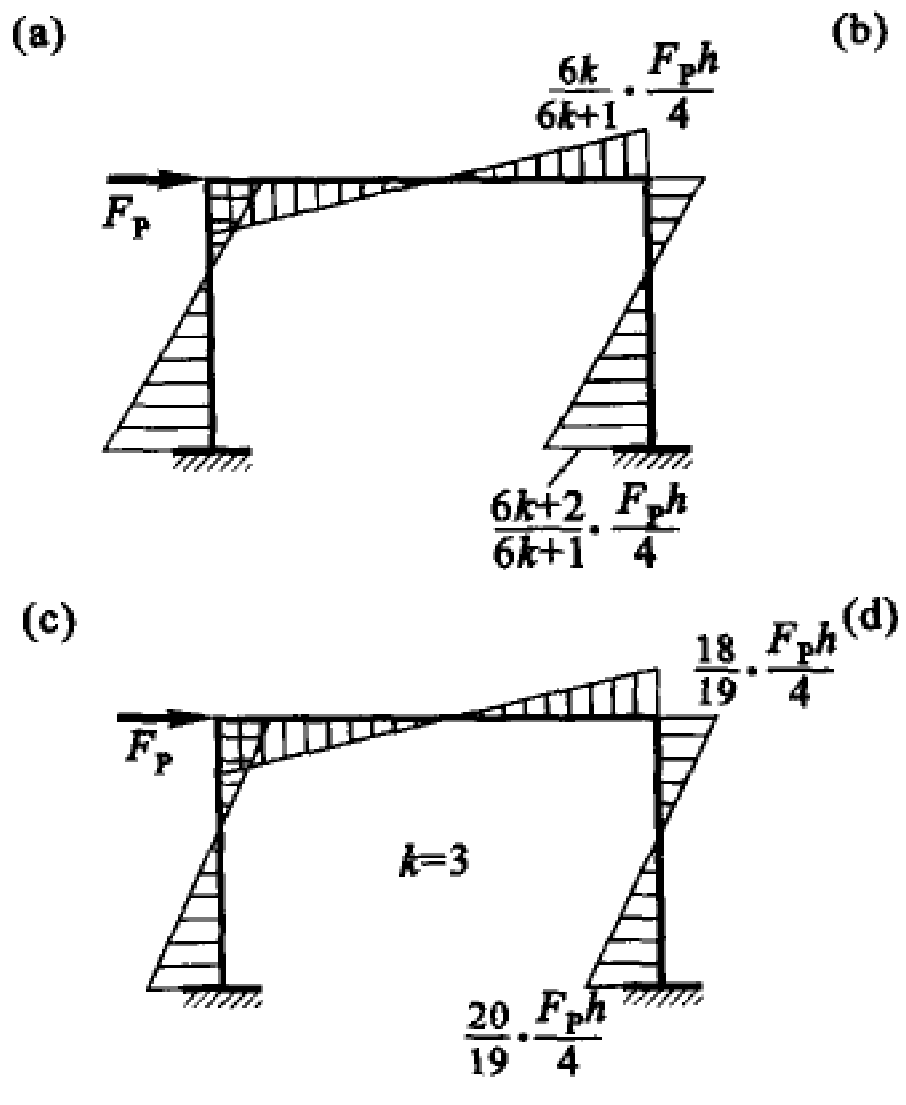


图　6－29

结合上例讨论如下：

弯矩图随横梁与立柱刚度比值 k 而改变。

(1) 当横梁比立柱的 I 小很多时，即 k 很小时，弯矩图如图 6-29b 所示，此时柱顶弯矩趋向于零。

(2) 当横梁比立柱的 I 大很多时，即 k 很大时，弯矩图如图 6-29d 所示，此时柱的弯矩零点趋于柱的中点。

(3) 一般情况下，柱的弯矩图有零点，此弯矩零点在柱上半部范围内变动，当 $k=3$ 时，零点位置与柱中点已很接近(图 6-29c)。因此，在刚架受水平结点荷载的近似计算中，当 $k \geqslant 3$ 时，常将弯矩零点置于柱中点(即可视横梁刚度 $EI_2 \to \infty$)，以简化计算。

§6-6 两 铰 拱

拱结构在工程中应用很广。在桥梁方面，历史上有著名的赵州石拱桥。近年来双曲拱桥被广泛采用。在建筑方面，除采用落地式拱顶结构外，通常采用带拉杆的拱式屋架(在图 6-30a 中，曲杆为钢筋混凝土构件，拉杆为角钢、吊杆是为了防止拉杆下垂而设的附件，图 6-30b 为计算简图)。水利工程和地下建筑中的隧洞衬砌也是一种拱式结构(图 6-30c、d)。

超静定拱多数是无铰拱或两铰拱(图 6-30e、f)，闭合环形结构可看作是无铰拱的一种特殊情形。

本节先讨论两铰拱的计算。

两铰拱是一次超静定结构(图 6-31a)。选用简支曲梁(图 6-31b)作基本体系，以推力 X_1 作基本未知量，则力法方程(表示支座 B 没有水平位移)为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

由于拱是曲杆，求位移 δ_{11} 和 Δ_{1P} 时不能采用图乘法，因而计算要繁一些。

因为基本结构是一个简支曲梁，计算 Δ_{1P} 时一般只考虑弯曲变形；计算 δ_{11} 时，有时(对较平的扁拱且截面较厚时)要考虑轴向变形。因此，

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int \frac{\overline{M}_1 M_P}{EI} ds \\ \delta_{11} &= \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} ds + \int \frac{\overline{F}_{N1}^2}{EA} ds \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

基本结构在 $X_1=1$ 作用下(图 6-31c)，竖向支座反力为零，任意截面 C 的弯矩和轴力为

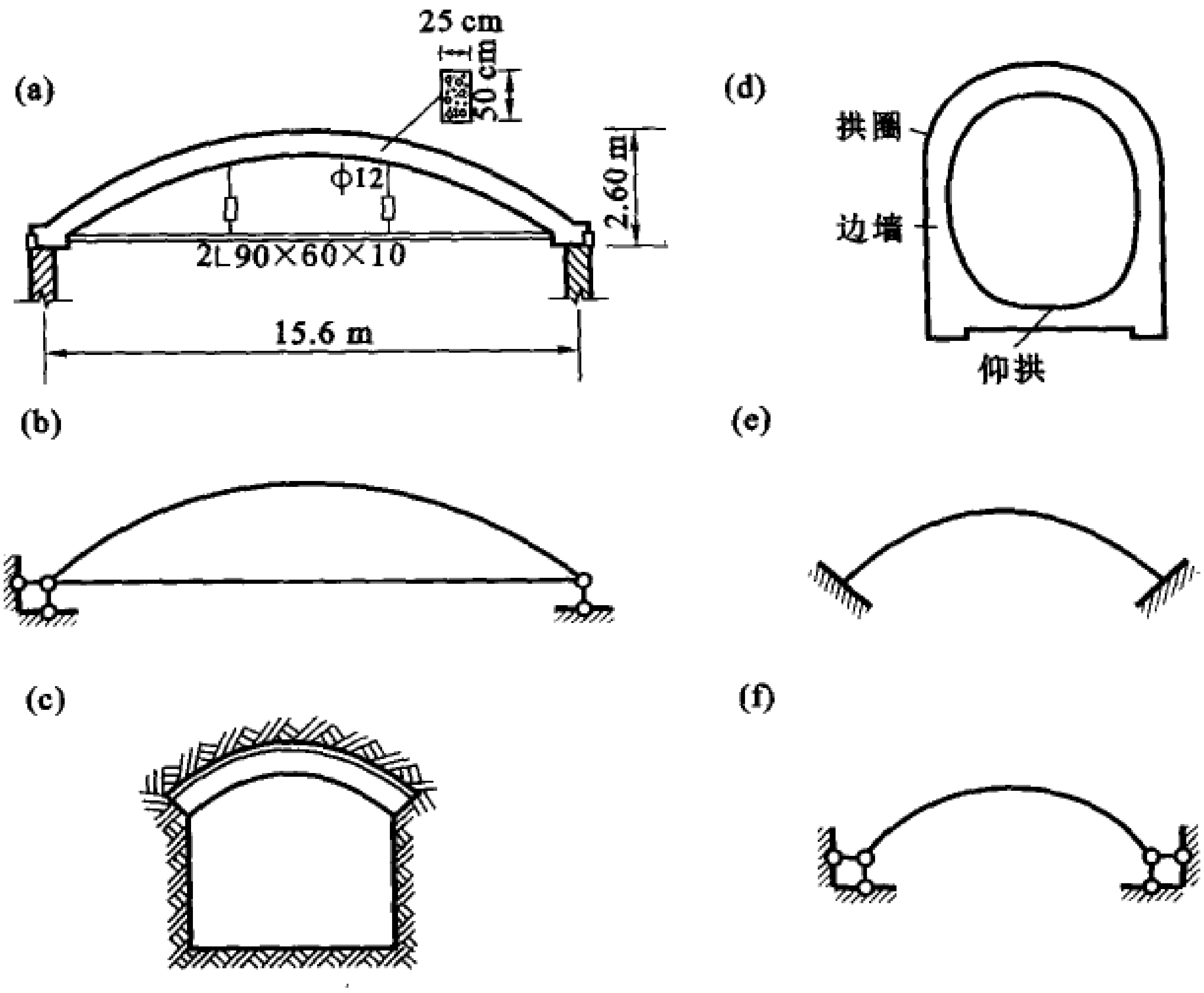

(a)
25 cm
50 cm
2.60 m
ϕ12
2L90×60×10
15.6 m
(b)
(c)
(d)
拱圈
边墙
仰拱
(e)
(f)

图 6－30

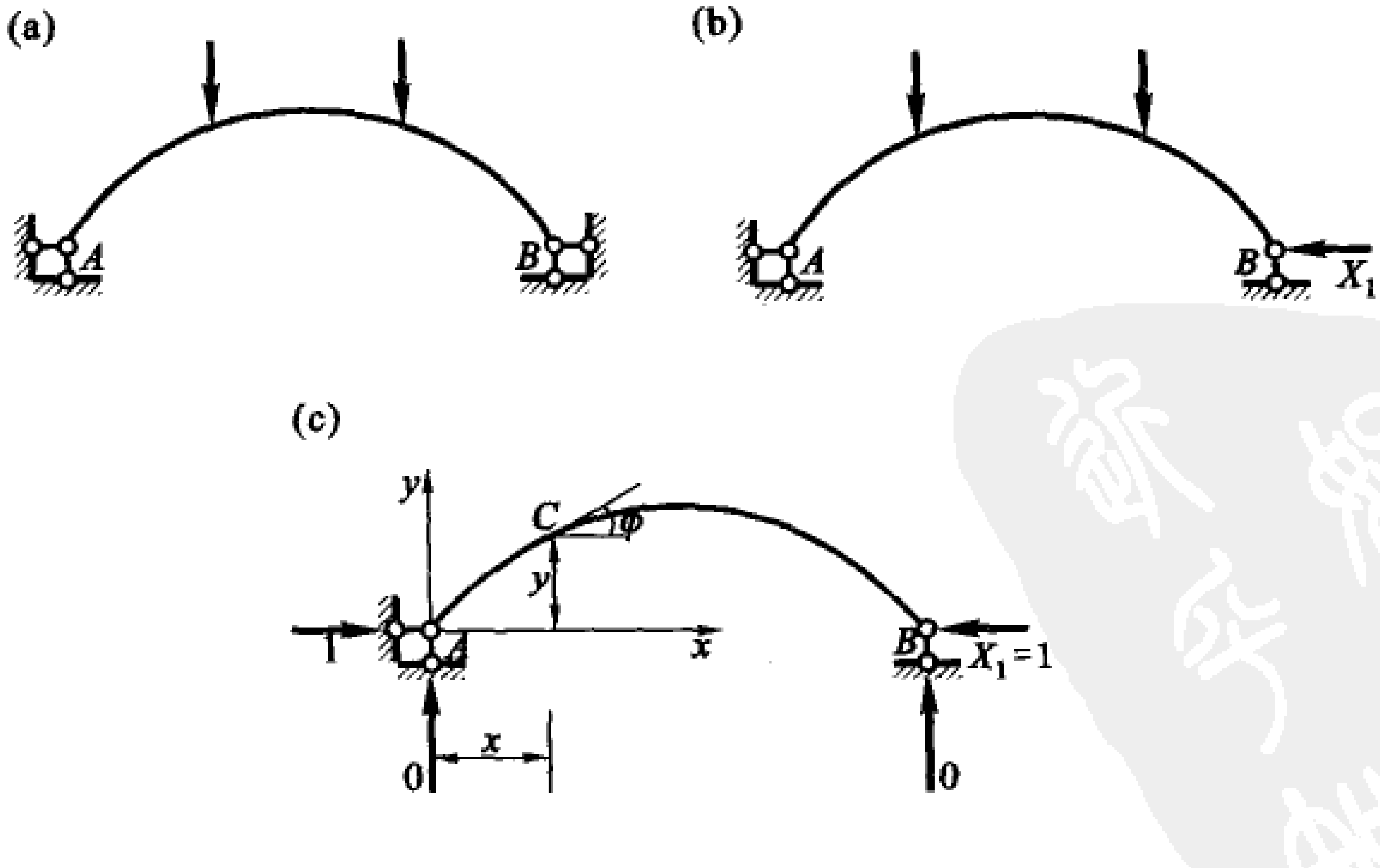

(a)
A
B
(b)
A
B
X_1
(c)
y
C
φ
y
x
1
A
B
$X_1=1$
0
x
0

图 6－31

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_1 &= -y \\ \overline{F}_{N1} &= -\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

这里,y 表示任意截面 C 的纵坐标,向上为正;φ 表示截面 C 处拱轴切线与 x 轴所成的锐角,左半拱的 φ 为正,右半拱的 φ 为负;弯矩 M 以使拱的内缘受拉为正;轴力 F_N 以拉力为正。

如果只承受竖向荷载,则简支曲梁任意截面的弯矩 M_P 与同跨度同荷载的简支水平梁相应截面的弯矩 M^0 彼此相等,即

$$M_P = M^0 \tag{c}$$

将式(b)和(c)代入式(a),得

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{1P} &= -\int \frac{M^0 y}{EI}\mathrm{d}s \\ \delta_{11} &= \int \frac{y^2}{EI}\mathrm{d}s + \int \frac{\cos^2\varphi}{EA}\mathrm{d}s\end{aligned}\right\}$$

δ_{11} 和 Δ_{1P} 求出后,由力法方程可求 X_1(即推力 F_H):

$$X_1 = F_H = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

推力 F_H 求出后,内力的计算方法和计算公式完全与三铰拱相同。在竖向荷载作用下,两铰拱的内力计算公式为

$$\left.\begin{aligned}M &= M^0 - F_H y \\ F_Q &= F_Q^0\cos\varphi - F_H\sin\varphi \\ F_N &= -F_Q^0\sin\varphi - F_H\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

从以上讨论中可以看出下列两点:

从力法计算来看,两铰拱与两铰刚架基本相同,只是位移 δ_{11} 和 Δ_{1P} 需按曲杆公式计算,不能采用图乘法。

从受力特性来看,两铰拱与三铰拱基本相同。内力计算式(d)在形式上与三铰拱完全相同,只是其中的 F_H 值有所不同。在三铰拱中,推力 F_H 是由平衡条件求得的;在两铰拱中,推力 F_H 则是由变形条件求得的。

在屋盖结构中采用的两铰拱,通常带拉杆(图 6-32a)。设置拉杆的目的,一方面是使砖墙或立柱不受推力,从而在砖墙或立柱中不产生弯矩;另一方面又使拱肋承受推力,从而减小了拱肋的弯矩。

计算带拉杆的两铰拱时,可将拉杆切断,基本体系如图 6-32b 所示。基本未知力 X_1 是拉杆内的拉力,也就是拱肋所受的推力 F_H。力法方程(表示切口

两边无相对位移)为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

与无拉杆的两铰拱相比,力法方程在形式上是一样的。但是,在计算 δ_{11} 时,应当考虑拉杆的变形,即

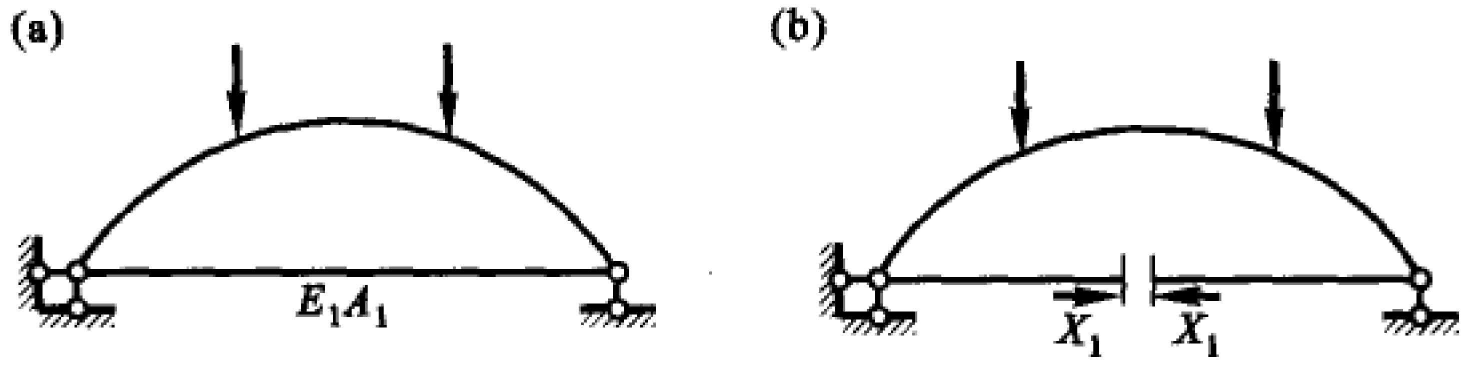


图　6-32

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\overline{F}_{N1}^2}{EA}\mathrm{d}s+\int_0^l\frac{\overline{F}_{N1}^2}{E_1A_1}\mathrm{d}x \tag{e}$$

这里,前两项是对拱肋积分,末一项是对拉杆积分。E_1 和 A_1 分别表示拉杆的弹性模量和截面面积。基本结构在 $X_1=1$ 作用下,拉杆的轴力为 $\overline{F}_{N1}=1$。因此,末一项积分为

$$\int_0^l\frac{\overline{F}_{N1}^2}{E_1A_1}\mathrm{d}x=\int_0^l\frac{1^2}{E_1A_1}\mathrm{d}x=\frac{l}{E_1A_1} \tag{f}$$

将式(f)代回式(e),得

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\overline{F}_{N1}^2}{EA}\mathrm{d}s+\frac{l}{E_1A_1} \tag{g}$$

基本结构在荷载作用下,拉杆的拉力为零。因此,计算 Δ_{1P} 时只对拱肋积分,即

$$\Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}s \tag{h}$$

这个公式与无拉杆的两铰拱是一样的。

其余的解法与前一样,不再重述。

下面对两铰拱的两种形式(有拉杆和无拉杆)加以比较。由式(g)和(h),可得出位移 δ_{11}、Δ_{1P}(无拉杆)与位移 δ_{11}^*、Δ_{1P}^*(有拉杆)之间的关系如下:

$$\delta_{11}^*=\delta_{11}+\frac{l}{E_1A_1}$$

$$\Delta_{1P}^*=\Delta_{1P}$$

由此可得出推力 F_H(无拉杆)和推力 F_H^*(有拉杆)的计算式如下:

$$F_H = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

$$F_H^* = -\frac{\Delta_{1P}^*}{\delta_{11}^*} = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + \dfrac{l}{E_1 A_1}}$$

如果拉杆的刚度很大($E_1A_1 \to \infty$),则 $F_H^* \to F_H$。这时,两种形式的推力基本相等,因而受力状态也基本相同。

如果拉杆的刚度很小($E_1A_1 \to 0$),则 $F_H^* \to 0$。这时,带拉杆的两铰拱实际上是简支曲梁,拱肋的受力状态是很不利的。

由此可见,在设计带拉杆的两铰拱时,为了减少拱肋的弯矩,改善拱的受力状态,应当适当地加大拉杆的刚度。

例 6-6 图 6-33a 所示为一抛物线两铰拱,承受半跨均布荷载。试求其水平推力 F_H。设拱的截面尺寸为常数,以左支点为原点,拱轴方程为

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

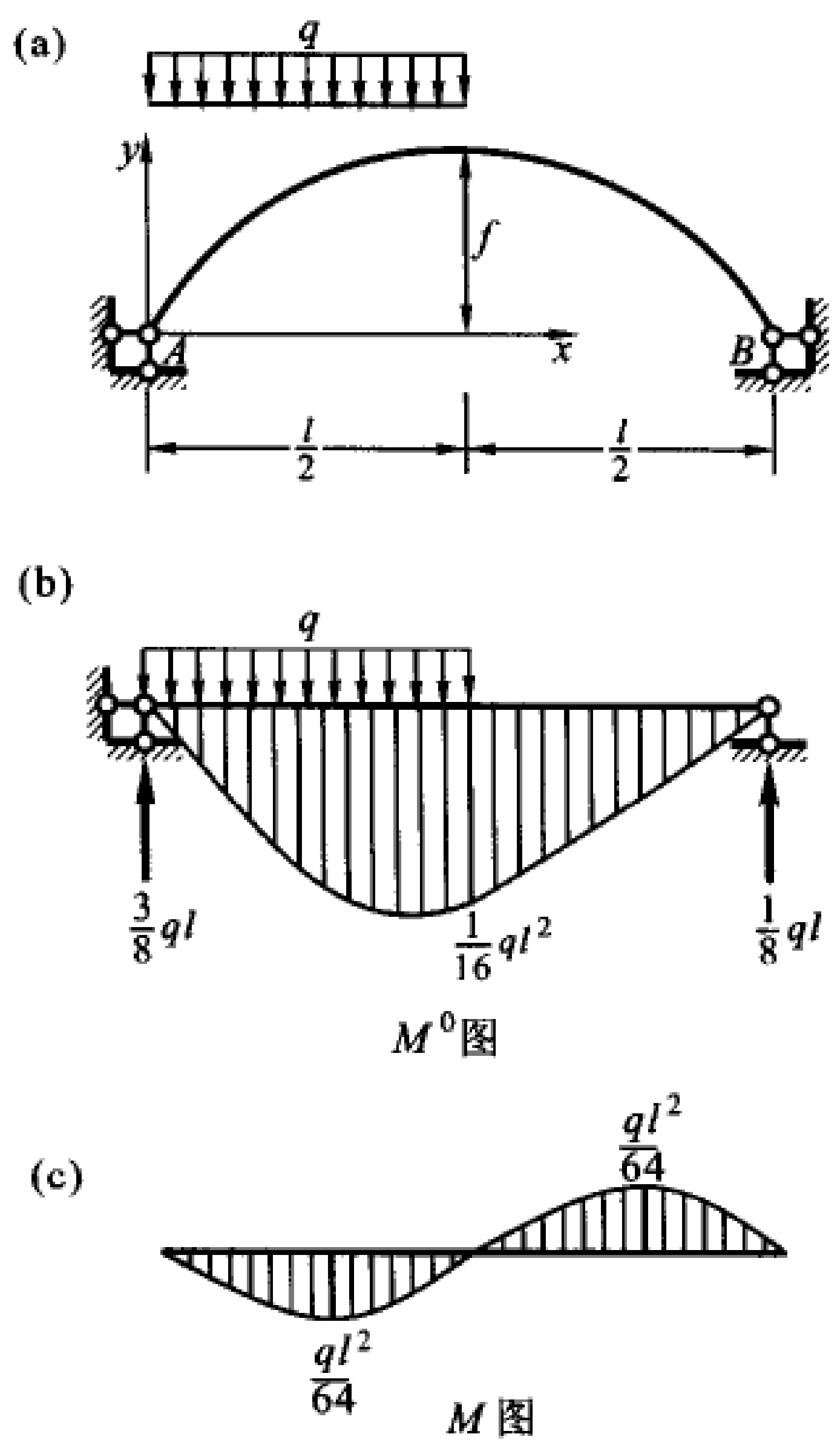


图 6-33

解 计算时,可采用两个简化假设:

(1) 忽略轴向变形,只考虑弯曲变形。

(2) 当拱比较平时$\left(例如\dfrac{f}{l}<\dfrac{1}{5}\right)$,可近似地取 $ds=dx$, $\cos\varphi=1$。因此,位移的简化公式为

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\int_0^l y^2 dx$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\int_0^l yM^0 dx$$

先计算 δ_{11}:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\int_0^l\left[\frac{4f}{l^2}x(l-x)\right]^2 dx$$

$$=\frac{16f^2}{EIl^4}\int_0^l(l^2x^2-2lx^3+x^4)dx=\frac{8f^2l}{15EI}$$

计算 Δ_{1P}时,先求简支梁的弯矩 M^0。M^0 图如图 6-33b 所示,弯矩方程分两段表示如下:

左半跨 $\left(0<x<\dfrac{l}{2}\right)$, $M^0=\dfrac{3}{8}qlx-\dfrac{1}{2}qx^2$

右半跨 $\left(\dfrac{l}{2}<x<l\right)$, $M^0=\dfrac{ql}{8}(l-x)$

因此

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}}y\left(\frac{3}{8}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right)dx-\frac{1}{EI}\int_{\frac{l}{2}}^l y\frac{ql}{8}(l-x)dx=-\frac{qfl^3}{30EI}$$

由力法方程求得

$$F_H=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{ql^2}{16f}$$

这个结果与三铰拱在半跨均布荷载作用下的结果是一样的。

F_H 求出以后,利用公式

$$M=M^0-F_H y$$

可作出 M 图,如图 6-33c 所示。这个弯矩图也与三铰拱的弯矩图相同。

讨论:上面计算的结果,两铰拱的推力与三铰拱的推力相等,这不是一个普遍性结论。如果在别的荷载作用下,或者在计算位移时不忽略轴向变形的影响,则两铰拱的推力不一定与三铰拱推力相等。但是,在一般荷载作用下,两铰拱的推力与三铰拱的推力通常是比较接近的。

例 6-7 图 6-34 所示为一等截面抛物线两铰拱,拱轴方程为 $y=\dfrac{4f}{l^2}x\cdot$

$(l-x)$。设有移动荷载在拱身上自 A 向 B 移动。试求其水平推力 F_H 和拱顶截面 C 处 M_C 的影响线。

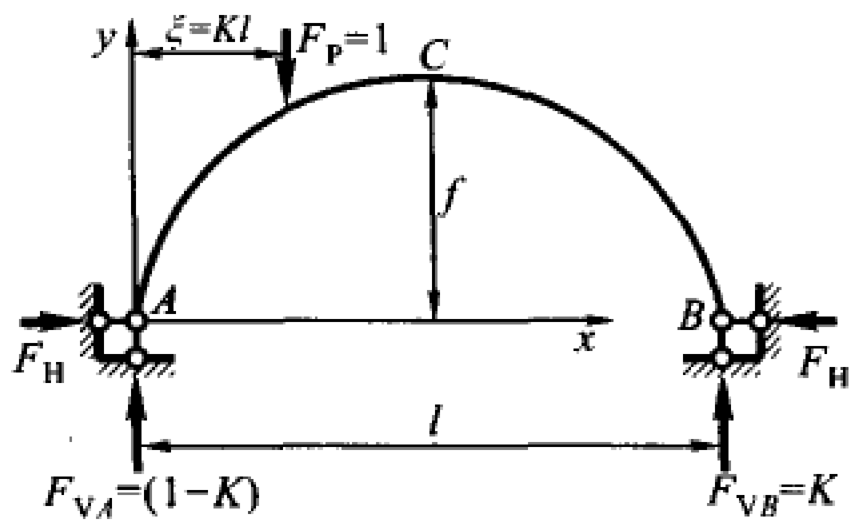


图 6-34

解 计算时忽略轴向变形的影响，只考虑弯曲变形，并近似地取 $ds = dx$。

(1) 作基本未知力 F_H 的影响线。

将荷载 $F_P = 1$ 放置在 $\xi = Kl$ 处，由力法方程求得 F_H 的影响系数为

$$F_H = \frac{-\delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

其中，

$$\delta_{11} = \int \frac{y^2 ds}{EI} = \int_0^l \frac{1}{EI}\left[\frac{4f}{l^2}x(l-x)\right]^2 dx = \frac{8f^2 l}{15EI}$$

$$\delta_{1P} = -\int \frac{M_P y ds}{EI} = \frac{-1}{EI}\int_0^l yM^0 dx$$

在 $F_P = 1$ 作用下，简支梁的弯矩方程为

当 $0 \leqslant x \leqslant \xi$，　　$M^0 = F_{VA}x = (1-K)x$

当 $\xi \leqslant x \leqslant l$，　　$M^0 = F_{VB}(l-x) = K(l-x)$

将 M^0 代入 δ_{1P} 中，得

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI}\left[\int_0^\xi \frac{4f}{l^2}x(l-x)(1-K)x dx + \int_\xi^1 \frac{4f}{l^2}x(l-x)K(l-x)dx\right]$$

$$= -\frac{fl^2}{3EI}K(1-K)(1+K-K^2)$$

因此，

$$F_H = \frac{5l}{8f}K(1-K)(1+K-K^2)$$

F_H 的影响线如图 6－35a 所示

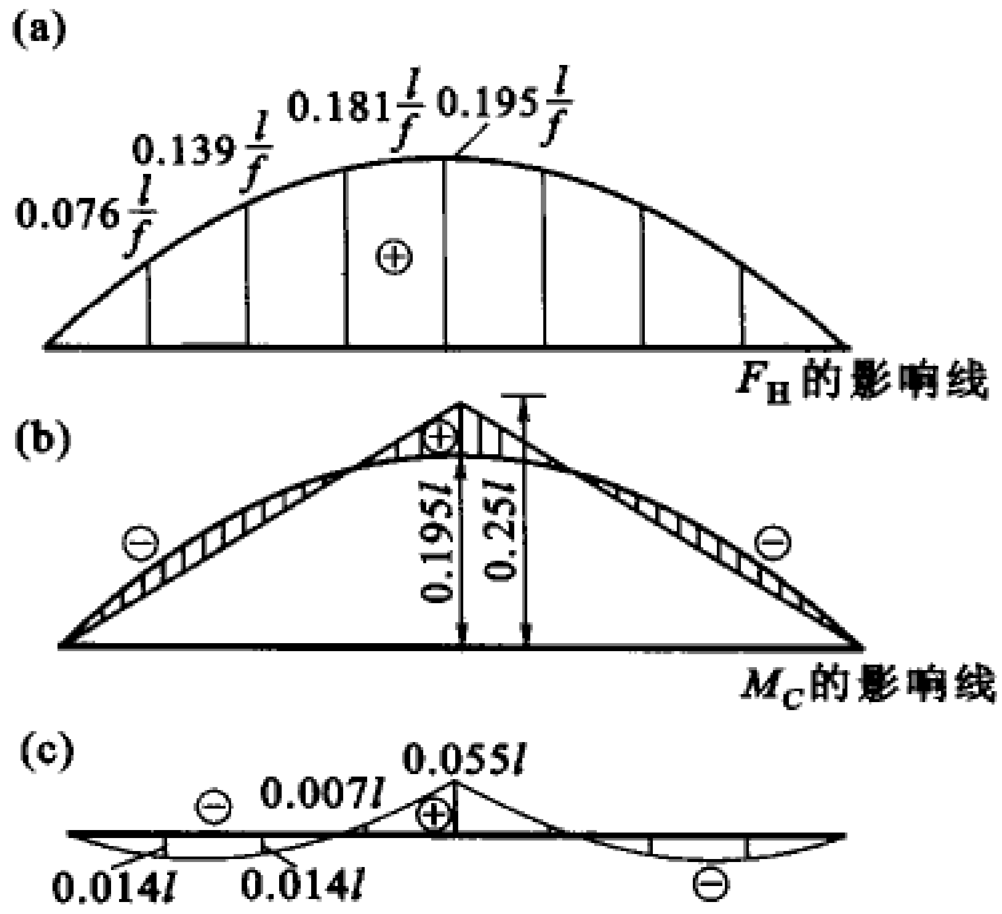


图 6－35

(2) 作其他内力的影响线

两铰拱任一截面的内力计算公式为

$$\left.\begin{aligned} M &= M^0 - F_H y \\ F_Q &= F_Q^0 \cos\varphi - F_H \sin\varphi \\ F_N &= -F_Q^0 \sin\varphi - F_H \cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

有了水平推力 F_H 的影响线后，再利用上式就可以用叠加法绘制出其他内力的影响线。例如，拱顶弯矩的算式为

$$M_C = M_C^0 - F_H f$$

将 M_C^0 影响线(图 6－35b 中三角形部分)与 F_H 影响线乘以 f 后的图形(图 6－35b 中曲线部分)相减，便得到 M_C 的影响线。图 6－35c 为 M_C 的影响线画在横坐标轴上的图形。

(3) 讨论

这里，通过两铰拱说明用力法作超静定力影响线的方法，它与静定力影响线的静力法相应。

还应指出，也可以利用超静定力影响线与挠度图之间的比拟关系，作超静定力的影响线，它与静定力影响线的机动法相应，见§8－8。

§6－7　无　铰　拱

本节只讨论常见的对称无铰拱的计算。

图6－36a为一对称无铰拱，是三次超静定结构。为了简化计算，可采用两项简化措施。

第一项简化措施是利用结构的对称性。为此，选取对称的基本体系，在拱顶截开，取拱顶的弯矩 X_1、轴力 X_2 和剪力 X_3 为多余未知力（图6－36b）。X_1 和 X_2 是对称未知力，X_3 是反对称未知力，因此力法方程简化为独立的两组如下：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

第二项简化措施是利用刚臂，进一步使余下的一对副系数 δ_{12} 和 δ_{21} 也等于零，从而使力法方程简化为三个独立的一元一次方程：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\}\qquad(6-8)$$

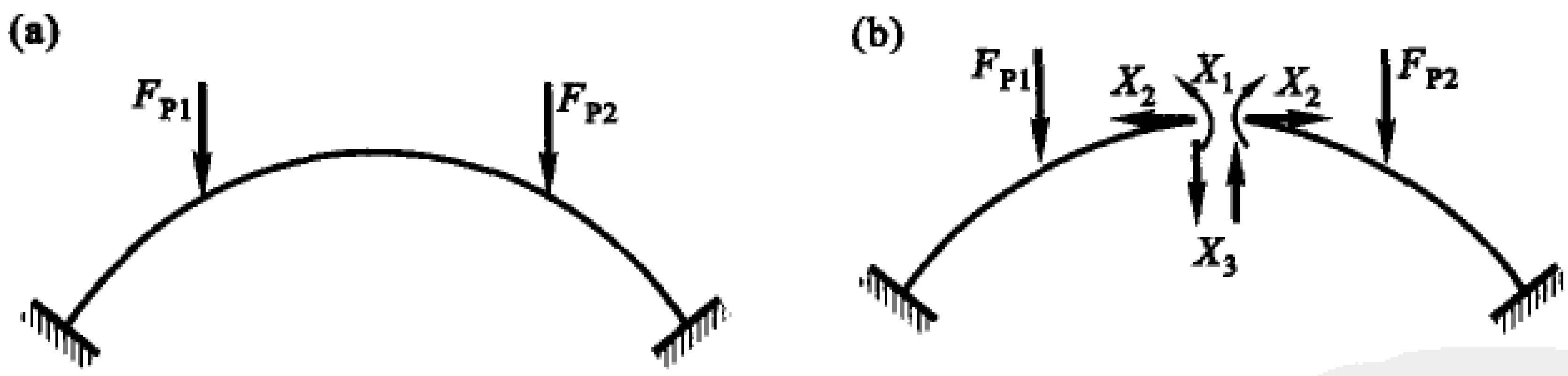


图　6－36

下面说明如何利用刚臂来达到上述简化的目的。

首先，把原来的无铰拱换成图6－37a所示的拱：即先在拱顶把无铰拱切开，在切口处沿竖向对称轴安上两根刚性为无穷大的杆件 CO 和 C_1O_1（称为刚臂），再在端部把两个刚臂重新刚性地连接起来。在任意荷载作用下，O 和 O_1 之间没有任何相对位移（包括相对移动和相对转动），而刚臂又是绝对刚性的，不产生任何变形，因此 C 和 C_1 之间也没有任何相对位移。由此看出，这个带刚臂的无铰拱与原来的无铰拱是等效的，可以互相代替。

然后，取基本体系。将带刚臂的无铰拱在 O 处切开，在切口处加上三对多

余未知力 X_1、X_2 和 X_3，如图 6－37b 所示。这个基本体系仍然是对称的，X_1 和 X_2 是对称未知力，X_3 是反对称未知力，力法方程如式(a)所示。

现在需要确定刚臂的长度，也就是确定刚臂端点 O 的位置。我们的目的是要使副系数 $\delta_{12}=\delta_{21}=0$。因此，可根据这个条件反过来推算 O 点的位置。为此，先写出副系数 δ_{12} 的算式如下：

$$\delta_{12}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{k\overline{F}_{Q1}\overline{F}_{Q2}}{GA}\mathrm{d}s+\int\frac{\overline{F}_{N1}\overline{F}_{N2}}{EA}\mathrm{d}s \tag{b}$$

这个积分的范围只包括拱轴的全长，而不包括刚臂部分，因为刚臂为绝对刚性，其积分值等于零。

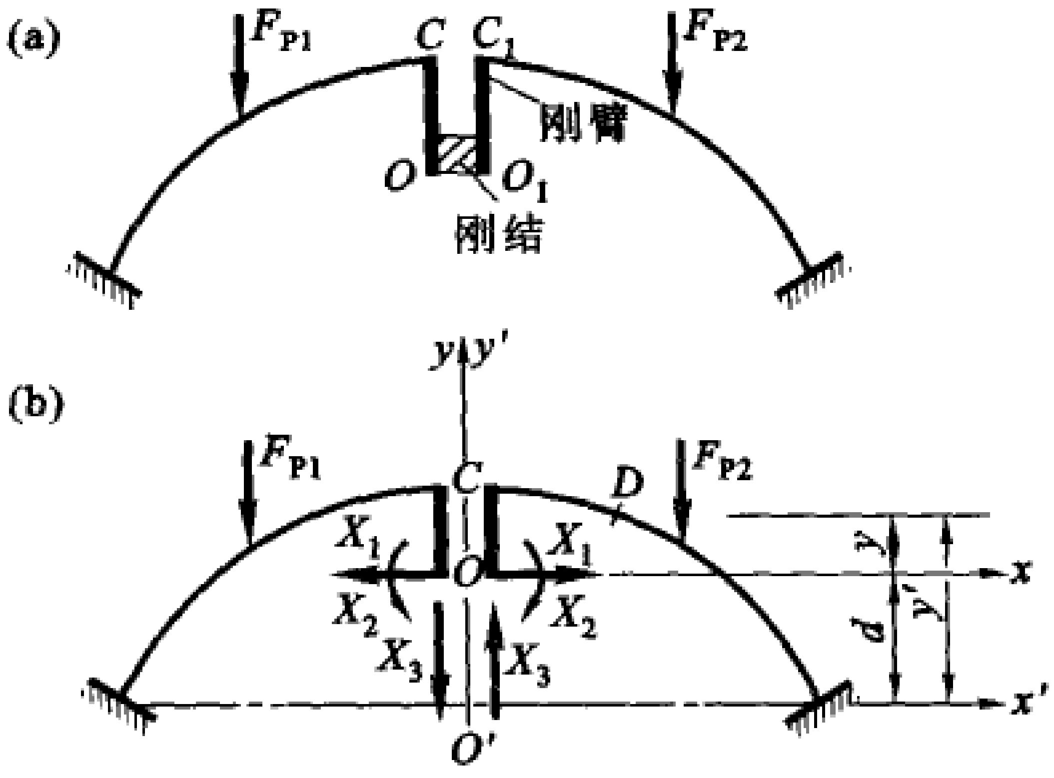


图　6－37

其次，求单位力 $X_1=1$ 和 $X_2=1$ 产生的内力。选 O 点为坐标原点，x、y 轴的方向如图 6－37b 所示。在单位力 $X_1=1$ 作用下，内力的算式为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_1&=1\\\overline{F}_{N1}&=0\\\overline{F}_{Q1}&=0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

在单位力 $X_2=1$ 作用下，内力的算式为

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_2&=-y\\\overline{F}_{N2}&=-\cos\varphi\\\overline{F}_{Q2}&=-\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

将式(c)和(d)代入式(e)，得

$$\delta_{12}=-\int\frac{y}{EI}\mathrm{d}s \tag{e}$$

在图 6－37b 中，另取一个参考坐标轴 $x'y'$：y' 轴与 y 轴重合，x' 轴与 x 轴间

的距离为 d。拱轴上任一点 D 的新坐标 y' 与坐标 y 有如下的关系：

$$y' = y + d$$
$$y = y' - d \tag{f}$$

将式(f)代入式(e)，得

$$\delta_{12} = -\int \frac{y'-d}{EI}\mathrm{d}s = \int -\frac{y'}{EI}\mathrm{d}s + d\int \frac{1}{EI}\mathrm{d}s$$

令 $\delta_{12}=0$，得

$$d = \frac{\int \frac{y'}{EI}\mathrm{d}s}{\int \frac{1}{EI}\mathrm{d}s} \tag{6-9}$$

现将以上讨论结果归纳如下：先取参考坐标轴 $x'y'$，由式(6-9)求出 d 值，这样，刚臂端点 O 的位置就确定了。然后，按图 6-37b 取基本体系，力法方程就简化为式(6-8)。这样，计算工作就大为简化。

这个方法中的一个重要环节，是根据式(6-9)来确定刚臂端点 O 的位置。为了对这个公式有一个形象的理解，我们作如下的比拟：图 6-38a 所示为实际给定的无铰拱；在图 6-38b 中另外设想一个窄条面积，以拱的轴线作为它的轴线，以拱的截面抗弯刚度的倒数$\left(即\frac{1}{EI}\right)$作为它的截面宽度。这个设想的面积称为弹性面积。从弹性面积中取出微段 $\mathrm{d}s$，微段的面积为 $\mathrm{d}A=\frac{\mathrm{d}s}{EI}$。因此，式

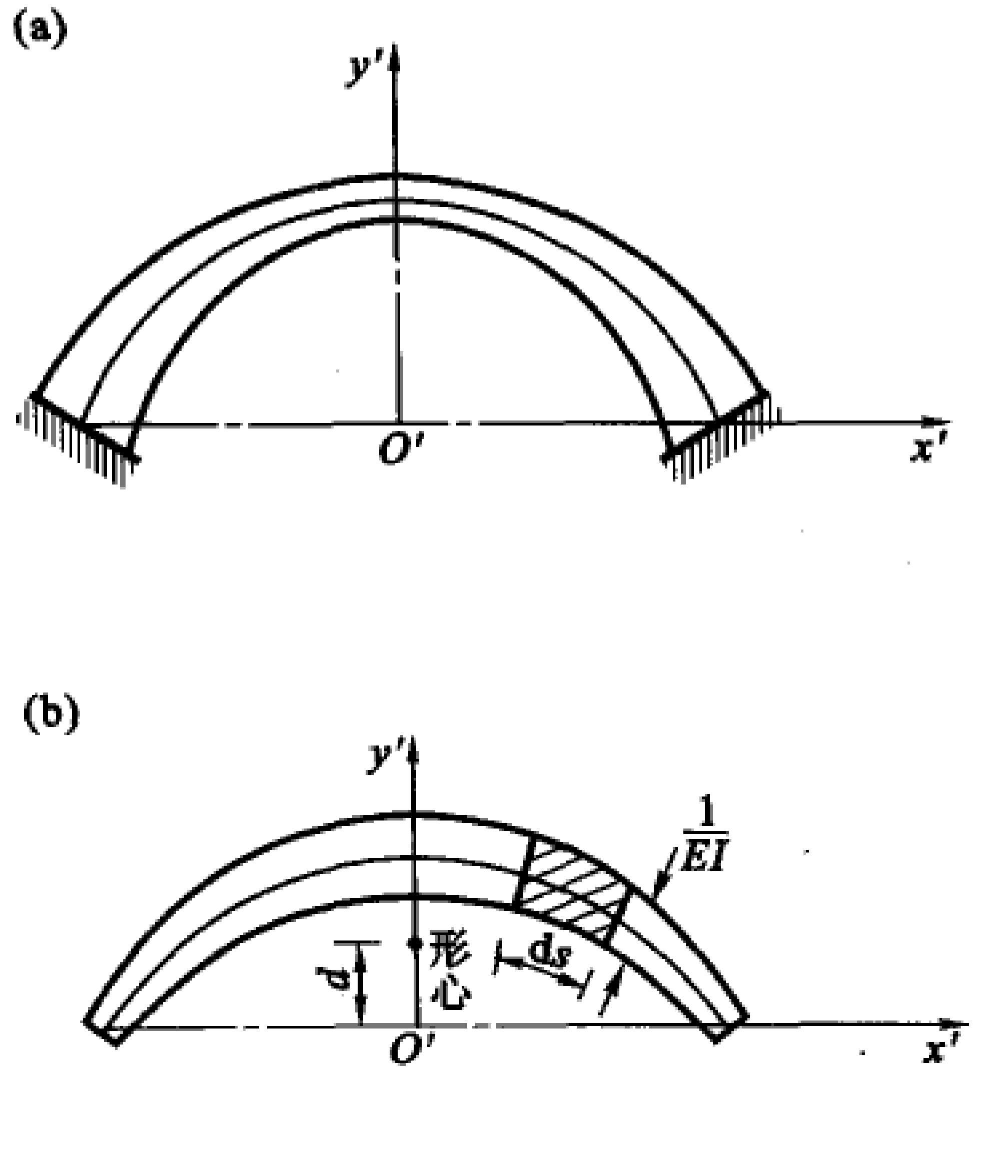


图 6-38

(6－9)中的积分$\int\frac{ds}{EI}$就是总弹性面积,积分$\int\frac{y'}{EI}ds$就是弹性面积对x'轴的面积矩,而式(6－9)中的d就是弹性面积的形心到x'轴的距离。由此得出结论:刚臂的端点O就是弹性面积的形心,称为弹性中心。

上面介绍的计算方法,通常称为弹性中心法。方法的要点是:先由式(6－9)确定弹性中心的位置;然后取带刚臂的基本体系,多余未知力作用在弹性中心;最后按力法方程(6－8)解出多余未知力。

下面给出力法方程中的系数和自由项的算式。

计算位移Δ_{1P}和δ_{ii}时,通常只考虑弯矩的影响;但计算δ_{22}时,有时需要考虑轴力的影响。因此,计算位移时通常采用下列算式:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{1P}&=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}ds,\quad \delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}ds\\ \Delta_{2P}&=\int\frac{\overline{M}_2M_P}{EI}ds,\quad \delta_{22}=\int\frac{\overline{M}_2^2}{EI}ds+\int\frac{\overline{F}_{N2}^2}{EA}ds\\ \Delta_{3P}&=\int\frac{\overline{M}_3M_P}{EI}ds,\quad \delta_{33}=\int\frac{\overline{M}_3^2}{EI}ds\end{aligned}\right\}\tag{6－10}$$

将$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、$\overline{M}_3$和$\overline{F}_{N2}$的表达式代入式(6－10),则得

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{1P}&=\int\frac{M_P}{EI}ds,\quad &\delta_{11}&=\int\frac{1}{EI}ds\\ \Delta_{2P}&=-\int\frac{yM_P}{EI}ds,\quad &\delta_{22}&=\int\frac{y^2}{EI}ds+\int\frac{\cos^2\varphi}{EA}ds\\ \Delta_{3P}&=\int\frac{xM_P}{EI}ds,\quad &\delta_{33}&=\int\frac{x^2}{EI}ds\end{aligned}\right\}\tag{6－11}$$

最后应指出,超静定拱(含两铰拱和无铰拱)许多是变截面的,又是曲杆,故求δ_{ij}和Δ_{iP}时常须用数值积分法分段求和计算。

例6－8 试求如图6－39a所示等截面圆弧无铰拱在均布竖向荷载$q=10$ kN/m作用下的内力。设跨度$l=10$ m,矢高$f=2.5$ m。

解 (1) 求圆拱的半径R和半拱的圆心角φ。

由直角三角形$O'AD$,得

$$R^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+(R-f)^2$$

所以
$$R=\frac{l^2+4f^2}{8f}=6.25\text{ m}$$

$$\sin\varphi_0=\frac{AD}{O'A}=\frac{l/2}{R}=0.8,\quad \cos\varphi_0=0.6,\quad \varphi_0=0.927\,3\text{ rad}$$

(2) 确定弹性中心O的位置

坐标轴x和y通过弹性中心O,另取参考坐标轴x'和y'通过圆心O'。拱轴

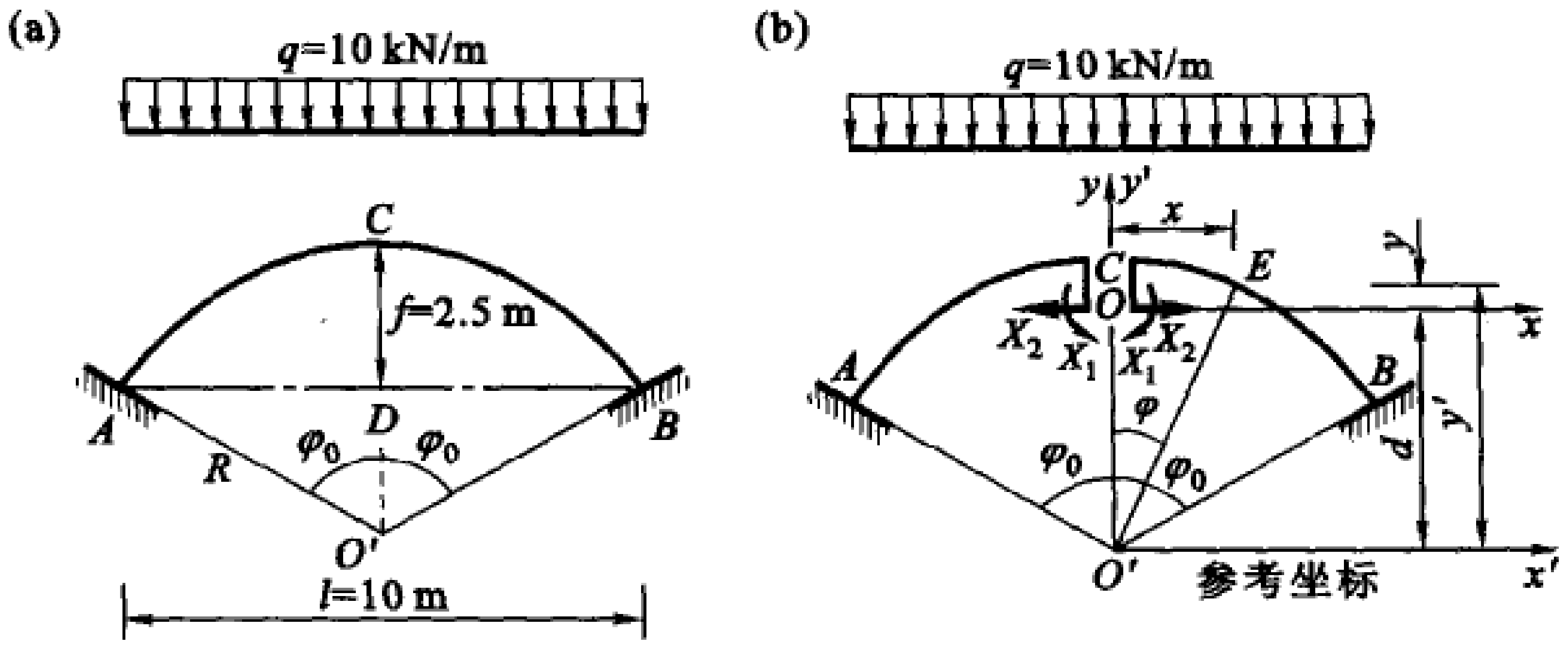


图 6-39

上任一点 E 的坐标 x, y 和 x', y' 可用其圆心角 φ 表示如下：

$$x' = x = R\sin\varphi$$

$$y' = y + d = R\cos\varphi$$

弹性中心 O 与圆心 O' 的距离为

$$d = \frac{\int \frac{y'}{EI}\mathrm{d}s}{\int \frac{\mathrm{d}s}{EI}} = \frac{2\int_0^{\varphi_0} R\cos\varphi \cdot R\mathrm{d}\varphi}{2\int_0^{\varphi_0} R\mathrm{d}\varphi} = \frac{R\sin\varphi_0}{\varphi_0} = 5.39\ \mathrm{m}$$

(3) 求系数 δ_{11} 和 δ_{22}

由于对称，$X_3 = 0$。计算位移时，只考虑弯矩的影响。在 $X_1 = 1$ 和 $X_2 = 1$ 分别作用下，基本结构的弯矩方程为

$$\overline{M}_1 = 1$$

$$\overline{M}_2 = -y = d - y' = R\left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi\right)$$

因此

$$EI\delta_{11} = \int \overline{M}_1^2 \mathrm{d}s = 2\int_0^{\varphi_0} R\mathrm{d}\varphi = 2R\varphi_0$$

$$\begin{aligned}
EI\delta_{22} &= \int \overline{M}_2^2 \mathrm{d}s = 2\int_0^{\varphi_0} R^2\left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi\right)^2 \cdot R\mathrm{d}\varphi \\
&= 2R^3\int_0^{\varphi_0}\left(\frac{\sin^2\varphi_0}{\varphi_0^2} - 2\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2R^3\left[\frac{\sin^2\varphi_0}{\varphi_0^2}\varphi - 2\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\sin\varphi + \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\right]_0^{\varphi_0} \\
&= 2R^3\left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2\varphi_0}{\varphi_0} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi_0\right)
\end{aligned}$$

将数字代入，得

$$EI\delta_{11}=1.855R$$

$$EI\delta_{22}=0.027\,0R^3$$

(4) 求自由项 Δ_{1P}和 Δ_{2P}

基本结构在荷载 q 作用下的弯矩方程为

$$M_P=-\frac{q}{2}x^2=-\frac{q}{2}R^2\sin^2\varphi$$

因此

$$EI\Delta_{1P}=\int\overline{M}_1M_P\mathrm{d}s=2\int_0^{\varphi_0}1\times\left(-\frac{q}{2}R^2\sin^2\varphi\right)\cdot R\mathrm{d}\varphi$$

$$=-qR^3\left[\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{\varphi_0}$$

$$=-qR^3\left(\frac{\varphi_0}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi_0\right)$$

$$EI\Delta_{2P}=\int\overline{M}_2M_P\mathrm{d}s=2\int_0^{\varphi_0}R\left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}-\cos\varphi\right)\times\left(-\frac{q}{2}R^2\sin^2\varphi\right)\cdot R\mathrm{d}\varphi$$

$$=-qR^4\left[\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\varphi_0}$$

$$=-qR^4\left(\frac{1}{2}\sin\varphi_0-\frac{1}{4\varphi_0}\sin\varphi_0\sin 2\varphi_0-\frac{1}{3}\sin^3\varphi_0\right)$$

将数字代入，得

$$EI\Delta_{1P}=-0.224qR^3$$

$$EI\Delta_{2P}=-0.022\,3qR^4$$

(5) 内力计算

多余未知力为

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{0.224qR^3}{1.855R}=0.121qR^2=47.1\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$X_2=-\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}}=\frac{0.022\,3qR^4}{0.027\,0R^3}=0.827qR=51.7\ \mathrm{kN}$$

由此求得

水平推力 $F_H=X_2=51.7\ \mathrm{kN}$

拱顶弯矩 $M_0=X_1-X_2(R-d)=47.1\ \mathrm{kN\cdot m}-51.7\ \mathrm{kN}\times(6.25\ \mathrm{m}-5.39\ \mathrm{m})=2.76\ \mathrm{kN\cdot m}$

拱脚弯矩 $M_A=M_B=X_1+X_2(d-R\cos\varphi_0)-\frac{q}{2}\times\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$=6.98\ \mathrm{kN\cdot m}$

(6) 讨论

与三铰拱比较,在同样荷载作用下,拱轴相同的三铰拱的推力为

$$F'_{\mathrm{H}}=\frac{M_C^0}{f}=\frac{ql^2}{8f}=\frac{10\ \mathrm{kN/m}\times(10\ \mathrm{m})^2}{8\times2.5\ \mathrm{m}}=50\ \mathrm{kN}$$

F_{H} 与 F'_{H} 非常接近,相对差值为$\frac{51.7\ \mathrm{kN}-50\ \mathrm{kN}}{50\ \mathrm{kN}}=3\%$。

例6-9 试求等截面圆弧形无铰拱在均匀水压力 p 作用下的内力(图 6-40a)。

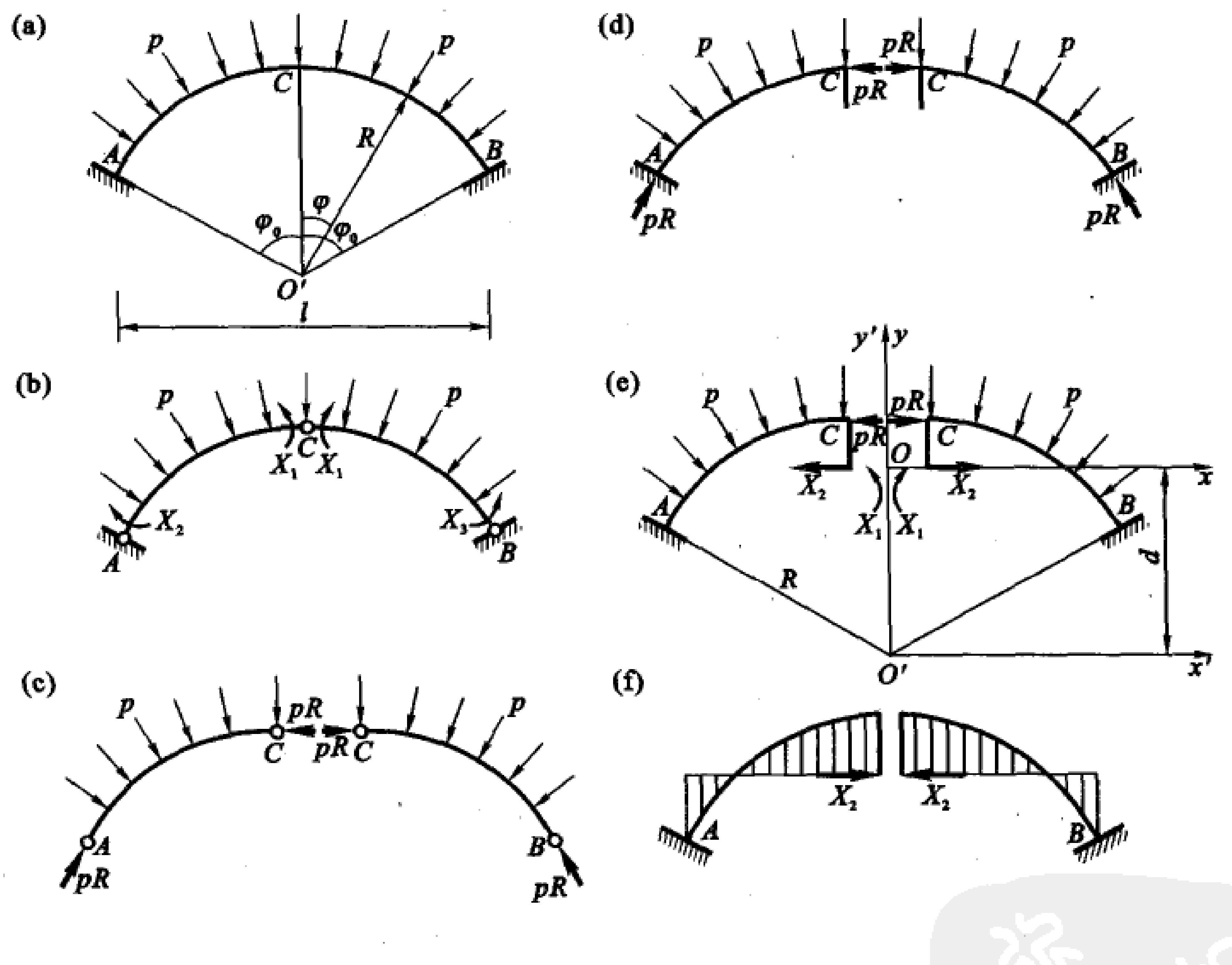


图 6-40

解 在计算本例无铰拱之前,先讨论三铰拱的受力状态。在均匀水压力 p 作用下,圆弧三铰拱轴线是合理轴线,弯矩和剪力都等于零,轴力等于常数,即 $F_{\mathrm{N}}=-pR$,其中 R 是圆弧的半径。

计算无铰拱时,将利用三铰拱的上述受力特点以简化计算。下面按两种情况加以讨论。

第一种情况,忽略轴向变形时的内力计算。

取三铰拱作为基本体系(图 6－40b)。基本结构在荷载作用下的受力状态非常简单(图 6－40c)：

$$M_{\mathrm{P}}=0$$

$$F_{\mathrm{QP}}=0$$

$$F_{\mathrm{NP}}=-pR$$

计算力法方程的自由项时，如果忽略轴力 F_{NP} 对位移的影响，再考虑到 M_{P} 和 F_{QP} 为零，可得

$$\Delta_{1\mathrm{P}}=0$$

$$\Delta_{2\mathrm{P}}=0$$

$$\Delta_{3\mathrm{P}}=0$$

因而多余未知力 X_1、X_2、X_3 全部为零。

由此可知，在忽略轴向变形的假定下，无铰圆拱在均匀水压力下的内力与三铰圆拱完全相同，即为图 6－40c 所示的无弯矩状态。

第二种情况，考虑轴向变形时的内力计算。

上面得出的无弯矩状态并不是无铰拱的精确解，而只是在忽略轴向变形的假设下得到的近似解。现在讨论精确计算。

计算时采用弹性中心法。同时，为了简化的目的，把精确的受力状态分为两部分：

(1) 不考虑轴向变形时荷载引起的受力状态——无弯矩状态。

(2) 单纯由轴向变形引起的受力状态——附加内力状态。

第一部分受力状态前已求出，如图 6－40c 所示，也可以改用图 6－40d 来表示，其中在截面 C 处，轴力为压力 pR，弯矩和剪力为零。

第二部分附加内力状态可看作是由弹性中心处的多余未知力 X_1 和 X_2 引起的(由于对称，$X_3=0$)。

将两部分受力状态合在一起，即得出基本体系总的受力状态，如图 6－40e 所示。注意，这里把总的受力状态分解成两部分时，分解的方式与通常有所不同。采用这种作法的目的是为了使基本结构的计算得到简化。

下面用弹性中心法求 X_1 和 X_2。弹性中心 O 与圆拱的圆心 O' 的距离为(参见例 6－8)

$$d=\frac{R\sin\varphi_0}{\varphi_0}$$

考虑轴向变形时，可得出下列位移：

$$\Delta_{1\mathrm{P}}=0$$

$$\Delta_{2\mathrm{P}}=\int\frac{\overline{F}_{\mathrm{N2}}F_{\mathrm{NP}}}{EA}\mathrm{d}s=\int\frac{\cos\varphi\cdot pR^2\,\mathrm{d}\varphi}{EA}=2\,\frac{pR^2}{EA}\sin\varphi_0$$

$$\delta_{22}=\int\frac{\overline{M}_2^2\mathrm{d}s}{EI}+\int\frac{\overline{F}_{N2}^2\mathrm{d}s}{EA}=\int\frac{y^2\mathrm{d}s}{EI}+\int\frac{\cos^2\varphi\mathrm{d}s}{EA}$$
$$=\frac{2R^3}{EI}\left(\frac{1}{2}\varphi_0+\frac{1}{4}\sin 2\varphi_0-\frac{\sin^2\varphi_0}{\varphi_0}\right)+$$
$$\frac{2R}{EA}\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi_0\right)$$

因此

$$X_1=0$$

$$X_2=-\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}}$$
$$=-\frac{pR\sin\varphi_0}{12\left(\frac{R}{h}\right)^2\left(\frac{1}{2}\varphi_0+\frac{1}{4}\sin 2\varphi_0-\frac{\sin^2\varphi_0}{\varphi_0}\right)+\left(\frac{1}{2}\varphi_0+\frac{1}{4}\sin 2\varphi_0\right)}\qquad\text{(a)}$$

其中 h 为拱截面的厚度。附加的弯矩图如图 6－40f 所示，最大弯矩发生在拱顶和拱脚处。

根据上面的讨论，可作如下说明：

(1) 对三铰拱来说，圆拱轴线是在均匀水压力下的合理轴线。因此，内力为无弯矩状态。对超静定拱来说，在均匀水压力下，如果忽略轴力的影响，则内力亦为无弯矩状态。如果考虑轴向变形，由于拱轴缩短的影响，圆拱将产生附加内力。这时，无铰拱内虽然出现弯矩，但数值不大，仍然接近于无弯矩状态。

同理，还可得出更一般的结论如下：如果在某一荷载作用下，三铰拱处于无弯矩状态，则在同一荷载作用下，与三铰拱轴线形式相同的无铰拱的内力接近无弯矩状态。

(2) 在上面的计算中，我们把总的受力状态分解为两部分：忽略轴向变形时的无弯矩状态及轴向变形引起的附加内力。这种作法有三个好处：

第一，计算上得到简化。

第二，借此可以了解拱的受力特点。

第三，能够更好的保证计算的精度。

关于第三点可以说明如下：

如果按照通常的作法，选用图 6－41 所示的基本体系，总的弯矩可表示为

$$M=M_P+(\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2)\qquad\text{(b)}$$

根据拱的特性，总弯矩 M 是一个小数，再考虑到图 6－41 中基本体系中的基本结构实际上是两个悬臂曲梁，在荷载 q 作用下，它的弯矩 M_P 应是一个大数。最后，由式(b)

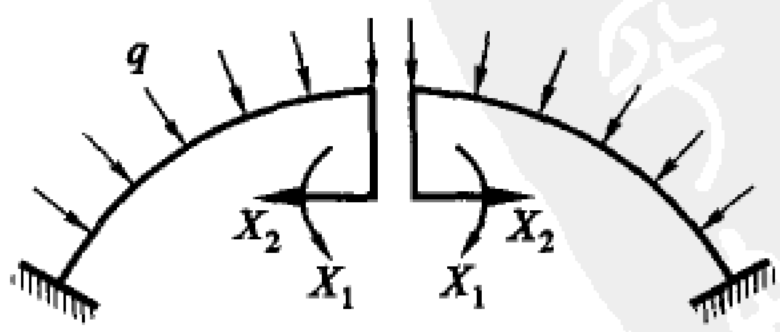


图 6－41

可知，($\overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2$)应是一个与 M_P 符号相反而数值相近的大数，而 M 是两个大数相减得出的一个小数。在这种情况下，如果求 X_1 和 X_2 时发生不大的误差，由式(b)求得的 M 可能会发生很大的误差，甚至会使 M 改变符号。因此，从理论上看，采用图 6－41 的基本体系是正确的，但从保证计算精度的角度来看，这种作法是不好的。

与此相比，如果选用图 6－40e 所示的基本体系，由于 $M_P = 0$，故

$$M = (\overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2)$$

这时不会出现两个大数相减得出一个小数的情况，因而计算精度得到了保证。

§6－8 支座移动和温度改变时的计算

超静定结构有一个重要特点，就是无荷载作用时，由于其他因素的作用也可以产生内力。支座移动、温度改变、材料收缩、制造误差等所有使结构发生变形的因素，都能使超静定结构产生内力。

超静定结构在支座移动和温度改变等因素作用下产生的内力，称为自内力。用力法计算自内力时，计算步骤与荷载作用的情形基本相同。下面通过例题说明详细的计算过程，并着重讨论它们与荷载作用时的不同点。

1. 支座移动时的计算

例 6－10 图 6－42a 所示为一等截面梁 AB，左端 A 为固定端，右端 B 为滚轴支承。如果已知左端支座转动角度为 θ，右端支座下沉位移为 a，试求梁中引起的自内力。

解 此梁为一次超静定，取支座 B 的竖向反力为多余未知力 X_1，基本体系为悬臂梁(图 6－42b)。

变形条件为基本体系在 B 点的竖向位移 Δ_1 应与原结构相同。由于原结构在 B 点的竖向位移已知为 a，方向与 X_1 相反，故变形条件可写出如下：

$$\Delta_1 = -a \tag{a}$$

另一方面，基本体系的位移 Δ_1 是由未知力 X_1 和支座 A 的转角 θ 共同作用产生的，因此式(a)可写成

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1c} = -a \tag{b}$$

上式左边的自由项 Δ_{1c} 是当支座 A 产生转角 θ 时在基本结构中产生的沿 X_1 方向的位移。由图 6－42c 得

$$\Delta_{1c} = -\theta l \tag{c}$$

系数 δ_{11} 则可由图 6－42d 中的 $\overline{M}_1$ 图求得

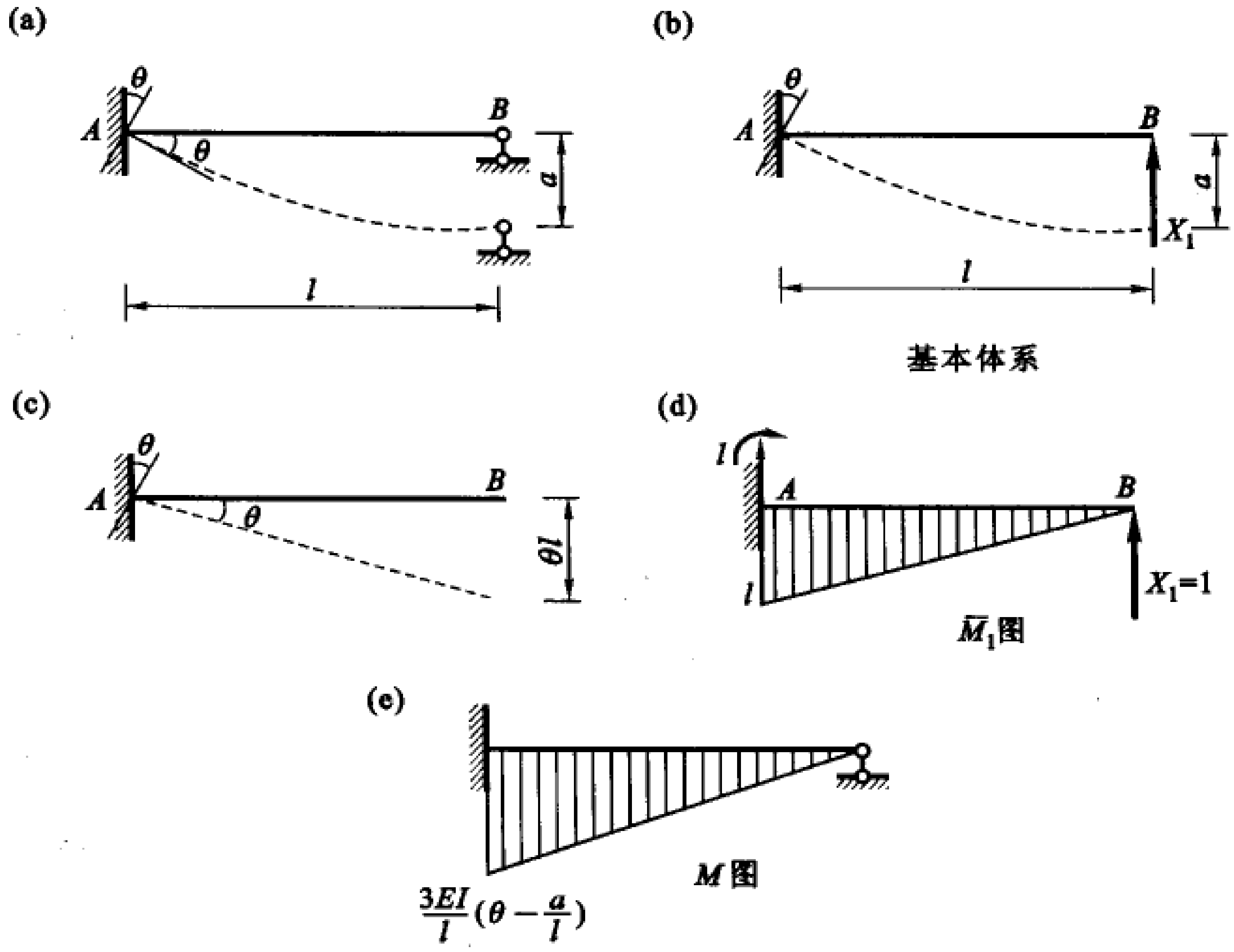


图　6-42

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\int\overline{M}_1^2\mathrm{d}x=\frac{l^3}{3EI} \tag{d}$$

将式(c)和(d)代入(b),得

$$\frac{l^3}{3EI}X_1-\theta l=-a \tag{e}$$

由此求得

$$X_1=\frac{3EI}{l^2}\left(\theta-\frac{a}{l}\right) \tag{f}$$

因为基本结构是静定结构,支座移动时在基本结构中不引起内力,因此内力全是由多余未知力引起的。弯矩叠加公式为

$$M=\overline{M}_1X_1 \tag{g}$$

M 图如图 6-42e 所示。

下面说明两点:

(1) 支座移动时的计算特点

与荷载作用时的计算相比,这里有如下的特点:

第一,由式(a)或(b)看出,力法方程的右边可不为零。

第二,由式(b)、(c)看出,力法方程的自由项是基本结构由支座移动产生的。

第三，由式(g)看出，内力全部是由多余未知力引起的。

第四，由式(f)和(g)看出，内力与杆件 EI 的绝对值有关。

(2) 取不同的基本结构计算

如果取简支梁作基本体系，取支座 A 的反力偶矩作为多余未知力 X_1（图 6-43a），则变形条件为简支梁在 A 点的转角应等于给定值 θ。因此，力法方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1c}=\theta$$

自由项 Δ_{1c} 是简支梁由于支座 B 下沉位移 a 而在 A 点产生的转角。由图 6-43b 可知

$$\Delta_{1c}=\frac{a}{l}$$

系数 δ_{11} 可由图 6-43c 中的 $\overline{M}_1$ 图求得

$$\delta_{11}=\frac{l}{3EI}$$

因此力法方程为

$$\frac{l}{3EI}X_1+\frac{a}{l}=\theta \qquad \text{(h)}$$

由此求得

$$X_1=\frac{3EI}{l}\left(\theta-\frac{a}{l}\right)$$

同样，可求出 M 图如图 6-42e 所示。

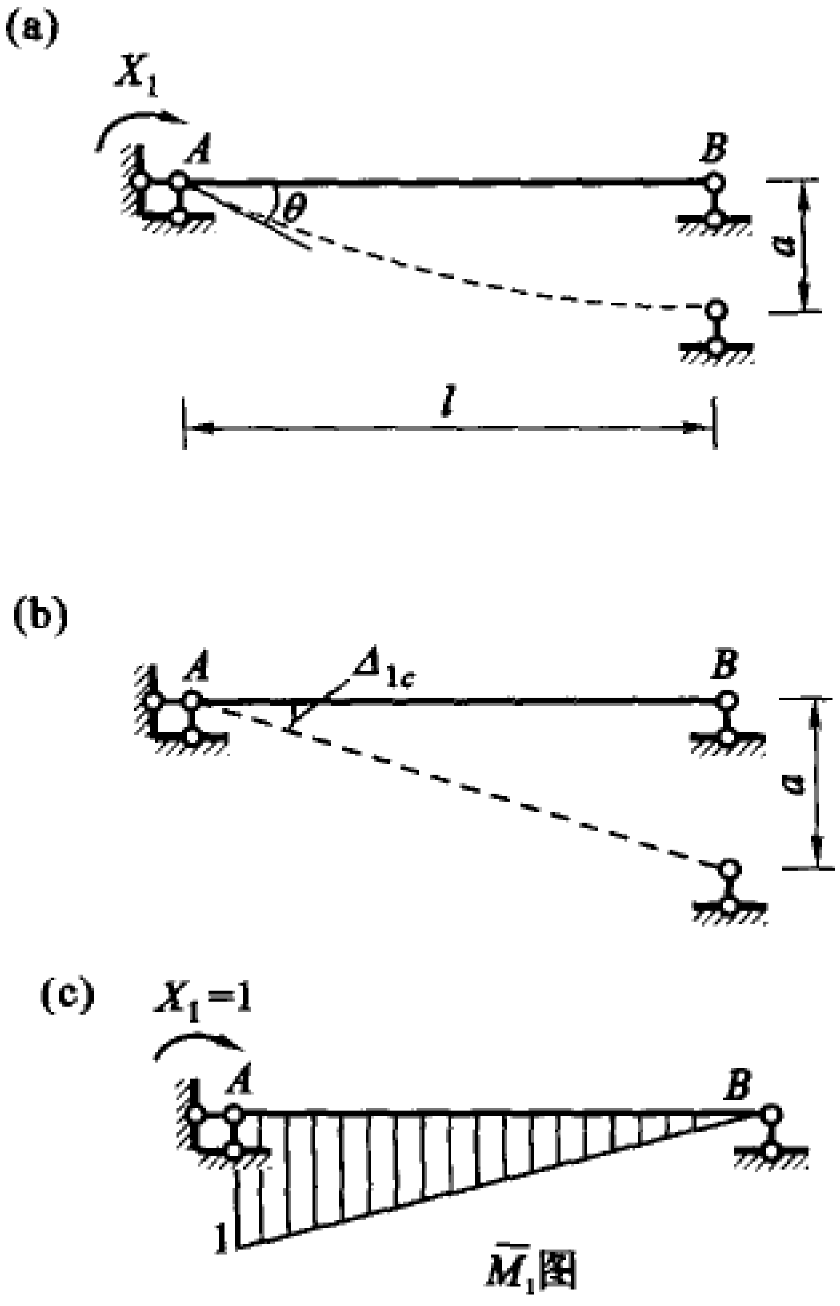


图 6-43

以上选取两种不同的基本结构，得出两个不同的力法方程(e)和(h)。每个力法方程中都出现两个支座位移参数 θ 和 a。但是，在式(e)中，θ 在左边，a 在右边；而在式(h)中，θ 在右边，a 在左边。一般说来，凡是与多余未知力相应的支座位移参数都出现在力法方程的右边项中，而其他的支座位移参数都出现在左边的自由项中。

如果按图 6-44 选取基本体系，这时，支座位移参数 θ 和 a 都不是与 X_1 相应的位移，因此它们都出现在力法方程的左边自由项中，而力法方程的右边项为零。

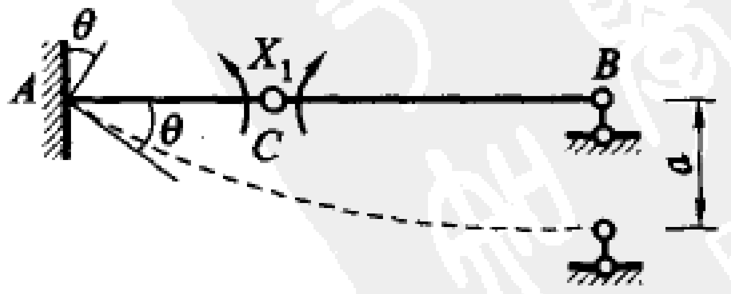


图 6-44

例 6-11 图 6-45a 所示为一等截面圆弧形无铰拱，设支座 B 发生水平位移 $\Delta_H=$

0.002 m。试求拱顶和拱脚处的截面弯矩。已知 $l=14$ m，$f=4$ m，$E=2.6\times 10^4$ MPa，矩形截面尺寸为 0.5 m×0.5 m。

解 (1) 求几何参数

$$R=\frac{l^2+4f^2}{8f}=8.125\ \text{m}$$

$$\sin\varphi_0=\frac{\frac{l}{2}}{R}=0.861\,5$$

$$\varphi_0=1.038\ \text{rad}$$

弹性中心与圆心的距离

$$d=\frac{R\sin\varphi_0}{\varphi_0}=\frac{8.125\ \text{m}\times 0.861\,5}{1.038}=6.75\ \text{m}$$

$$I=\frac{(0.5\ \text{m})^4}{12}=0.005\,2\ \text{m}^4$$

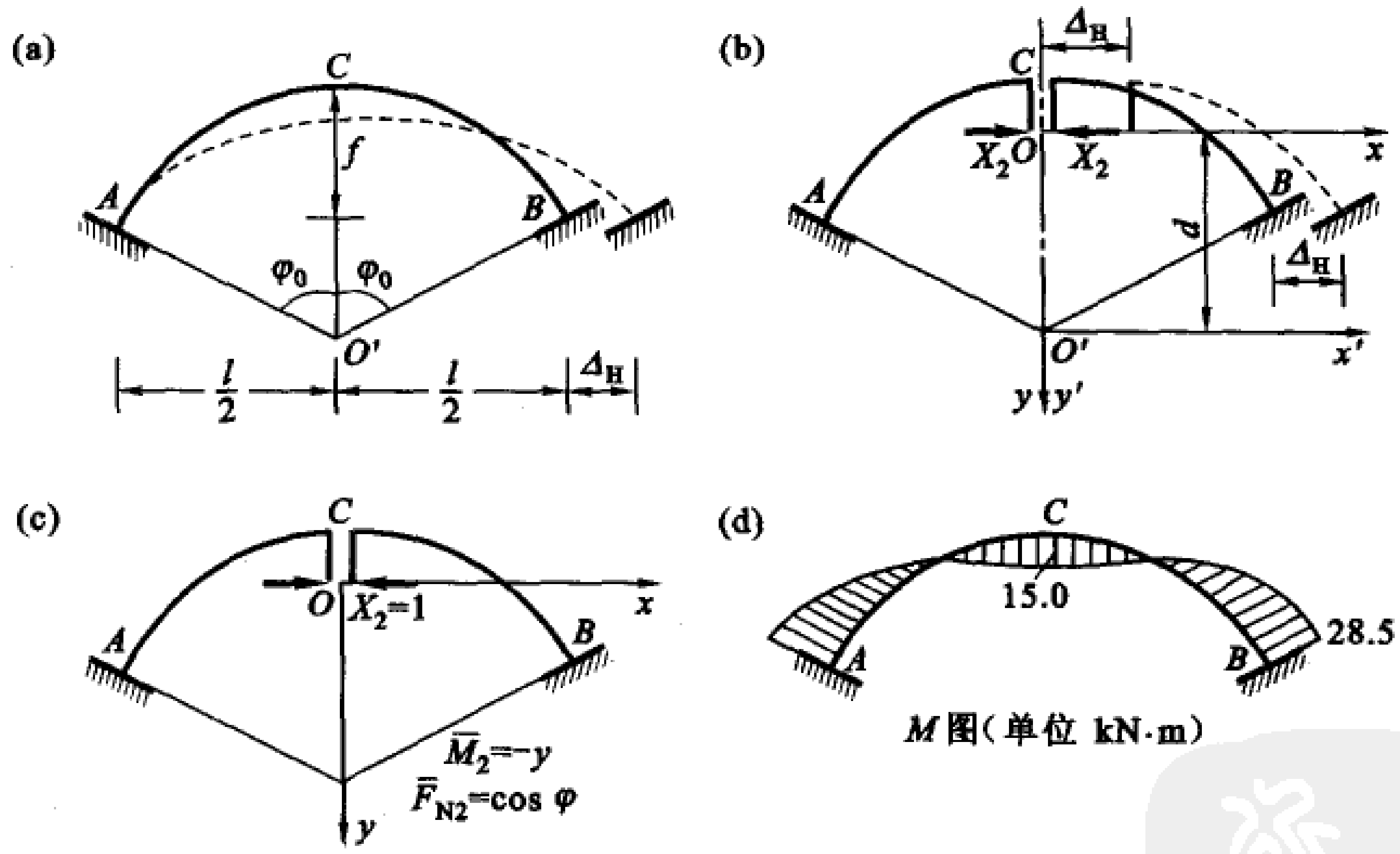


图 6-45

(2) 取基本体系

图 6-45b 为所取的基本体系。由于支座只发生水平位移，因此弹性中心处的弯矩 X_1 和竖向力 X_3 都等于零，只剩下一个水平力 X_2，相应的力法方程为

$$\delta_{22}X_2+\Delta_{2c}=0$$

(3) 求 δ_{22}、Δ_{2c} 和 X_2

求 δ_{22}时，考虑弯矩和轴力的影响(图 6-45c)，得

$$\delta_{22}=\int\frac{\overline{M}_2^2}{EI}ds+\int\frac{\overline{F}_{N2}^2}{EA}ds=\int\frac{y^2}{EI}ds+\int\frac{\cos^2\varphi}{EA}ds$$

$$=\frac{R^3}{EI}\left(\varphi_0+\cos\varphi_0\sin\varphi_0-\frac{2\sin^2\varphi_0}{\varphi_0}\right)+\frac{R}{EA}(\varphi_0+\cos\varphi_0\sin\varphi_0)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(24.64\ \mathrm{m}^3+11.99\ \mathrm{m}\ \frac{I}{A}\right)=\frac{24.9\ \mathrm{m}^3}{EI}$$

自由项 Δ_{2c}可直接由图 6-45b 得

$$\Delta_{2c}=-\Delta_H=-0.002\ \mathrm{m}$$

由力法方程，得

$$X_2=-\frac{\Delta_{2c}}{\delta_{22}}=0.002\ \mathrm{m}\times\frac{EI}{24.9\ \mathrm{m}^3}$$

$$=0.80\ \mathrm{m}^{-2}\times10^{-4}EI=10.9\ \mathrm{kN}$$

(4) 求内力

拱顶截面 $M_C=X_2(R-d)=10.9\ \mathrm{kN}\times(8.125\ \mathrm{m}-6.75\ \mathrm{m})$

$=15.0\ \mathrm{kN\cdot m}$

拱脚截面 $M_A=M_B=-X_2(f-R+d)$

$=-10.9\ \mathrm{kN}\times(4\ \mathrm{m}-1.375\ \mathrm{m})=-28.5\ \mathrm{kN\cdot m}$

弯矩图如图 6-45d 所示。

由上可见，无铰拱对于支座移动是很敏感的，不大的支座移动可以引起相当数量的内力。拱的抗弯刚度 EI 愈大，则引起的内力也愈大。因此，选用无铰拱这类结构形式时，应当注意地基情况，防止出现由于地基变形对拱产生的不利影响。

当支座发生竖向位移或转动时，内力计算可以同样进行。

2. 温度改变时的计算

例 6-12 图 6-46a 所示刚架，浇注混凝土时温度为 15 ℃，冬季混凝土外皮温度为 -35 ℃，内皮温度为 15 ℃。试求此时由于温度变化在刚架中引起的内力。各杆 EI 为常数，截面尺寸如图所示。混凝土的弹性模量为

$$E=2\times10^{10}\ \mathrm{MPa}$$

线膨胀系数为

$$\alpha=0.000\ 01\ ℃^{-1}$$

解 (1) 基本体系

此刚架为一次超静定，取基本体系如图 6-46b 所示。

(2) 力法方程

变形条件为基本体系在铰 C 处相对转角应等于零。这个位移是由温度变

化和未知力 X_1 共同产生的，即

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0$$

这里，自由项 Δ_{1t}是由于温度变化在基本结构中沿 X_1 方向产生的位移。

(3) 计算系数和自由项

系数 δ_{11}的求法与荷载作用时相同，但自由项 Δ_{1t}的求法不同。

施工温度和冬季温度的变化值：

轴线平均温度变化

$$t_0=\frac{1}{2}(15\ ℃-35\ ℃)-15\ ℃=-25\ ℃$$

内外温差

$$\Delta t=15\ ℃-(-35\ ℃)=50\ ℃$$

Δ_{1t}的计算公式为

$$\Delta_{1t}=\sum\alpha\frac{\Delta t}{h}\int\overline{M}_1\,\mathrm{d}s+\sum\alpha t_0\int\overline{F}_{N1}\,\mathrm{d}s$$

其中两个积分就是 $\overline{M}_1$ 图和 $\overline{F}_{N1}$图的面积。

作 $\overline{M}_1$ 和 $\overline{F}_{N1}$图(图 6-46c、d)，利用位移公式求得

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1^2\mathrm{d}s}{EI}=\frac{1}{EI}\times\left[(1\times8)\times1+2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times6\right)\times\frac{2}{3}\right]=\frac{12}{EI}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1t}&=\alpha\times\frac{50}{0.6}\times\left(1\times8+\frac{1\times6}{2}\times2\right)-\alpha\times25\times\left(\frac{1}{6}\times8\right)\\&=1\ 166\alpha-33.4\alpha=1\ 133\alpha\end{aligned}$$

在 $\overline{M}_1$ 图中，杆内部纤维受拉，温差 Δt 也是内部温度较高，故上式第一项取正号。在 $\overline{F}_{N1}$图中，横梁受拉，温度变化 t_0 为负，故上式第二项取负号。

(4) 解力法方程

由力法方程，得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=-\frac{1\ 133\ \alpha}{12/EI}=-94.2\alpha EI$$

(5) 作内力图

因为基本结构是静定结构，温度变化不引起内力，故内力都是由多余未知力引起的，即

$$\left.\begin{aligned}M&=\overline{M}_1X_1\\F_N&=\overline{F}_{N1}X_1\end{aligned}\right\}$$

内力图如图 6-46e、f 所示。

结合上例讨论如下：

计算结果表明，温度变化引起的内力与杆件的 EI 成正比。在给定的温度

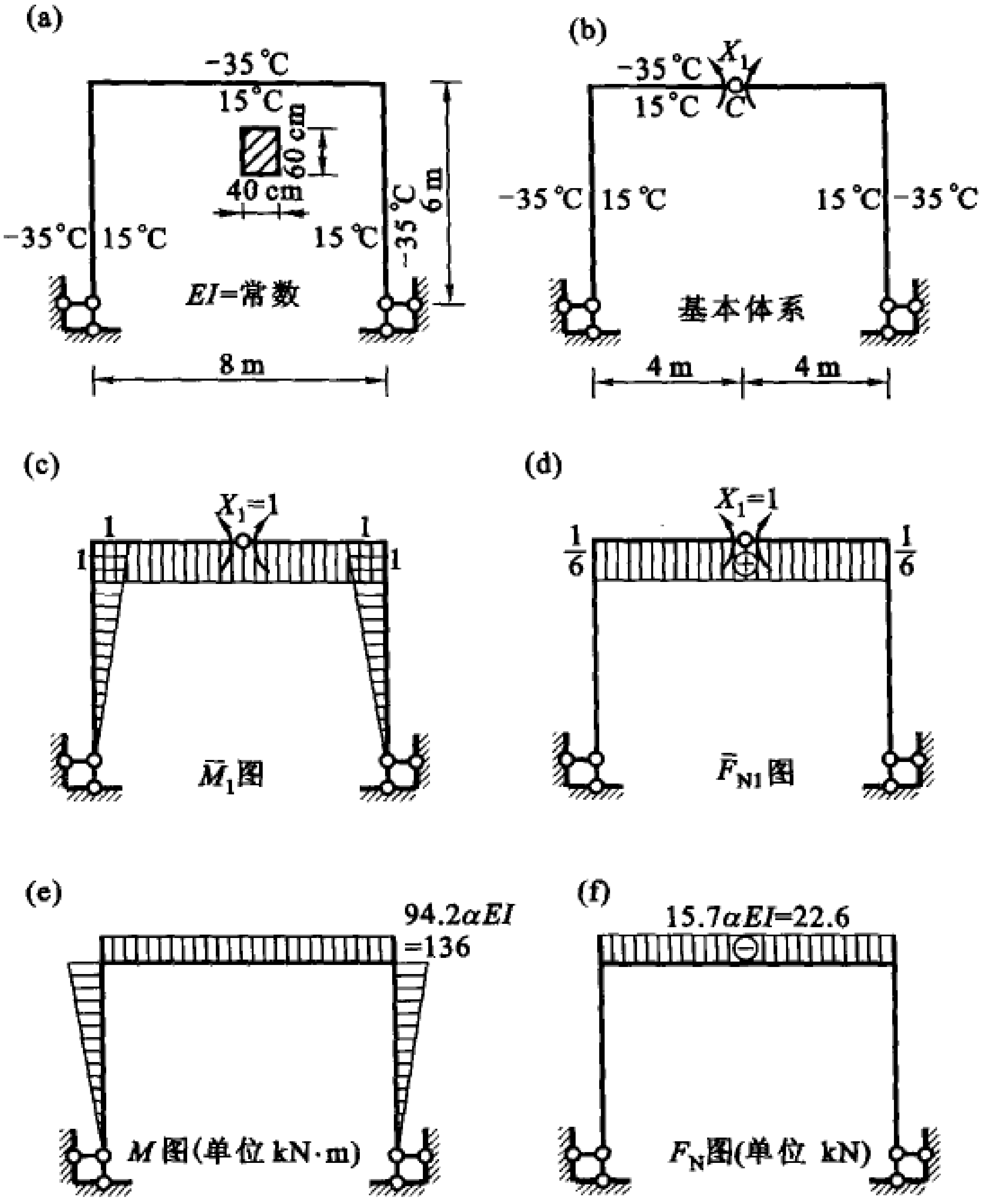


图 6-46

条件下，截面尺寸愈大，内力也愈大。所以，为了改善结构在温度作用下的受力状态，加大截面尺寸并不是一个有效的途径。

当杆件有温差 Δt 时，弯矩图的竖矩出现在降温面一边，使升温面产生压应力，降温面产生拉应力。因此，在钢筋混凝土结构中，要特别注意因降温可能出现裂缝。

例 6-13 试求图 6-47a 所示无铰圆拱由于均匀温度变化和混凝土收缩而产生的内力。

解 基本体系如图 6-47b 所示，通过刚臂把多余未知力放在弹性中心 O 上。因为对称，剪力 $X_3=0$。

由于内外两侧温度相同，Δt 为零，t_0 为常数。利用温度变化时的位移计算公式及下列各式：

$$\overline{M}_1=1,\quad \overline{F}_{N1}=0,\quad \overline{M}_2=-y,\quad \overline{F}_{N2}=-\cos\varphi$$

求得

$$\Delta_{1t}=\int\frac{\alpha\Delta t\overline{M}_1\mathrm{d}s}{h}=0$$

$$\Delta_{2t}=\int\frac{\alpha\Delta t\overline{M}_2\mathrm{d}s}{h}+\int\alpha t_0\overline{F}_{N2}\mathrm{d}s=-\alpha t_0\int\cos\varphi\mathrm{d}s=-\alpha t_0\int\mathrm{d}x=-\alpha t_0 l$$

所以

$$X_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=0$$

$$X_2=-\frac{\Delta_{2t}}{\delta_{22}}=\frac{\alpha t_0 l}{\delta_{22}}$$

拱的温度内力为

$$M=-X_2 y$$

$$F_N=-X_2\cos\varphi$$

$$F_Q=-X_2\sin\varphi$$

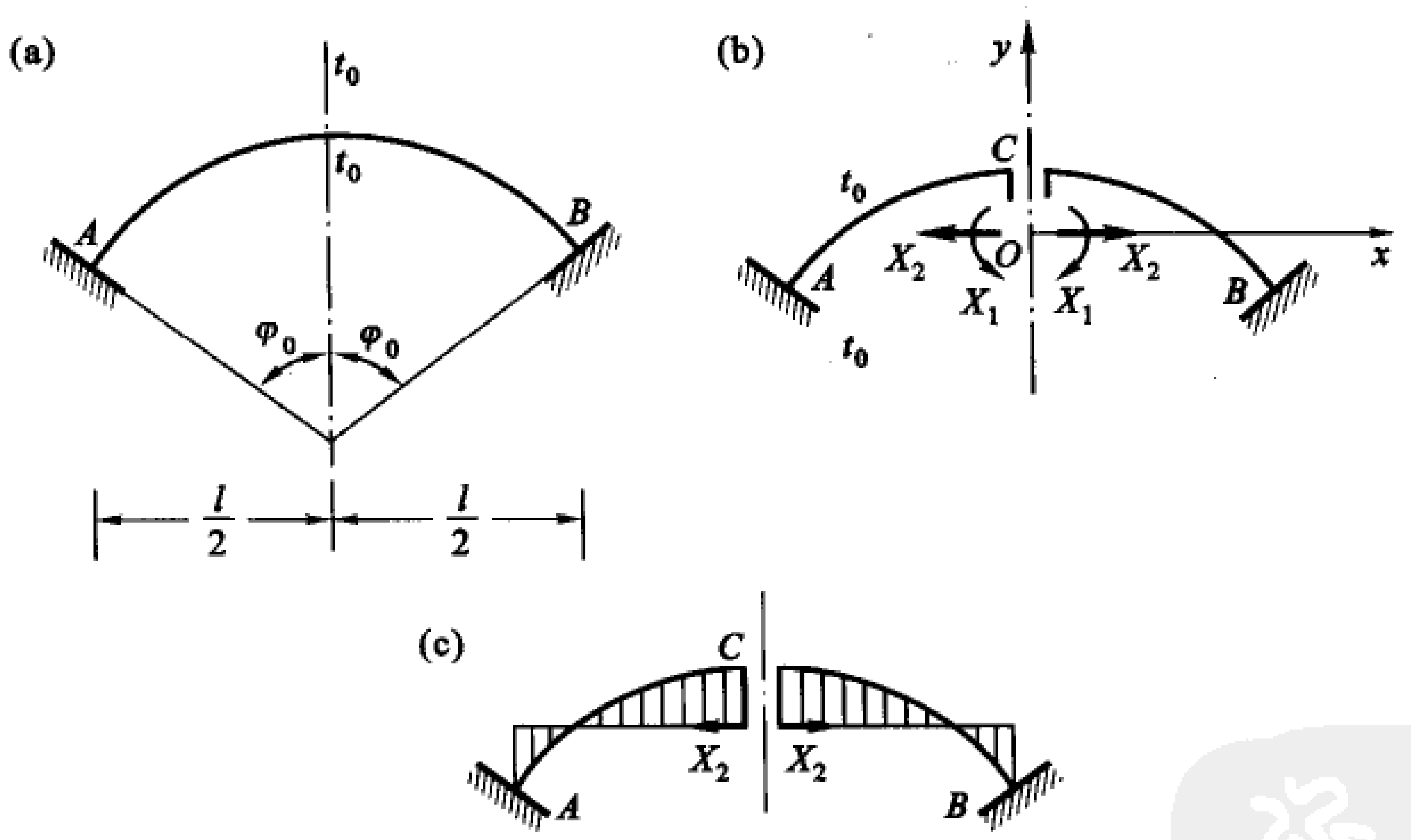


图 6-47

压力线为通过弹性中心的水平线。压力线与拱轴线之间的竖距与弯矩成正比(图 6-47c)。

结合上例讨论如下:

(1) 计算结果表明,拱的推力和内力与 $1/\delta_{22}$ 成正比,即与拱的刚度成正比。当温度升高时,轴力为压力;温度下降时,轴力为拉力。对于混凝土拱,应避免因降温产生的拉力而引起裂缝。

(2) 材料收缩的影响,可以当成温度均匀下降来考虑。普通混凝土凝结时的收缩系数约为0.000 25,线膨胀系数 $\alpha=0.000\ 01\ ℃^{-1}$,故混凝土收缩相当于降温25 ℃。工程实际中,因为混凝土是分段浇灌的,并考虑到混凝土的徐变性质,一般对收缩按降温10~15 ℃计算。

§6-9 超静定结构位移的计算

前面讨论过静定结构的位移计算,现在讨论超静定结构的位移计算。

以图6-48a的超静定梁为例,求在均布荷载作用下梁的中点 C 的挠度 f。

力法的基本思路是取静定结构作基本体系,利用基本体系来求原结构的内力。例如,可取图6-48b的静定梁作基本体系,得出弯矩图如图6-48c所示。现在要计算超静定结构的位移,仍采用同一个思路:利用基本体系来求原结构的位移。

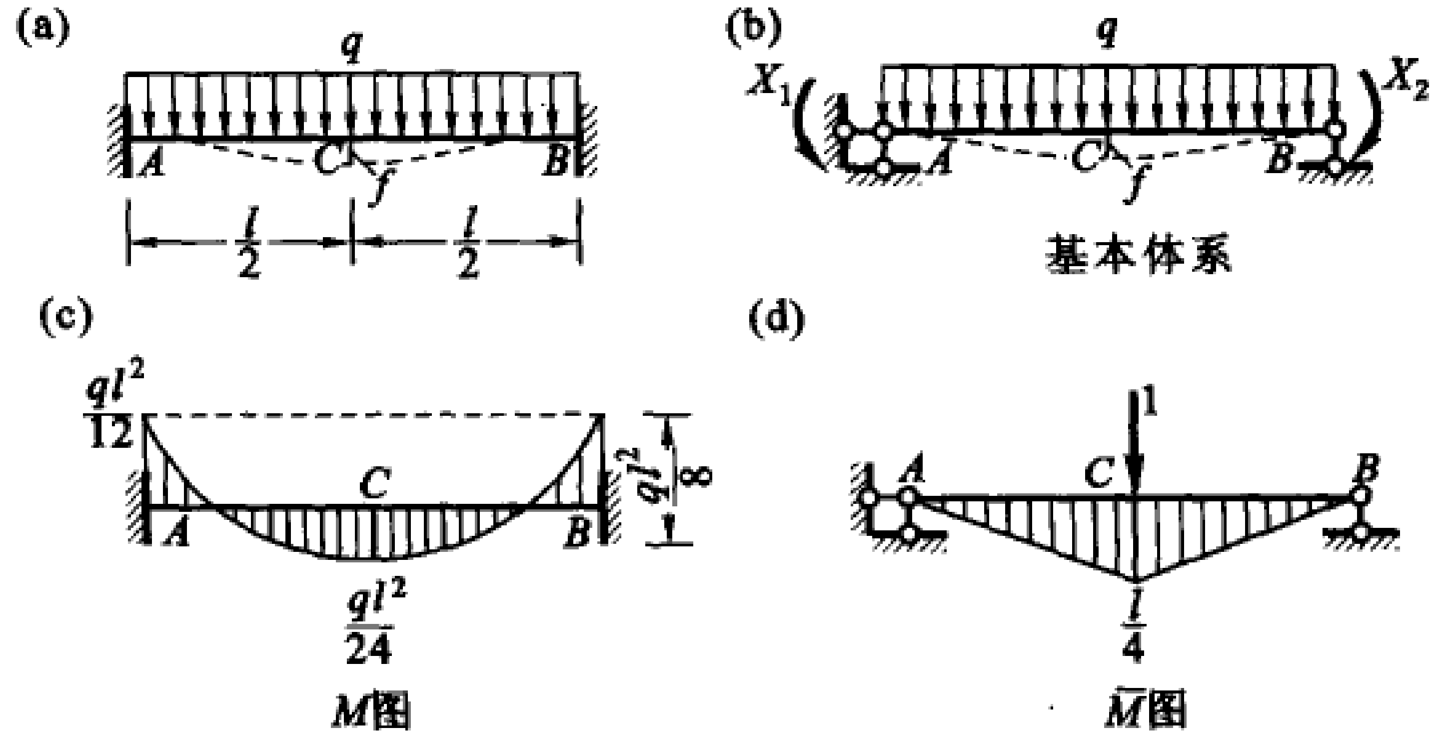


图 6-48

基本体系与原结构的唯一区别是把多余未知力由原来的被动力换成主动力。因此,只要多余未知力满足力法方程,则基本体系的受力与变形状态就与原结构完全相同,因而求原结构位移的问题就归结为求基本体系这个静定结构的位移问题。

为此,在基本结构的 C 点加单位竖向荷载,作出单位弯矩图(图6-48d)。利用 $\overline{M}$ 图和 M 图,进行图乘,得

$$f=\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s=\frac{2}{EI}\times\left[-\left(\frac{ql^2}{12}\times\frac{l}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2}\right)\times\left(\frac{5}{8}\times\frac{l}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{ql^4}{384EI}\ (\downarrow)$$

这就是利用基本体系求得的原结构 C 点的挠度 f。

由此可见,计算超静定结构的位移时,单位荷载可加在基本结构上。这样,单位内力图是静定的,绘制也非常简便。

由于计算超静定结构时可以采用不同的基本体系,因此计算同一位移时,可选用的单位内力图将不只是一种。例如,求两端固定梁的跨中位移 f 时,也可以采用图 6-49a 或 b 所示的单位弯矩图。所采用的单位弯矩图虽然不同,但求得的位移应是相同的。可以自行验算这个结论的正确性。

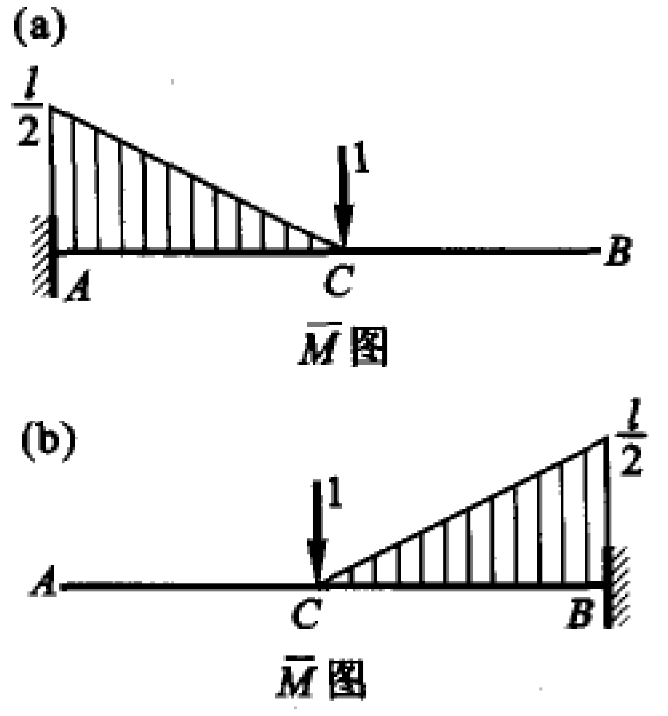


图 6-49

平面结构位移计算的一般公式为

$$\Delta = \sum \int (\overline{M}\kappa + \overline{F}_{N}\varepsilon + \overline{F}_{Q}\gamma_{0})\mathrm{d}s - \sum \overline{F}_{RK}c_{K}$$

对于静定和超静定结构都同样适用。下面专门给出超静定结构在荷载、支座移动和温度变化等因素作用下的位移公式。

(1) 荷载作用

设超静定结构在荷载作用下的内力为 M、F_{N}、F_{Q},这时杆件微段的变形为

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$\varepsilon = \frac{F_{N}}{EA}$$

$$\gamma_{0} = \frac{kF_{Q}}{GA}$$

因此,位移公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s + \sum \int \frac{\overline{F}_{N}F_{N}}{EA}\mathrm{d}s + \sum \int \frac{k\overline{F}_{Q}F_{Q}}{GA}\mathrm{d}s \tag{6-12}$$

这个公式与静定结构的公式形式上完全相同。但需注意,这里的 $\overline{M}$、$\overline{F}_{N}$、$\overline{F}_{Q}$ 可以是任一基本结构(也可以是原计算超静定结构内力时取用的基本结构)在单位力作用下的内力。

(2) 支座移动

设支座移动时超静定结构的内力为 M、F_{N}、F_{Q},这时杆件微段的变形仍为

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$\varepsilon = \frac{F_{N}}{EA}$$

$$\gamma_{0} = \frac{kF_{Q}}{GA}$$

因此,位移公式为

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{\overline{F}_{N}F_{N}}{EA}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Q}F_{Q}}{GA}\mathrm{d}s-\sum\overline{F}_{RK}c_{K}\tag{6-13}$$

(3) 温度变化

设温度变化时超静定结构的内力为 M、F_N、F_Q,这时,除内力引起弹性变形外,还有微段在自由膨胀的条件下由温度引起的变形,即

$$\kappa=\frac{M}{EI}+\frac{\alpha\Delta t}{h}$$

$$\varepsilon=\frac{F_N}{EA}+\alpha t_0$$

$$\gamma_0=k\frac{Q}{GA}$$

因此,位移公式为

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{\overline{F}_{N}F_{N}}{EA}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Q}F_{Q}}{GA}\mathrm{d}s+$$
$$\sum\int\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\sum\int\overline{F}_{N}\alpha t_0\mathrm{d}s\tag{6-14}$$

(4) 综合影响下的位移公式

如果超静定结构是在外荷载作用、支座移动、温度变化等因素的共同影响下,则位移公式为

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{\overline{F}_{N}F_{N}}{EA}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Q}F_{Q}}{GA}\mathrm{d}s+$$
$$\sum\int\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\sum\int\overline{F}_{N}\alpha t_0\mathrm{d}s-\sum\overline{F}_{RK}c_{K}\tag{6-15}$$

式中 M、F_N、F_Q 是超静定结构在全部因素影响下的内力,而 $\overline{M}$、$\overline{F}_N$、$\overline{F}_Q$ 和 $\overline{F}_R$ 则是基本结构在单位力作用下的内力和支座反力。

例 6-14 试求例 6-10 中的超静定梁由于支座位移引起的跨中挠度。

解 支座位移时在超静定梁中引起的弯矩 M 图如图 6-42e 所示。

作单位弯矩图时,选取两种基本结构:

(1) 取简支梁作基本结构,图 6-50a 所示为单位力作用下的 $\overline{M}$ 图和支座反力。

$$\Delta=\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s-F_{yB}(-a)=\frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{4}\cdot l\right)\times$$
$$\left[\frac{1}{2}\times\frac{3EI}{l}\left(\theta-\frac{a}{l}\right)\right]-\frac{1}{2}(-a)=\frac{3}{16}\theta l+\frac{5}{16}a$$

(2) 取悬臂梁作基本结构,图 6-50b 所示为单位力作用下的 $\overline{M}$ 图和支座反力。

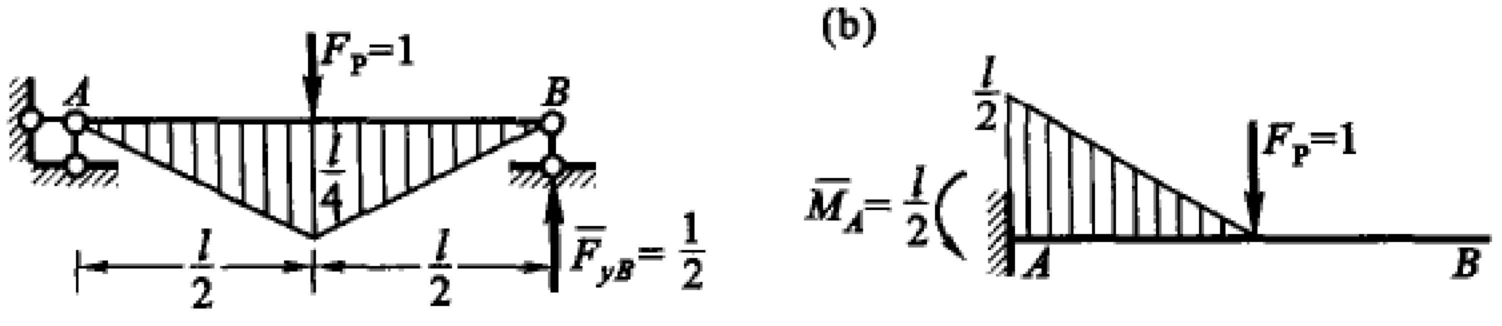


图　6-50

$$\Delta=\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s-\overline{M}_A(-\theta)=\frac{-1}{EI}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\right)\times\left[\frac{5}{6}\times\frac{3EI}{l}\left(\theta-\frac{a}{l}\right)\right]-\frac{l}{2}(-\theta)=\frac{3}{16}\theta l+\frac{5}{16}a$$

以上两种算法得到相同的结果。

§6-10　超静定结构计算的校核

超静定结构的计算过程较长，数字运算较繁，因而计算的校核工作很重要。关于校核工作，可以指出以下几点：

(1) 要重视校核工作，培养校核习惯。未经校核的计算书决不是正式的计算书。

(2) 校核并不是简单地重算一遍，要培养校核的能力，其中包括运用不同的方法进行定量校核的能力，运用近似估算方法或根据结构的力学性能对结果的合理性进行定性判断的能力。

(3) 要培养科学作风，计算书要整洁易读，层次分明。这样可少出差错，也便于校核。

(4) 校核工作要分阶段进行，要及时发现小错误，避免造成大返工。

关于力法计算的阶段校核，可以指出几点：

(1) 在计算前要核对计算简图和原始数据，要检查基本体系是否几何可变。

(2) 求系数和自由项时，先要校核内力图，并注意正负号。

(3) 方程解完后，应将解答代回原方程，检查是否满足。

(4) 最重要的是对最后内力图进行总检查、总校核。

关于最后内力图的总校核要从平衡条件和变形条件两个方面来进行。下面以图 6-51a、b、c 所示内力图为例加以说明。

1. 平衡条件的校核

从结构中任意取出的一部分，都应当满足平衡条件。常用的作法是截取结点或截取杆件。例如，如图 6-51d 所示，截取结点 B(杆端剪力和轴力在图中未

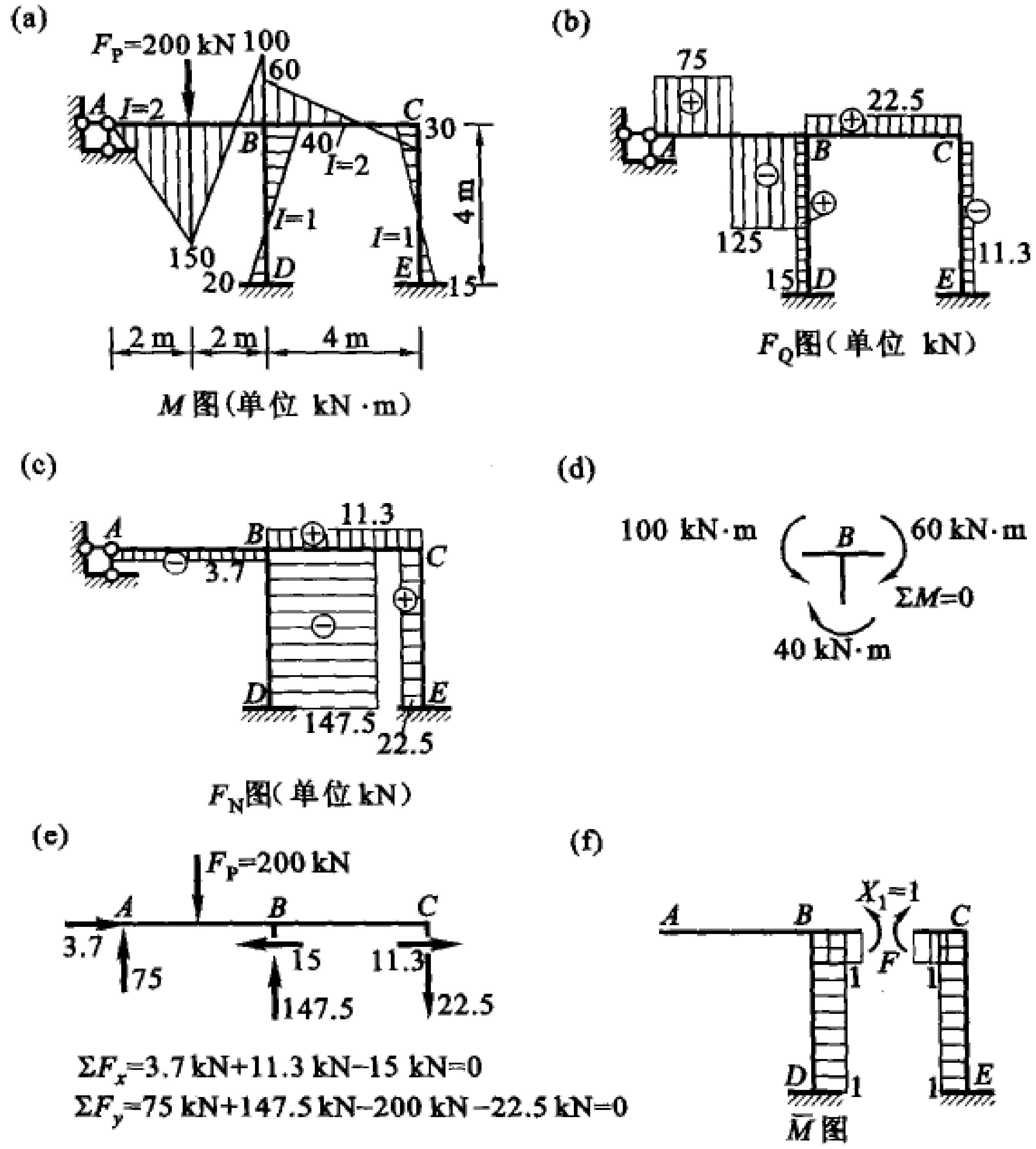


图　6－51

标出),检查是否满足平衡条件 $\sum M=0$;如图 6－51e,截取杆件 ABC(杆端弯矩在图中未标出),检查是否满足平衡条件 $\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$。从图中可以看出,以上的平衡条件是满足的。

2. 变形条件的校核

计算超静定结构的内力时,除平衡条件外,还应用了变形条件。因此,校核工作也应包括变形条件的校核。特别在力法中,计算工作量主要是在变形条件方面,因而校核工作也应以此为重点。

变形条件校核的一般作法是:任意选取基本结构,任意选取一个多余未知力 X_i,然后根据最后的内力图算出沿 X_i 方向的位移 Δ_i,并检查 Δ_i 是否与原结构中的相应位移(如给定值 a)相等,即检查是否满足下式:

$$\Delta_i = a \tag{6-16}$$

如果按式(6－15)求位移 Δ_i,则上式变为

$$\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{\overline{F}_{\mathrm{N}}F_{\mathrm{N}}}{EA}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{k\overline{F}_{\mathrm{Q}}F_{\mathrm{Q}}}{GA}\mathrm{d}s+$$
$$\sum\int\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\sum\int\overline{F}_{\mathrm{N}}\alpha t_0\mathrm{d}s-\sum\overline{F}_{\mathrm{R}K}c_K=a \qquad (6-17)$$

式中，$\overline{M}$、$\overline{F}_{\mathrm{N}}$、$\overline{F}_{\mathrm{Q}}$和 $\overline{F}_{\mathrm{R}}$为基本结构在单位力 $X_i=1$ 作用下的内力和支座反力。

如果原结构只受荷载作用，则式(6－16)的左边项 Δ_i 可按式(6－12)计算，右边项则为零，因此可写成

$$\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{\overline{F}_{\mathrm{N}}F_{\mathrm{N}}}{EA}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{k\overline{F}_{\mathrm{Q}}F_{\mathrm{Q}}}{GA}\mathrm{d}s=0 \qquad (6-18)$$

例如，为了校核图 6－51a 所示的 M 图，可选用图 6－51f 所示的基本结构，并取杆 BC 中任一截面 F 的弯矩作为多余未知力 X_1。这时，在单位力 $X_1=1$ 作用下，只有封闭框形 $DBCE$ 部分产生弯矩 $\overline{M}=1$。因此，变形条件(6－18)为

$$\oint\frac{M}{EI}\mathrm{d}s=0 \qquad (6-19)$$

由此得出结论，当结构只受荷载作用时，沿封闭框形的$\frac{M}{EI}$图形的总面积应等于零。

现在利用这个结论来检查图 6－51a 中的 M 图。沿 $DBCE$ 部分进行积分，其值为

$$\oint\frac{M}{I}\mathrm{d}s=\frac{1}{1}\times\left(-\frac{20\ \mathrm{kN\cdot m}\times4\ \mathrm{m}}{2}+\frac{40\ \mathrm{kN\cdot m}\times4\ \mathrm{m}}{2}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{60\ \mathrm{kN\cdot m}\times4\ \mathrm{m}}{2}+\frac{30\ \mathrm{kN\cdot m}\times4\ \mathrm{m}}{2}\right)+$$
$$\frac{1}{1}\times\left(-\frac{15\ \mathrm{kN\cdot m}\times4\ \mathrm{m}}{2}+\frac{30\ \mathrm{kN\cdot m}\times4\ \mathrm{m}}{2}\right)$$
$$=-130\ \mathrm{kN\cdot m^2}+170\ \mathrm{kN\cdot m^2}\neq0$$

可见，这个 M 图未能满足变形条件，因此计算结果显然是错误的。

例 6－15　试对例 6－10 的计算结果(图 6－42e 中的 M 图)进行校核。

解　选取图 6－42b 所示的基本体系，单位弯矩图如图 6－42d 所示。这时的变形条件可由式(6－17)写出如下：

$$\frac{1}{EI}\int\overline{M}M\mathrm{d}s-\overline{M}_A\theta=-a \qquad (6-20)$$

现在利用式(6－20)来检查图 6－42e 中的 M 图。先计算式(6－20)的左边项

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\times\left[\frac{2}{3}\times\frac{3EI}{l}\left(\theta-\frac{a}{l}\right)\right]-l\cdot\theta=-a$$

可见，图 6－42e 中的 M 图满足变形条件(6－20)。

*§6－11 用求解器进行力法计算

为了加深和加强力法的概念，本节讨论如何用求解器进行力法的辅助计算。特别注意的是，用求解器进行力法计算时，可以打破传统上将基本体系取为静定结构的做法，直接取超静定结构作为基本体系。

详细内容见所附光盘相应章节。

§6－12 小 结

掌握力法的基本原理，主要是了解力法的基本未知量、力法的基本体系和力法的基本方程这三个环节。在力法中，把多余未知力的计算作为突破口。突破了这个关口，超静定问题就转化为静定问题。计算多余未知力的方法是：首先把多余约束去掉，以暴露多余未知力；然后使多余约束弥合，以解出多余未知力。前者是取基本体系，后者是列力法方程。

计算超静定结构时，要同时运用平衡条件和变形条件。这里，要着重了解变形条件的运用：对于每一个超静定结构，它有几个独立的变形条件？每个变形条件的几何意义是什么？如何考虑荷载、温度和支座位移等不同因素的影响？变形条件如何用方程来表示？方程中每一项代表什么意义？如何求出方程中的系数和自由项？

除对变形条件应理解透彻外，还要应用前几章的原理，即

(1) 利用第2章的几何构造分析方法来确定超静定次数和判定基本结构是否几何不变。

(2) 利用静定结构的计算方法作基本结构的内力图。

(3) 利用第5章计算位移的方法求力法方程的系数和自由项。

这三方面应当作适当的复习，并通过力法计算得到巩固和提高。

还要注意，拱结构是曲杆，计算有些特点。计算位移时，忽略轴力影响、剪力影响或曲率影响是有一定条件的；同时图乘法不能采用，因而需要直接积分或采用数值积分。

为了使计算简化，要善于选取合适的基本体系，会利用对称性。

以上是本章的主要内容，应当通过较多的练习牢固地掌握。此外，还要记住，计算超静定结构的位移时，虚设的单位力可以加在任意基本结构上。

最后指出，本章所讨论的超静定结构都属于线性变形体系。对于非线性变

形体系，力法的概念和方法也可以应用。我们仍然可以选取基本体系和基本未知量，并根据其应满足的变形条件(例如 $\Delta_1=0$、$\Delta_2=0$ 等)建立力法方程，但这时不能应用叠加原理，因而不能列出式(6－4)那样的典型方程。同时，在计算基本体系的位移时也不能采用线性变形体系的位移公式。

顺便指出，本章习题6－1a、b、h，6－3a，6－5a，6－8a可供辅导课选用参考。思考题6－23，6－24及习题6－24，6－25是综合题，有的要借助于求解器求解，供参考。

§6－13　思考与讨论

§6－2　思考题

6－1　用力法解超静定结构的思路是什么？什么是力法的基本体系、基本结构和基本未知量？为什么首先要计算基本未知量？基本体系与原结构有何异同？基本体系与基本结构有何不同？

6－2　力法方程的物理意义是什么？

6－3　试从物理意义上说明，为什么力法方程中的主系数必为大于零的正值，而副系数可为正值或负值或为零。

§6－3　思考题

6－4　为什么静定结构的内力状态与 EI 无关？为什么超静定结构的内力状态与 EI 有关？

6－5　为什么在荷载作用下超静定刚架的内力状态只与各杆 EI 的相对值有关，而与其绝对值(真值)无关？

§6－4　思考题

6－6　试比较在荷载作用下用力法计算刚架、排架、桁架和组合结构的异同。

6－7　在超静定桁架、组合结构及厂房排架中，用撤去多余链杆的基本体系代替切开多余链杆的基本体系，这种算法是否正确？二者的力法方程有何异同？

§6－5　思考题

6－8　什么称为对称结构？为什么利用对称性可以使计算得到简化？

6－9　利用对称性简化结构计算有哪几种作法？

§6－6　思考题

6－10　图6－33中的两铰拱受半跨均布荷载 q 作用，拱轴 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$，试取三铰拱为基本结构，计算其推力并画弯矩图。

讨论：三铰抛物线拱受半跨均布荷载 q 作用，可分为对称作用的全跨均布荷载 $\frac{q}{2}$，和反对称作用的均布荷载 $\frac{q}{2}$。前者无弯矩，后者弯矩为反对称，X_1 是对称的；故 $\Delta_{1P}=0$，$X_1=0$。

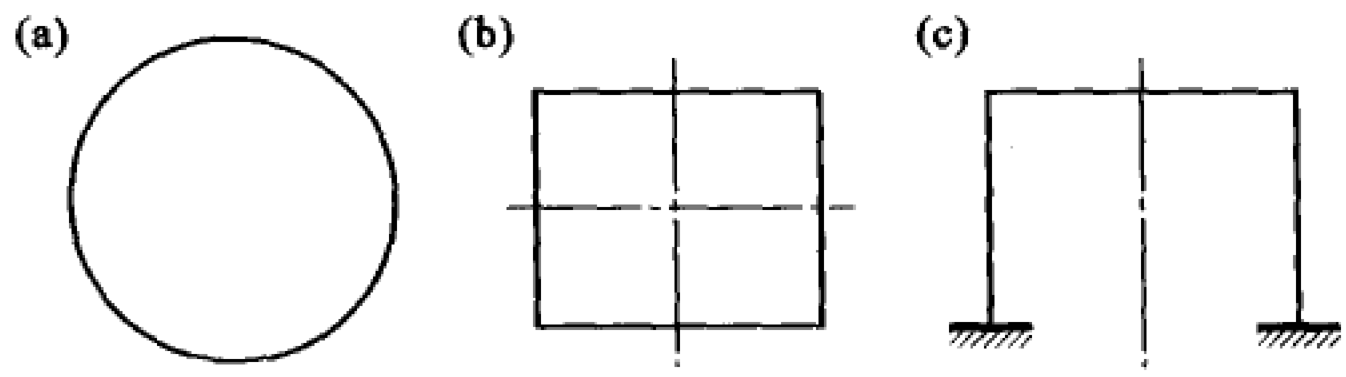
6－11 能不能说两铰拱在均布荷载 q 作用下的合理轴线仍是抛物线 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$？能不能说在均布荷载 q 作用下，$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$形状的三铰拱与同样形状的两铰拱实际受力状态是一样的？为什么？

§6－7 思考题

6－12 计算拱的位移时，M、F_Q、F_N的影响哪个重要？哪个次要？在什么情况下可以忽略 F_Q和 F_N的影响？

6－13 什么称为弹性中心？怎样确定弹性中心的位置？弹性中心法的好处是什么？

除了无铰拱外，下图这些结构可以用弹性中心法求解吗？用弹性中心法求解这类结构时，有什么共同的特点？



思考题 6－13 图

§6－8 思考题

6－14 结构上没有荷载就没有内力，这个结论在什么情况下适用？在什么情况下不适用？

6－15 用力法计算超静定结构时，考虑支座移动、温度改变等因素的影响与考虑荷载作用的影响，二者有何异同？

6－16 图 a 所示刚架，支座 A 发生转角 θ 和竖向位移 a，试用以下不同的基本体系求解。

(1) 基本体系中不保留支座位移(图 b)。

(2) 基本体系中保留全部支座位移(图 c)。

(3) 基本体系中保留部分支座位移(图 d)。

§6－9 思考题

6－17 计算超静定结构的内力时，在什么情况下只需给出 EI(或 EA)的相对值，在什么情况下需给出 EI 的绝对值？为什么？

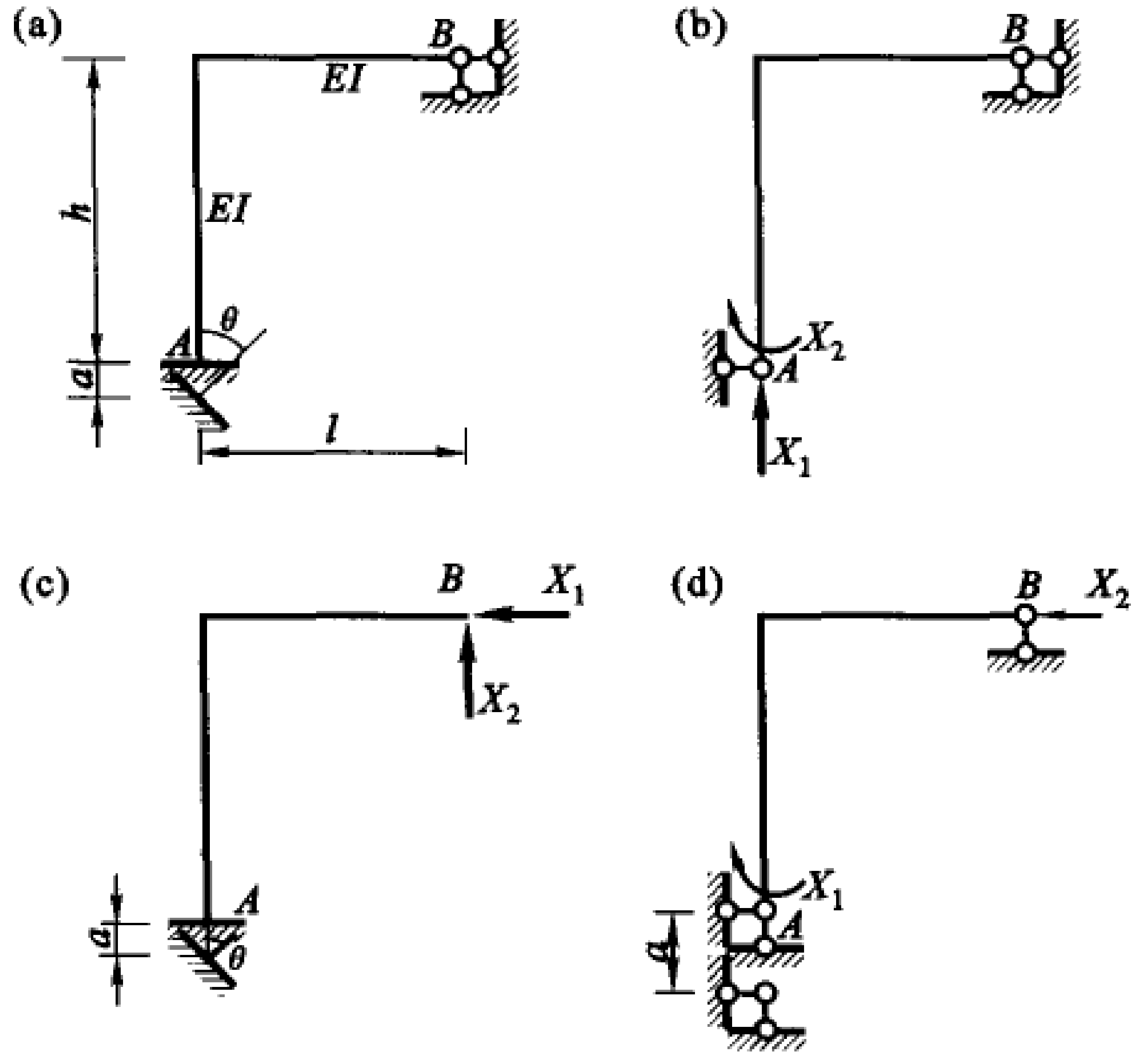
6－18 计算超静定结构的位移与计算静定结构的位移，二者有何异同？

6－19 为什么计算超静定结构的位移时单位荷载可加在基本结构上？

6－20 计算超静定结构的位移时，各杆的 EI 能用相对值吗？为什么？

§6－10 思考题

6－21 变形条件(6－19)的物理意义是什么？为什么用力法计算超静定结构的结果必须进行变形条件的校核？



思考题 6－16 图

6－22　计算超静定结构的位移不能用各杆 EI(或 EA)的相对值,而需用其绝对值;若用变形条件校核荷载产生的内力图时,为什么又可以用 EI 的相对值？用变形条件校核支座移动或温度变化产生的内力图时能否用 EI(或 EA)的相对值？为什么？

综合思考题

6－23　图示刚架,上梁的 I_2 是下梁 I_1 的 s 倍,即 $I_2=sI_1$。

(a) 试用超静定的基本结构按只有一个基本未知力 X_1 求解,与用静定的基本结构求解,比较二者的计算过程和结果。

(b) 当 s 变化时(如:$s=0.1,1,10$),求内力图的变化。

讨论:(1) 本题可选用超静定的基本结构,按只有一个基本未知力 X_1 求解。

① 超静定结构取静定结构作基本结构是因为静定结构可解(已知);当某超静定结构的内力和位移可解(已知)时,则也可以用它作为基本结构。

② 本题因为对称,竖杆无弯矩、剪力,而只有轴力。切断此竖杆,其轴力可取为基本未知力 X_1,此时的基本结构是超静定的。

③ 利用变形协调条件,可建立力法方程,求得 X_1。

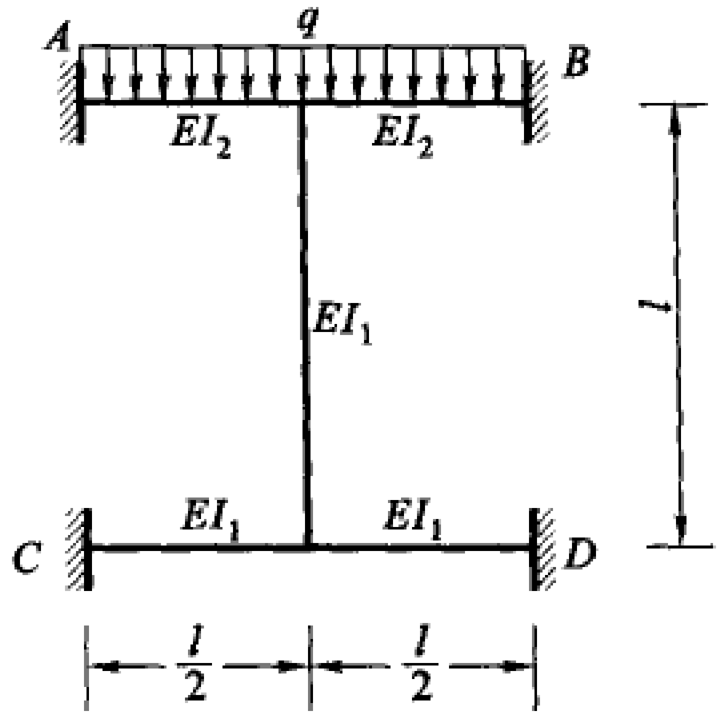
(2) 试分析结构的内力如何随杆件的刚度比而变化。

① 当 $EI_1\to 0$ 时,只有 AB 梁起作用,此时结构变为两端固定梁 AB。

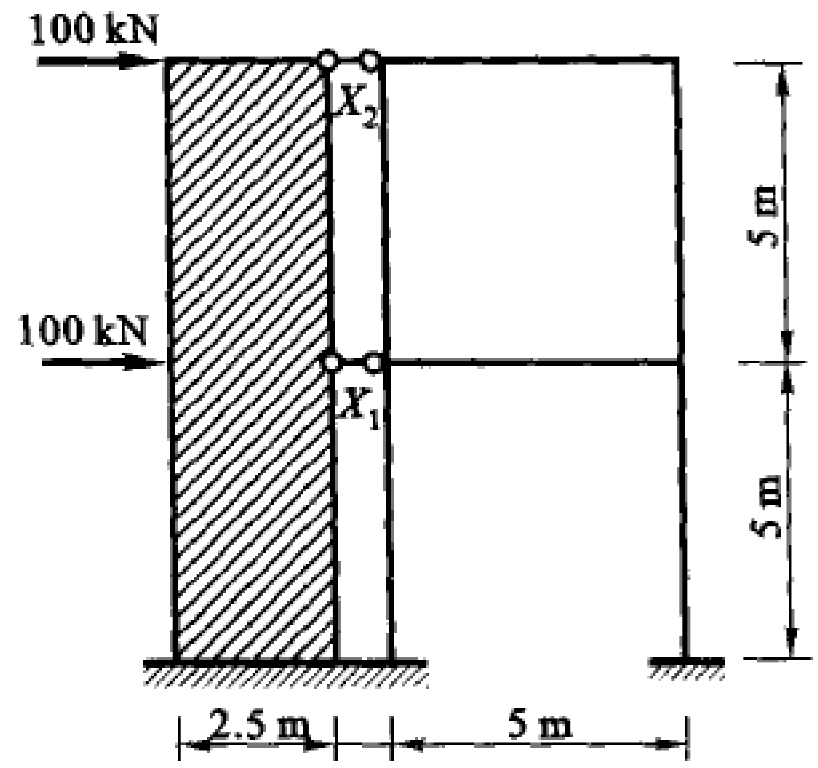
② 当 $EI_1\to\infty$ 时,上梁 AB 变为中间固定的两跨梁。

建议有兴趣的读者自己完成此题。

6－24　试求图示刚架－剪力墙组合体系的内力。已知剪力墙厚度为 0.12 m,宽度为 2.5 m;刚架柱截面尺寸为 0.4 m×0.6 m,横梁为无限刚性。材料的弹性模量相同,均为 E。



思考题 6－23 图



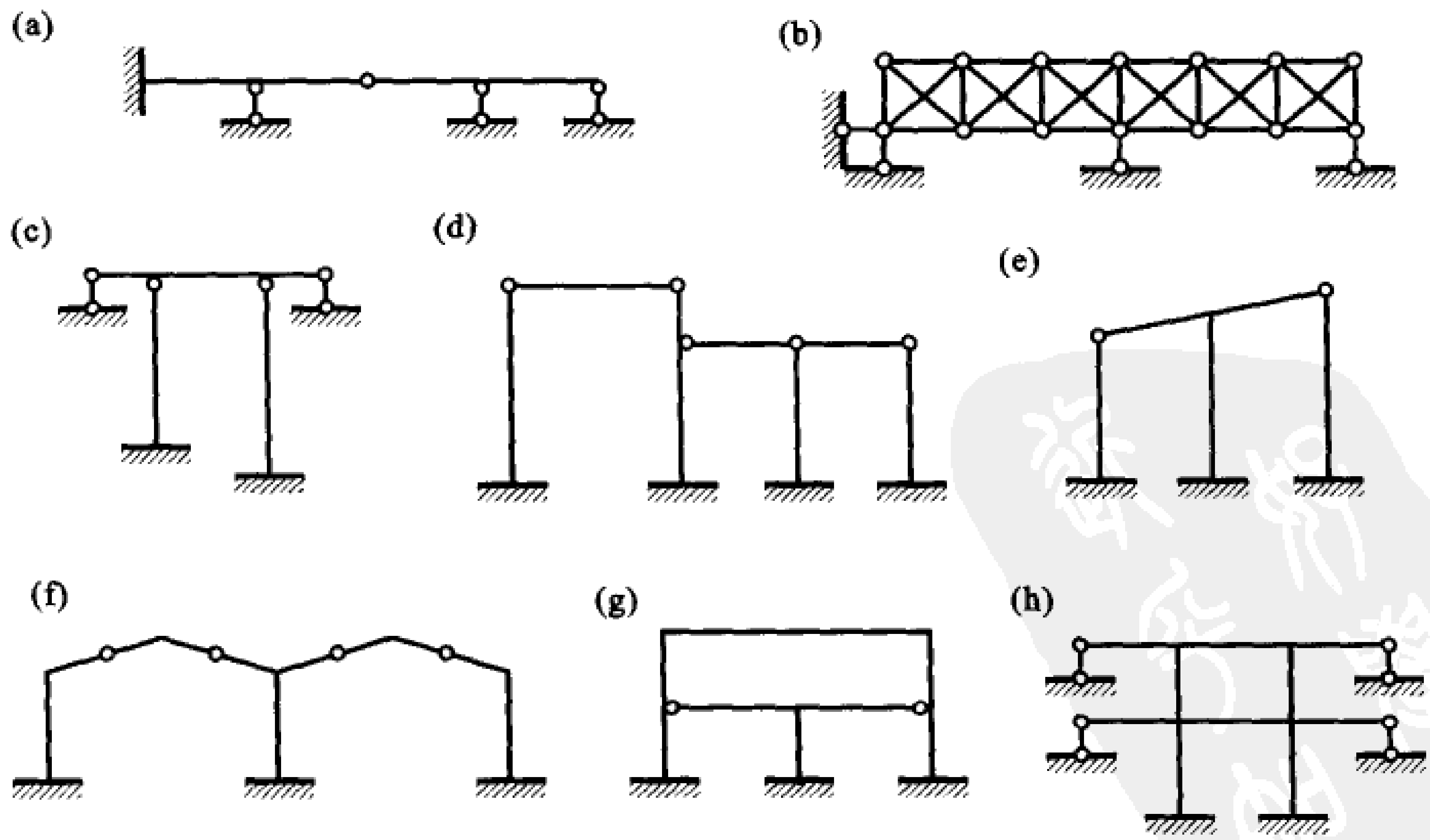
思考题 6－24 图

讨论：完全取静定结构作基本结构，本题将有几个基本未知力？

如果只用两个基本未知力 X_1、X_2，并采用超静定的基本结构，试应用力法原理求解此题。

习　　题

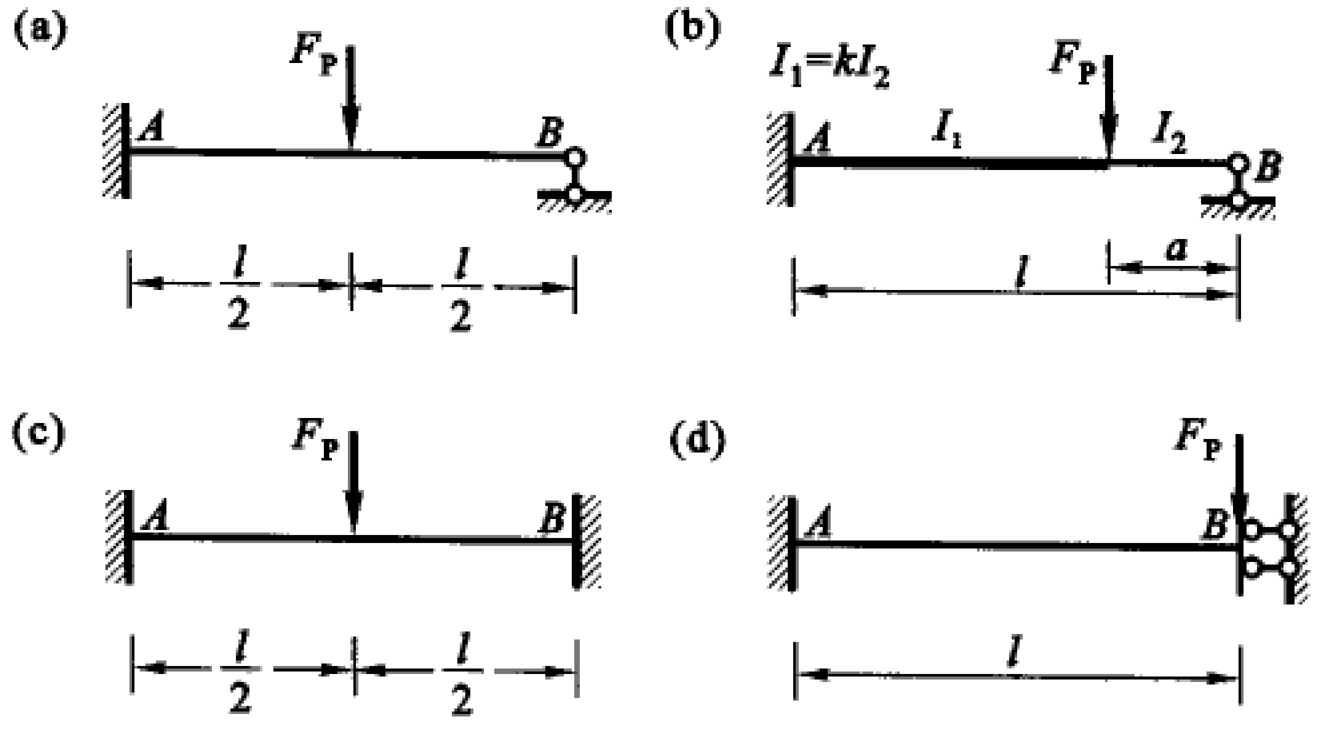
6－1　试确定下列图示结构的超静定次数。



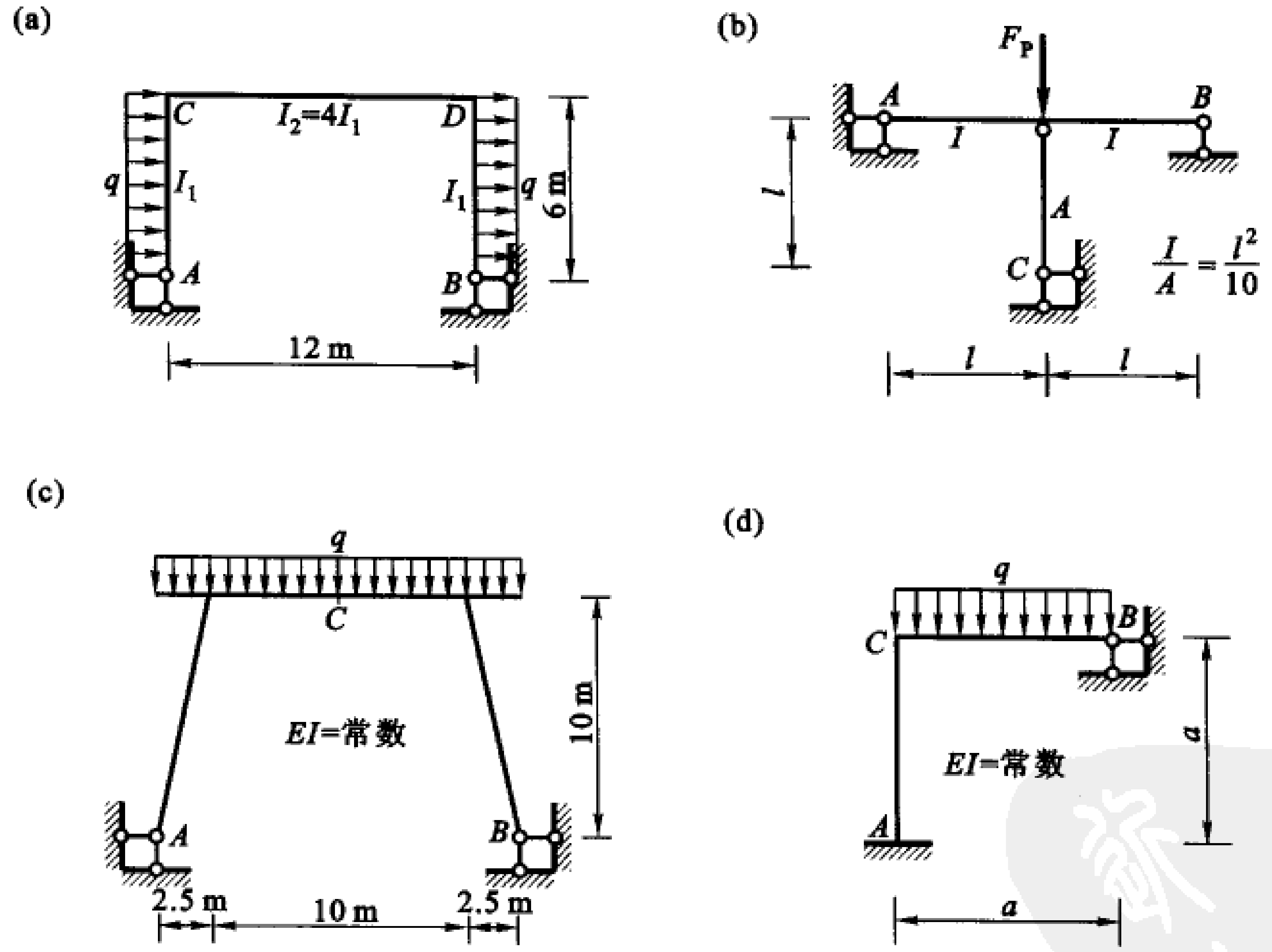
题 6－1 图

6－2　试用力法计算下列图示结构，作 M、F_Q 图。除图 b 为变截面外，其余各图 EI = 常数。

6－3　试用力法计算下列图示刚架，作 M 图。

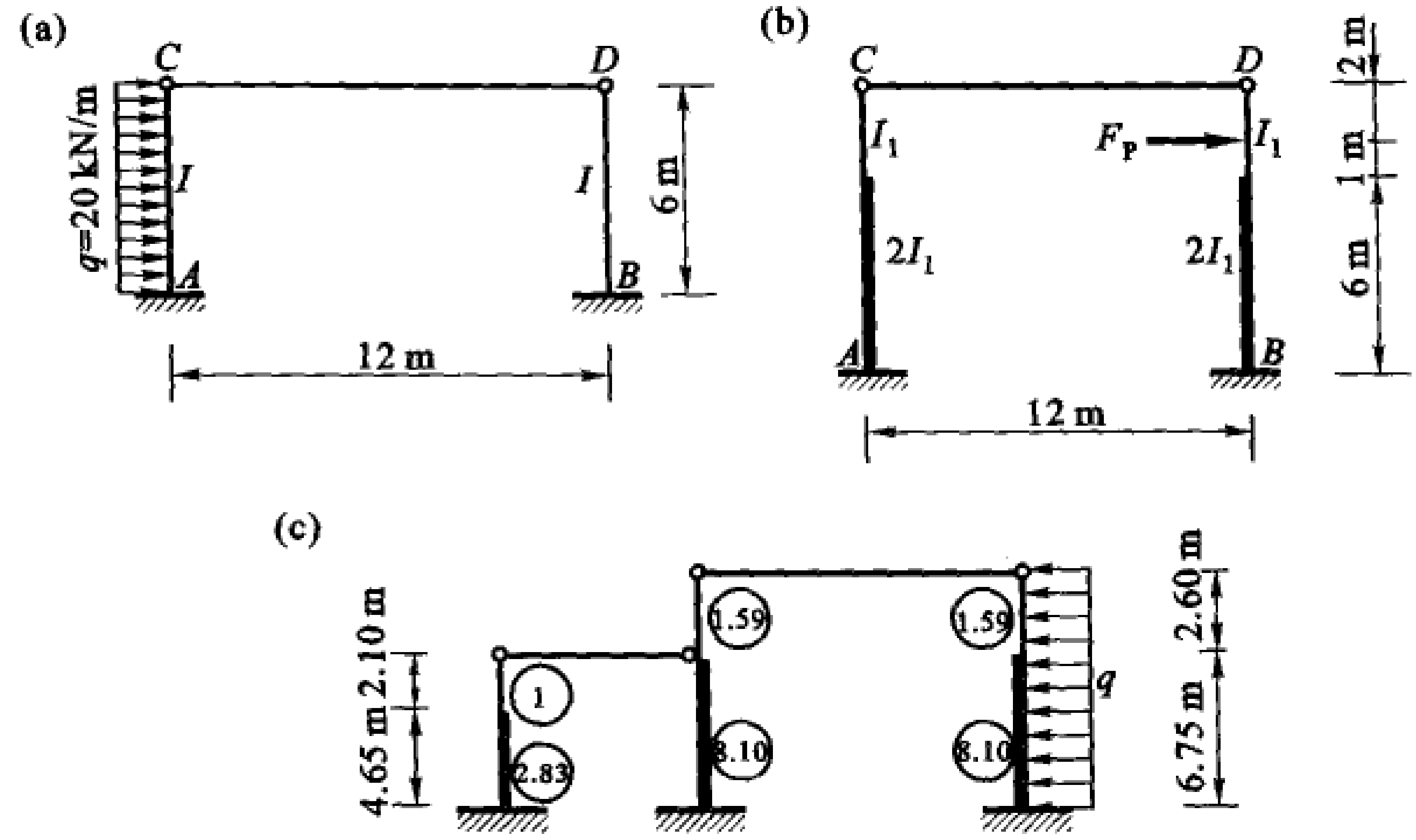


题 6－2 图



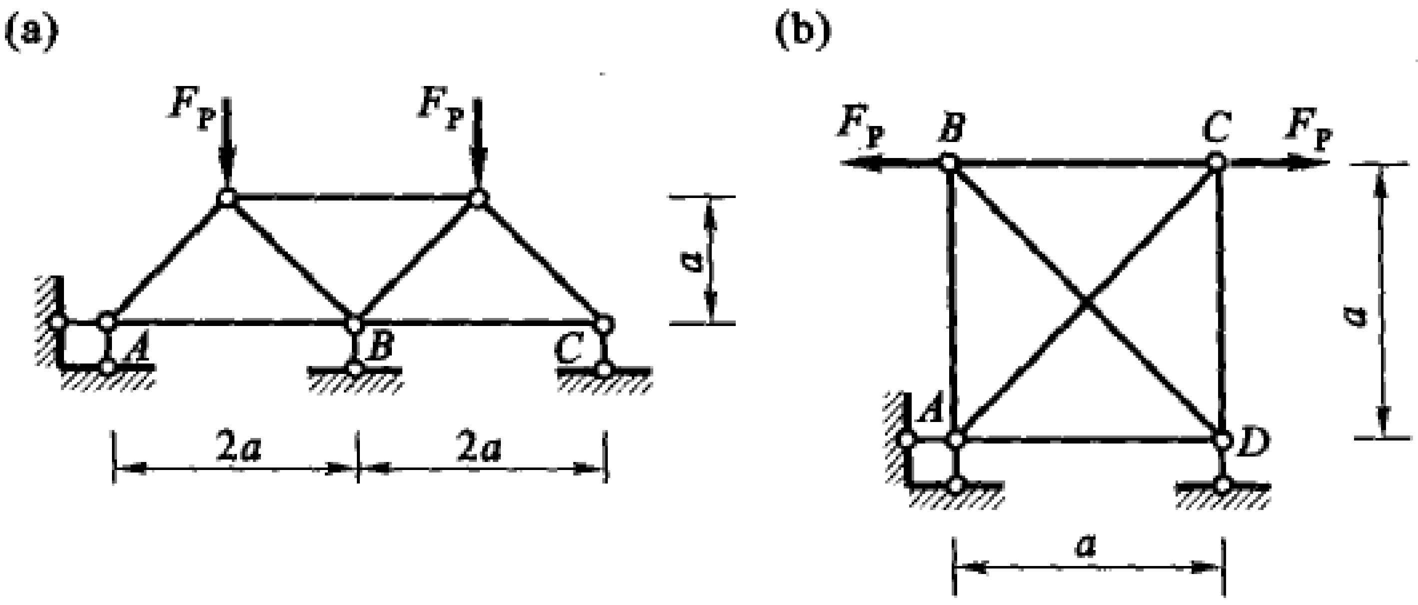
题 6－3 图

6－4　试用力法计算下列图示排架，作 M 图（图 c 中圆圈内的数字代表各杆 EI 的相对值）。



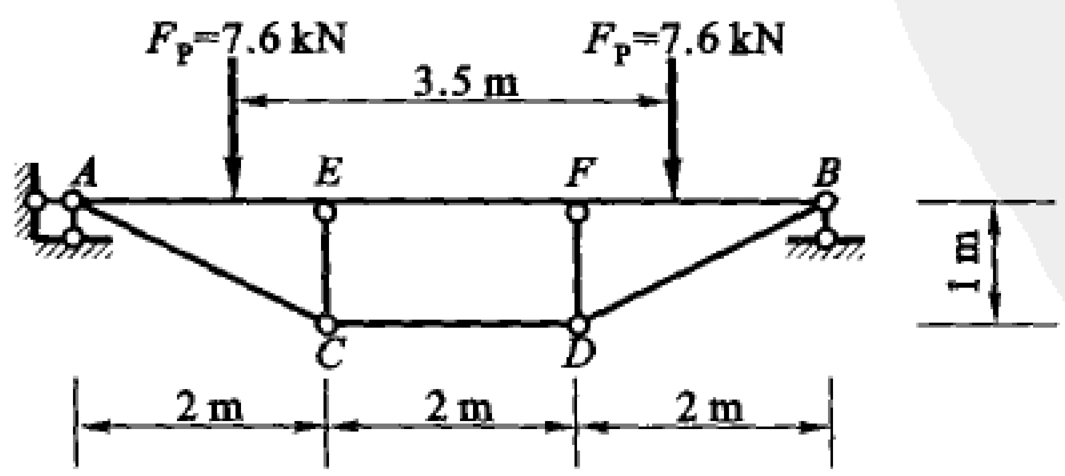
题 6－4 图

6－5　试用力法计算下列图示桁架的轴力。各杆 EA＝常数。



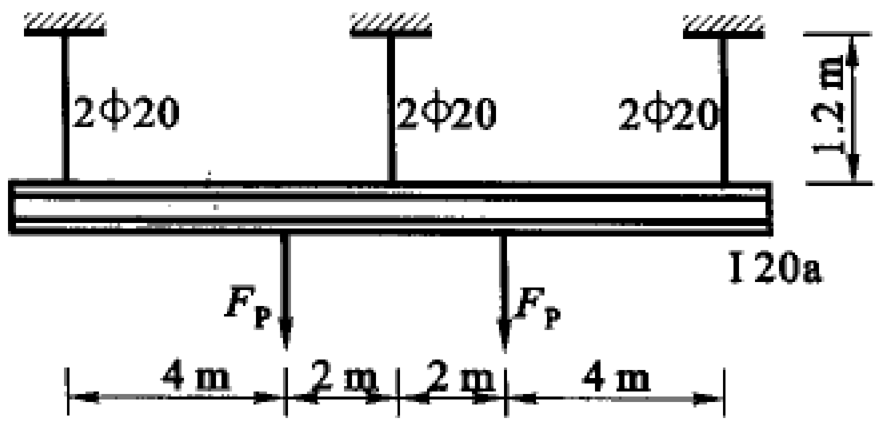
题 6－5 图

6－6　图示一组合式吊车梁，上弦横梁截面 EI＝1 400 kN·m^2，腹杆和下弦的 EA＝2.56 ×10^5 kN。试计算各杆内力，作横梁的弯矩图。



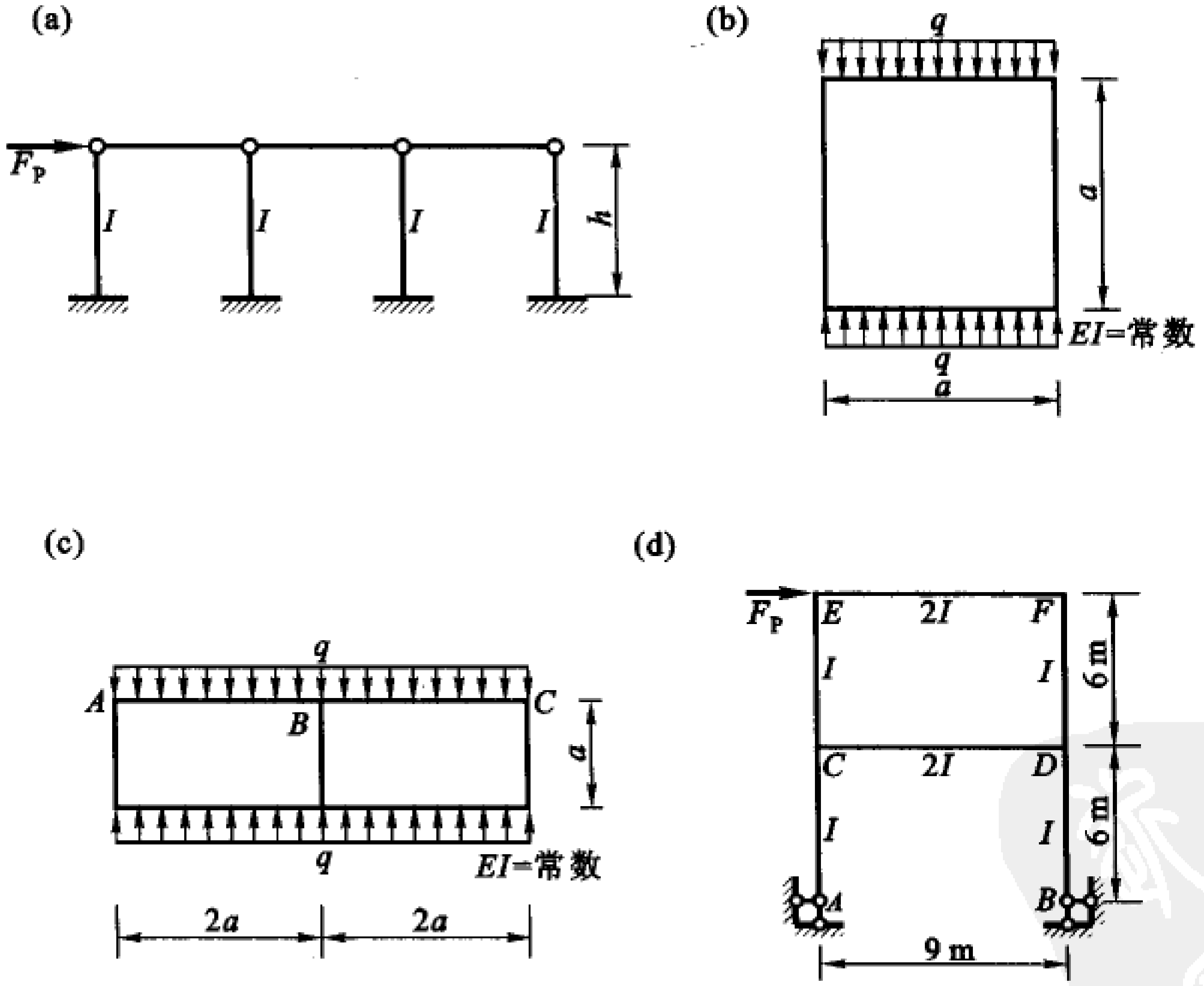
题 6－6 图

6-7　图示连续两跨悬挂式吊车梁，承受吊车荷载 $F_P=4.5$ kN，考虑吊杆的轴向变形。试计算吊杆的拉力和伸长，画出梁的 M、F_Q图。Φ20 钢筋每根截面积 $A=3.14\ cm^2$，I20 a 钢梁 $I=2\ 370\ cm^4$。



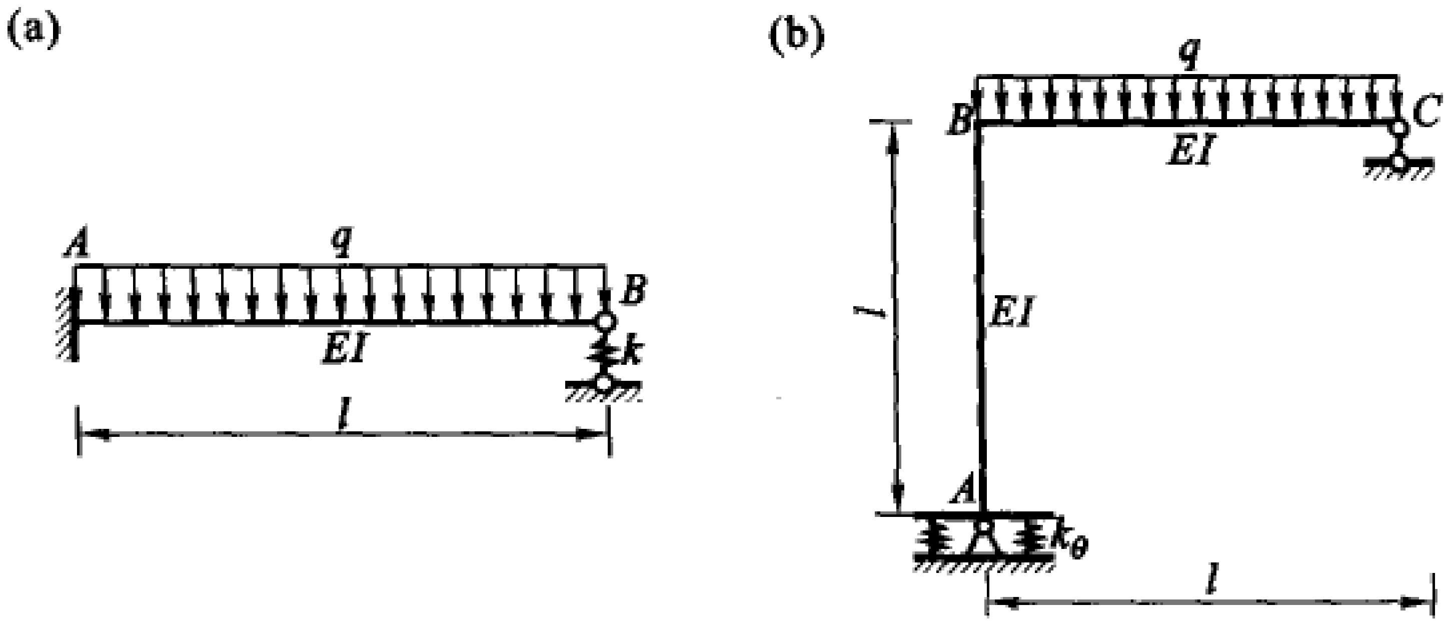
题 6-7 图

6-8　试作下列图示对称刚架的 M 图。



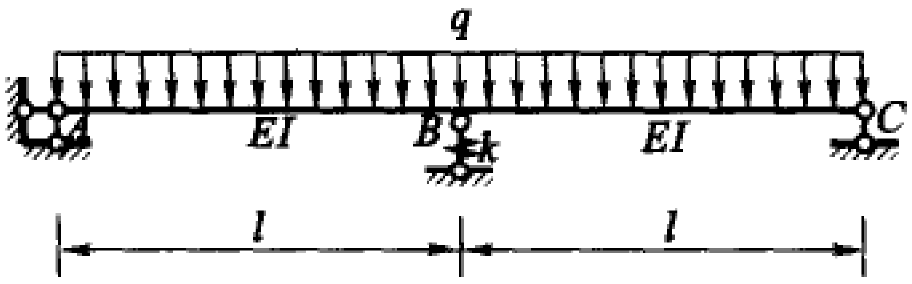
题 6-8 图

6-9　试求解下列具有弹性支座的结构（图 a 中弹性支座刚度 $k=\dfrac{3EI}{l^3}$，图 b 中弹性支座抗转动刚度 $k_\theta=\dfrac{EI}{l}$），并作 M 图。



题6－9图

6－10 为使图示梁截面 B 的弯矩为零，试问弹性支座刚度 k 应取多大？并求此时 B 点的挠度。

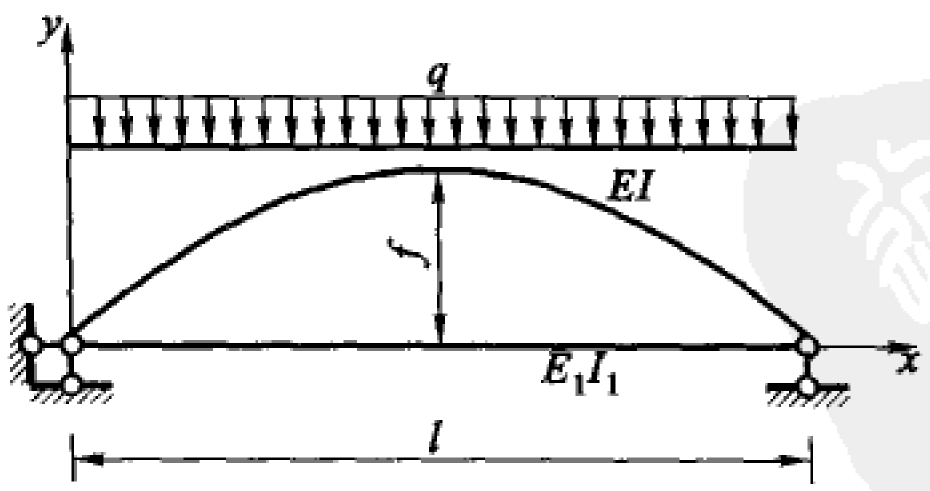


题6－10图

6－11 试推导图示带拉杆抛物线两铰拱在均布荷载作用下拉杆内力的表达式。拱截面 EI 为常数，拱轴方程为

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

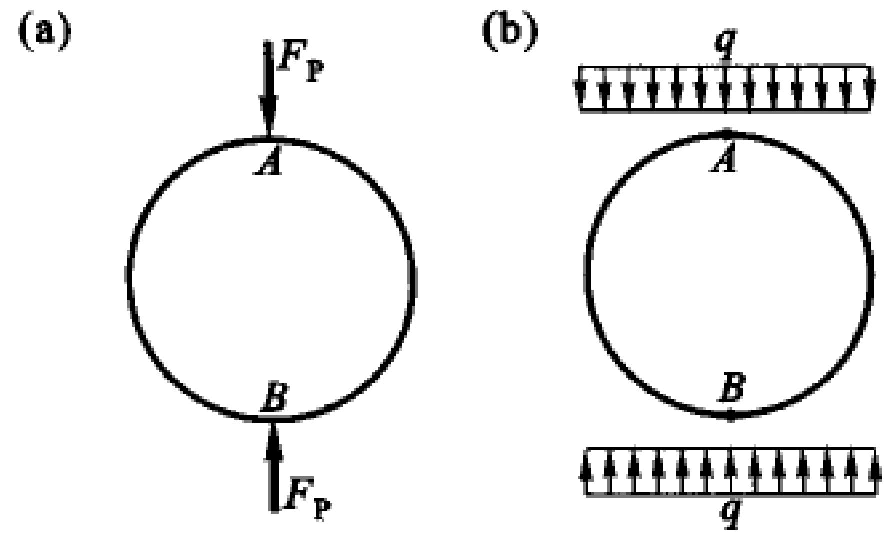
计算位移时，拱身只考虑弯矩的作用，并假设 $ds=dx$。



题6－11图

6－12 试求等截面圆弧两铰拱当 $\frac{f}{l}=0.1,0.2,0.3,0.4,0.5$ 时，在满跨均布竖向荷载 q 作用下的推力。

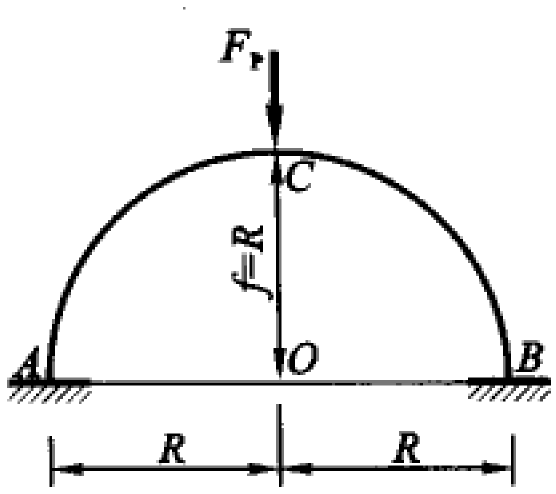
6－13　试求等截面圆管在图示荷载作用下的内力。圆管半径为 R。



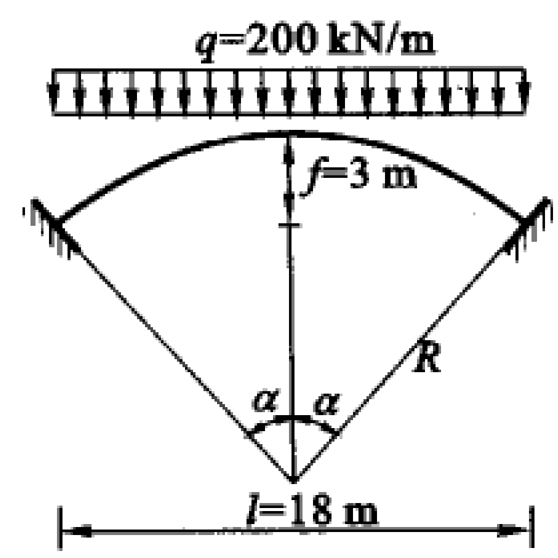
题 6－13 图

6－14　试求图示等截面半圆无铰拱在拱顶受集中荷载 F_P 时的内力。

6－15　图示一等截面圆弧形无铰拱，试求拱顶和拱脚截面弯矩。

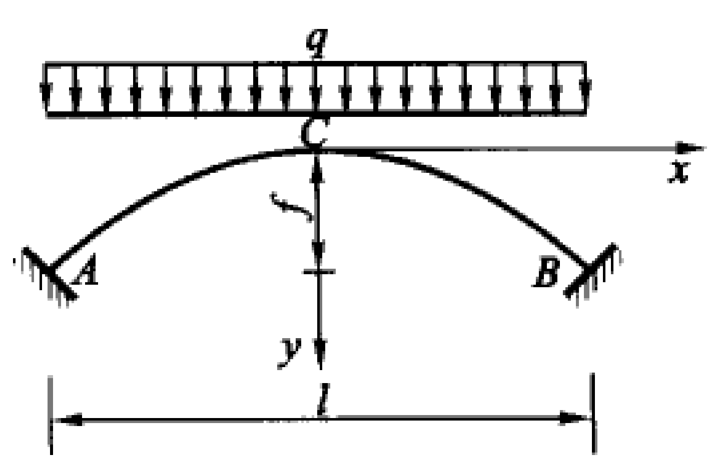


题 6－14 图



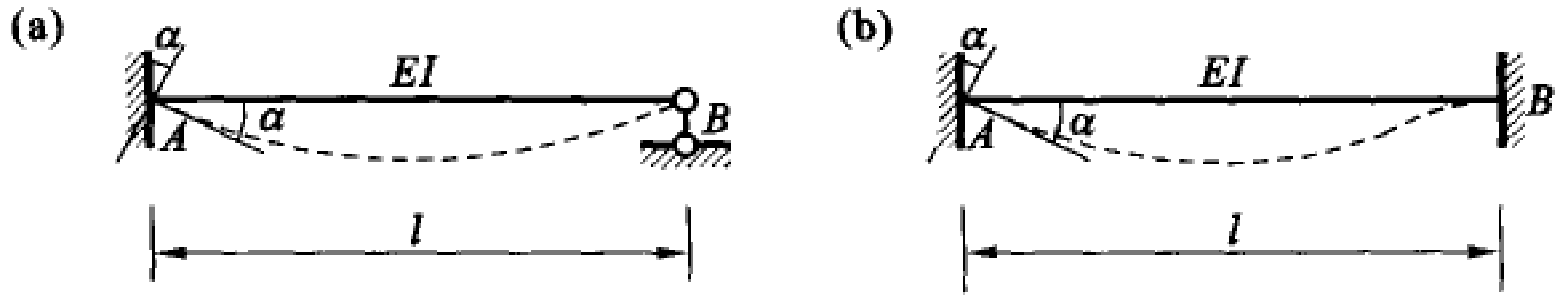
题 6－15 图

6－16　图示抛物线无铰拱的轴线方程 $y=\frac{4f}{l^2}x^2$。截面面积 $A=\frac{A_0}{\cos\varphi}$，惯性矩 $I=\frac{I_0}{\cos\varphi}$，$A_0$ 和 I_0 为拱顶截面处的面积和惯性矩。$l=18$ m，$f=3$ m，拱顶处截面高度为 $h=0.6$ m，考虑弹性压缩。试求拱的水平推力、拱顶和拱脚截面处内力$\left(\text{其中 } ds=\frac{dx}{\cos\varphi}\right)$。



题 6－16 图

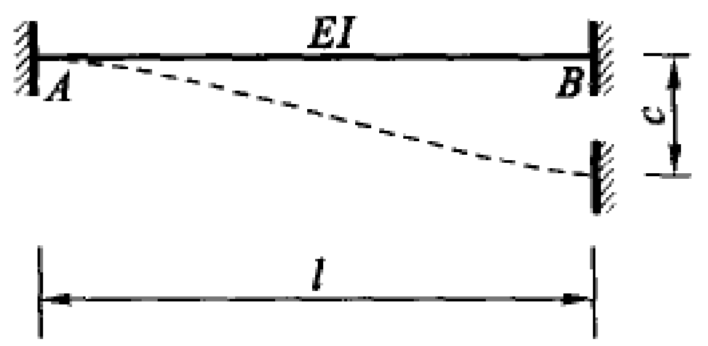
6-17 设图示梁 A 端有转角 α，试作梁的 M 图和 F_Q 图；对每一个梁选用两种基本体系计算，并求梁的挠曲线方程和最大挠度。



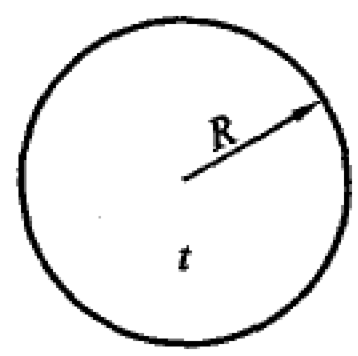
题6-17图

6-18 设图示梁 B 端下沉 c，试作梁的 M 图和 F_Q 图。

6-19 图示钢筋混凝土烟囱平均半径为 R，壁厚 h，温度膨胀系数为 α。当内壁温度与外壁温度差值为 t 时，试求烟囱内力。



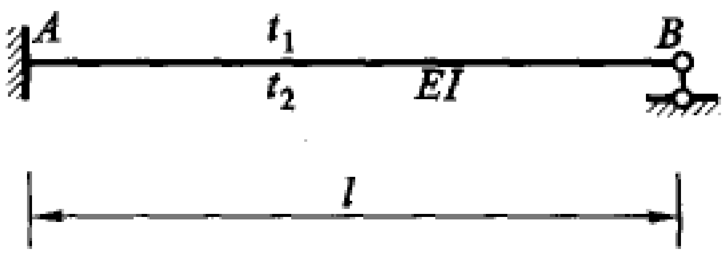
题6-18图



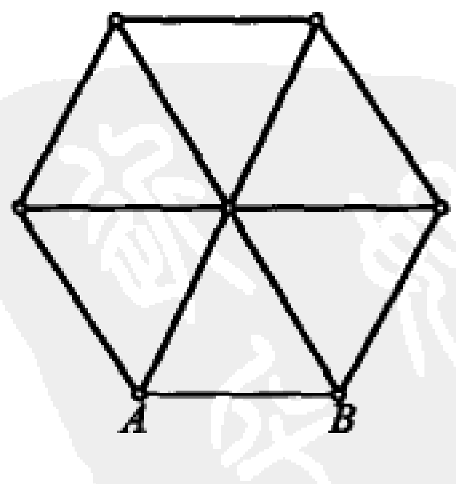
题6-19图

6-20 图示梁上、下侧温度变化分别为 $+t_1$ 与 $+t_2$（$t_2>t_1$），梁截面高 h，温度膨胀系数 α。试求作 M 图及挠曲线方程。

6-21 图示桁架，各杆长度均为 l，EA 相同。杆 AB 制作时短了 Δ，将其拉伸（在弹性极限内）后进行装配。试求装配后杆 AB 的长度。



题6-20图

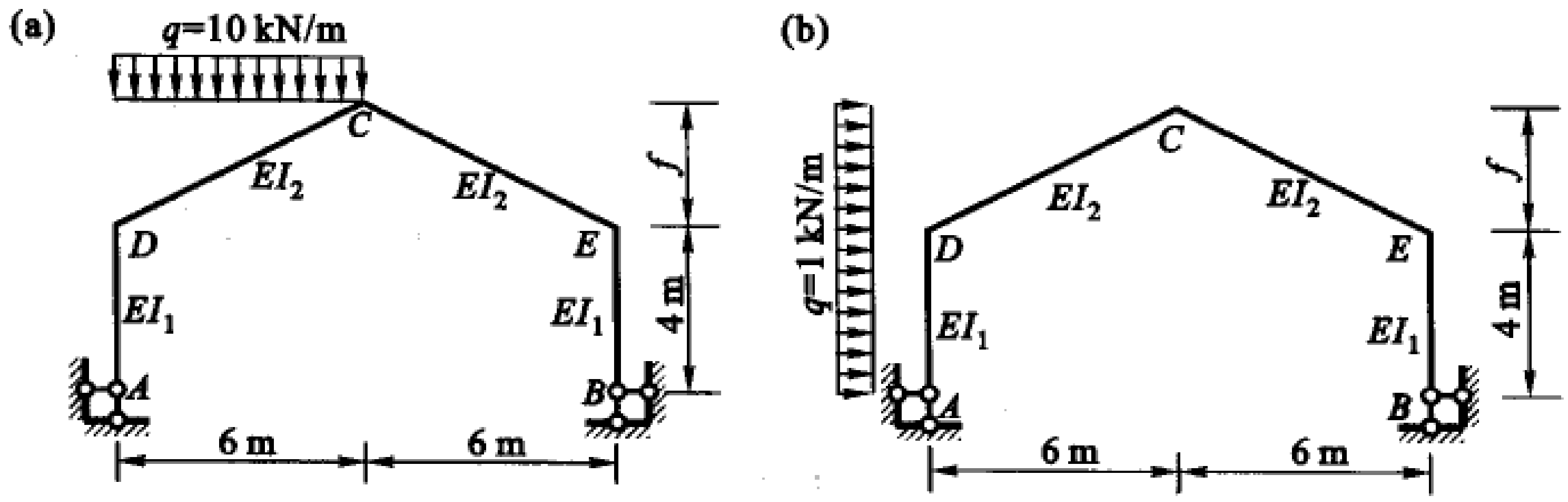


题6-21图

6-22 图示门式刚架，梁的 I_2 是柱的 I_1 的 s 倍，即 $I_2=sI_1$，s 值分三种情况：$s=0.2$，1，5；屋顶矢高有四种取值：$f=0$ m，0.6 m，2 m，4 m。试求：

(a) 固定 $f=2$ m，各种 s 值时内力的变化。

(b) 固定 $s=1$，各种 f 值时内力的变化。



(a)
q=10 kN/m
C
EI2
EI2
D
E
EI1
EI1
A
B
f
4 m
6 m
6 m
(b)
q=1 kN/m
C
EI2
EI2
D
E
EI1
EI1
A
B
f
4 m
6 m
6 m

题 6－22 图

第7章 位 移 法

位移法是计算超静定结构的第二个基本方法。位移法分为两步：首先将结构拆成杆件，进行杆件分析，建立杆件的刚度方程；然后把杆件组装成结构，进行整体分析，建立位移法基本方程。

本章主要讨论位移法的原理并应用于计算刚架。取刚架的独立结点位移作基本未知量，由与这些结点位移相应的平衡条件建立位移法方程。位移法方程有两种表现形式：直接写平衡方程的形式和借用基本体系建立典型方程的形式，二者是等价的；前者便于了解和手算，后者利于与力法及后面以计算机计算为基础的矩阵位移法对比，以加深对内容的理解。

§7-1 位移法的基本概念

1. 关于位移法的简例

先举一个简单的桁架例子，以便更具体地了解位移法的基本思路。

图 7-1a 为一个对称结构，承受对称荷载 F_P。结点 B 只发生竖向位移 Δ，水平位移为零。在位移法中，把此竖向位移 Δ 选作基本未知量。这是因为：如果能设法把位移 Δ 求出，那么各杆的伸长变形即可求出，从而各杆的内力就可求出，整个问题也就迎刃而解了。由此看出，位移 Δ 确是一个关键的未知量。

现在进一步讨论如何求基本未知量 Δ 的问题。计算分为两步：

第一步，从结构中取出一个杆件进行分析。

图 7-2a 中杆 AB，如已知杆端 B 沿杆轴向的位移为 u_i（即杆的伸长），则杆端力 F_{Ni} 应为

$$F_{Ni}=\frac{EA_i}{l_i}u_i \tag{7-1}$$

式中 E、A_i、l_i 分别为杆件的弹性模量、截面面积和长度。系数 $\frac{EA_i}{l_i}$ 是使杆端产生单位位移时所需施加的杆端力，称为杆件的刚度系数。式(7-1)表明杆件的杆端力 F_{Ni} 与杆端位移 u_i 之间的关系，称为杆件的刚度方程。

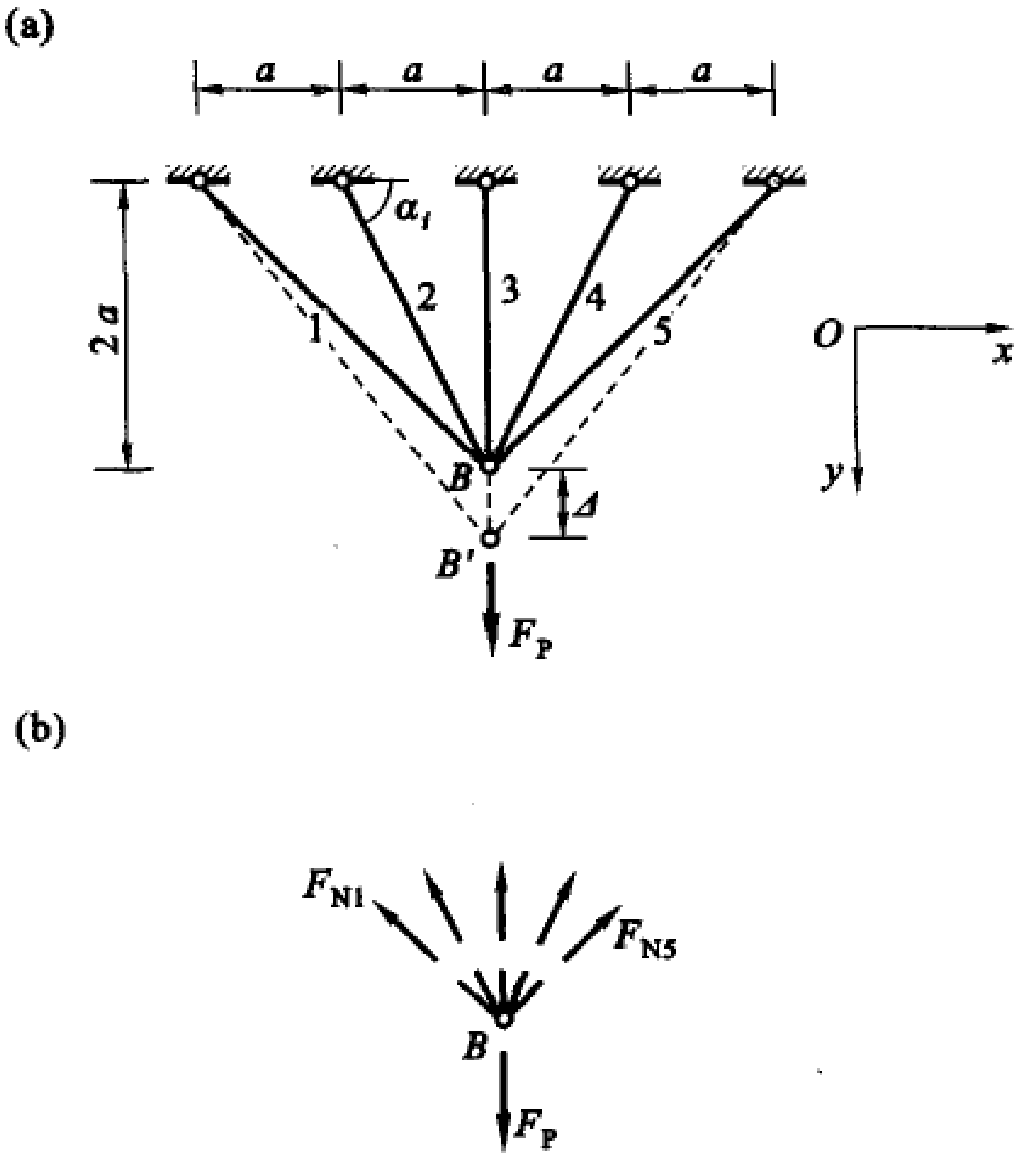


图　7-1

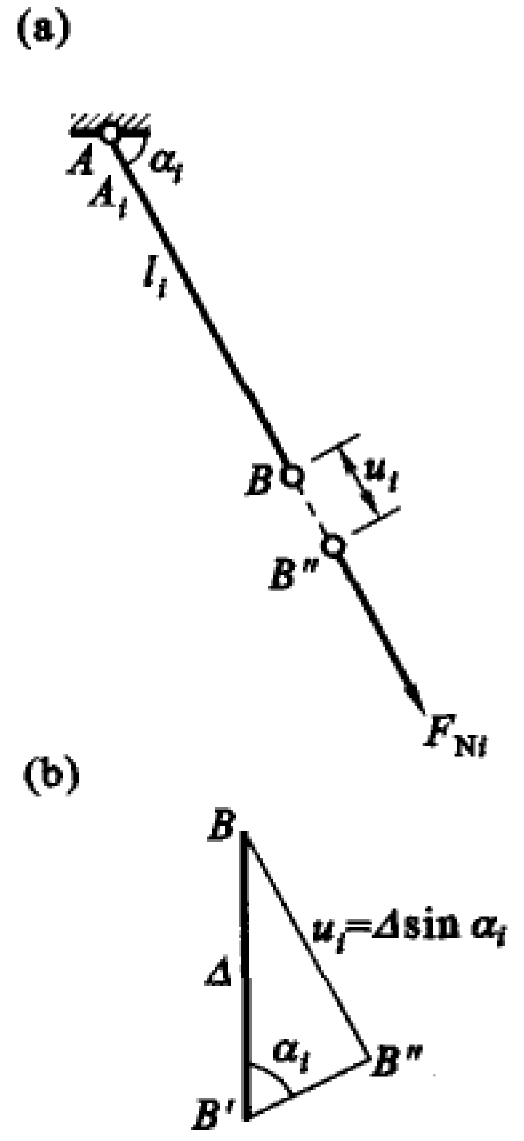


图　7-2

第二步，把各杆件综合成结构。综合时各杆在 B 端的位移是相同的，即都由 B 改变到 B'，此为变形协调条件。根据变形协调条件，各杆端位移 u_i 与基本未知量 Δ 间的关系为(图 7-2b)

$$u_i = \Delta \sin \alpha_i \tag{a}$$

再考虑结点 B 的平衡条件 $\sum F_y = 0$，得(图 7-1b)

$$\sum_{i=1}^{5} F_{Ni} \sin \alpha_i = F_P \tag{b}$$

其中各杆的轴力 F_{Ni} 可由式(7-1)表示，再利用式(a)可用基本未知量 Δ 表示，代入式(b)，即得

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{EA_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i \Delta = F_P \tag{c}$$

这就是位移法的基本方程，它代表平衡方程，是用位移表示的平衡方程。由此可求出基本未知量

$$\Delta = \frac{F_P}{\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{EA_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i} \tag{d}$$

至此，完成了位移法计算中的关键一步。

基本未知量 Δ 求出以后，其余问题就迎刃而解了。例如，为了求各杆的轴力，可将式(d)代入式(a)，再代入式(7-1)，可得

$$F_{Ni}=\frac{\dfrac{EA_i}{l_i}\sin\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{EA_i}{l_i}\sin^2\alpha_i}F_P \tag{e}$$

将图7-1a的尺寸代入式(d)和(e)，设各杆 EA 相同，得

$$\Delta=0.637\,\frac{F_P a}{EA}$$

$$F_{N1}=F_{N5}=0.159\ F_P$$

$$F_{N2}=F_{N4}=0.255\ F_P$$

$$F_{N3}=0.319\ F_P$$

在图7-1a中，如只有2根杆，结构是静定的；当杆数大于(或等于)3时，结构是超静定的，均可用上述方法计算。可见，用位移法计算时，计算方法并不因结构的静定或超静定而有所不同。

由上面的简例，可归纳出位移法的要点如下：

(1) 位移法的基本未知量是结构的独立结点位移(如图7-1a中 B 点的竖向位移 Δ)。

(2) 位移法的基本方程是用位移表示的平衡方程[如 B 点的竖向投影平衡方程式(c)]。

(3) 建立基本方程的过程分为两步：

第一步，把结构拆成杆件，进行杆件分析，得出杆件的刚度方程[如式(7-1)]。

第二步，再把杆件综合成结构，进行整体分析，得出基本方程。

这个过程是一拆一搭，拆了再搭的过程。它把复杂结构的计算问题转变为简单杆件的分析和综合的问题。这就是位移法的基本思路。

(4) 杆件分析是结构分析的基础，杆件的刚度方程是位移法基本方程的基础。因此，位移法也称为刚度法。

2. 位移法计算刚架的基本思路

以上结合链杆体系的情况对位移法的基本思路作了简短的说明。现在再结合刚架的情况作进一步的介绍。

图7-3a所示为一刚架，在给定荷载下，结点 A 发生角位移 θ_A 和线位移 Δ。采用位移法计算时，取结点位移 θ_A 和 Δ 作为基本未知量(注意，支座处的位移不作为基本未知量)。如果能够设法把基本未知量 θ_A 和 Δ 求出，那么整个刚架的计算问题就分解成杆件的计算问题，如图7-3b、c所示。其中杆 AB 的计算

条件是B端固定、A端有已知位移θ_A和Δ，并承受已知荷载q的作用。杆AC的计算条件是C端为简支、A端有已知位移θ_A，并承受已知荷载F_P的作用。

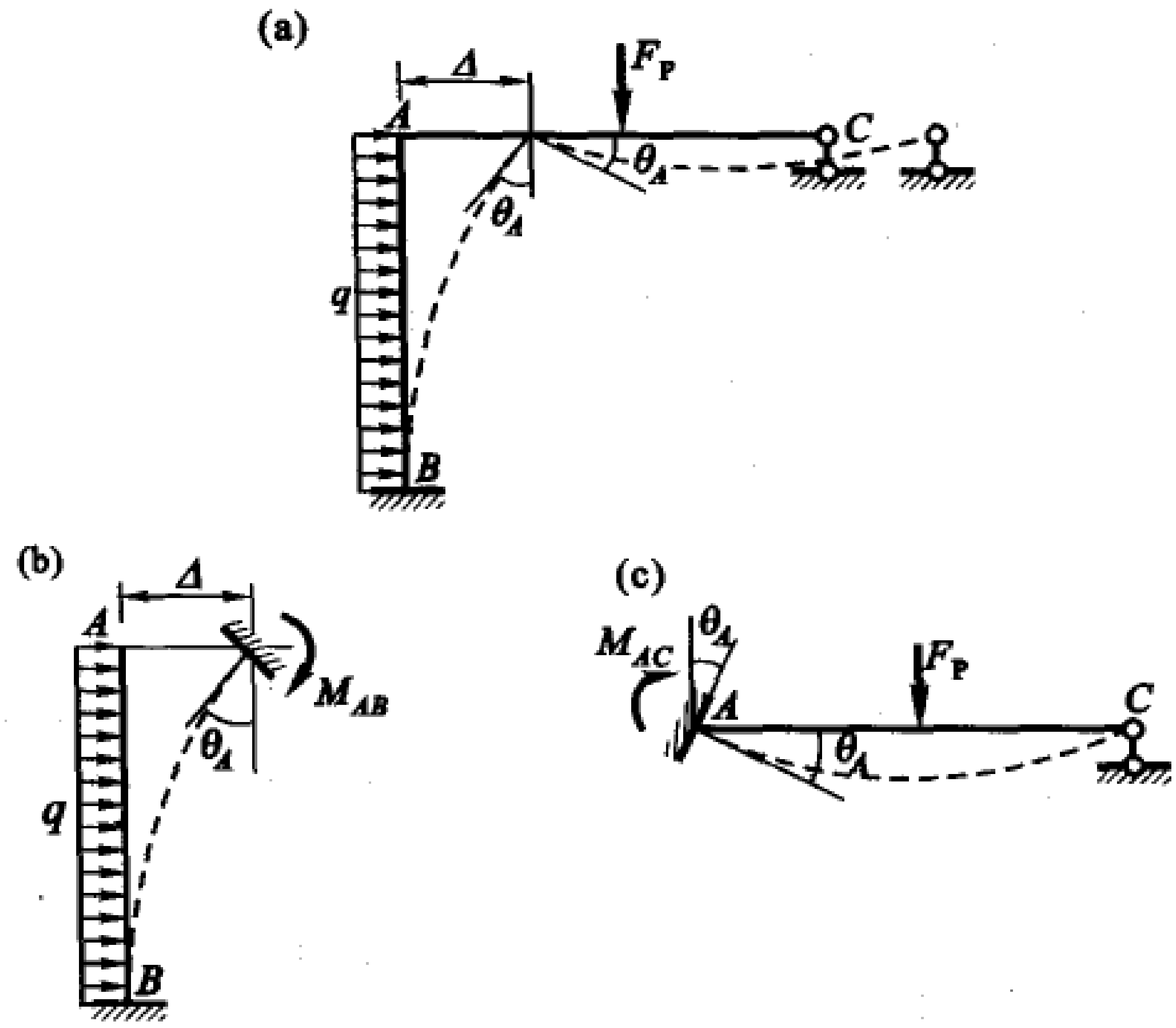


图 7-3

由此看出，用位移法计算刚架，结点位移是处于关键地位的未知量，只要这个关键问题解决了，余下的问题就是杆件的计算问题。

还可看出，用位移法计算刚架的基本思路仍然是拆了再搭。首先，是把刚架拆成杆件，进行杆件分析——杆件在已知端点位移和已知荷载作用下的计算。这相当于上述链杆体系(图7-1)中的第一步，即式(7-1)。但是，现在问题要复杂一些，需要作为预备知识在§7-2中详细讨论。其次，是把杆件再合成刚架，利用刚架平衡条件，建立位移法基本方程，借以求出基本未知量。这相当于上述链杆体系中的第二步，这个问题将在§7-3和§7-4中详细讨论。

§7-2 等截面杆件的刚度方程

为了给用位移法计算刚架作好准备，我们讨论等截面杆件计算的两个问题：一是在已知端点位移下求杆端弯矩，二是在已知荷载作用下求固端弯矩。

1. 由杆端位移求杆端弯矩

图7-4所示为一等截面杆件AB，截面惯性矩I为常数。已知端点A和B的角位移分别为θ_A和θ_B，两端垂直杆轴的相对位移为Δ，拟求杆端弯矩M_{AB}和M_{BA}(注意：

如果杆件沿平行或垂直杆轴方向平行移动，则不引起杆端弯矩。因此，只需考虑两端在垂直杆轴方向发生相对位移 Δ 的情形。此外，由 Δ 可得出弦转角，$\varphi=\frac{\Delta}{l}$）。

在位移法中，采用如下的正负号规则：结点转角 θ_A、θ_B，弦转角 φ，杆端弯矩 M_{AB}、M_{BA}，一律以顺时针转向为正。

必须注意：这里，关于杆端弯矩的正负号规则与通常关于弯矩的正负规则（例如在梁中，弯矩使梁下部纤维受拉者规定为正）有所不同。第一，这里的规则是针对杆端弯矩，而不是针对杆中任一截面的弯矩。第二，当取杆件（或取结点）为隔离体时，杆端弯矩是隔离体上的外力，建立隔离体平衡方程时，本章力矩一律以顺时针转向为正。因此，这里的规则是把杆端弯矩看作外力，为了便于建立平衡方程（位移法的基本方程）而规定的。另一方面，在作弯矩图时，我们把弯矩看作杆件的内力，因此仍应遵守通常的正负号规则。总之，杆端弯矩有双重身份：既是杆件的内力，又是隔离体外力，要注意在不同场合按相应的正负号规则取用。

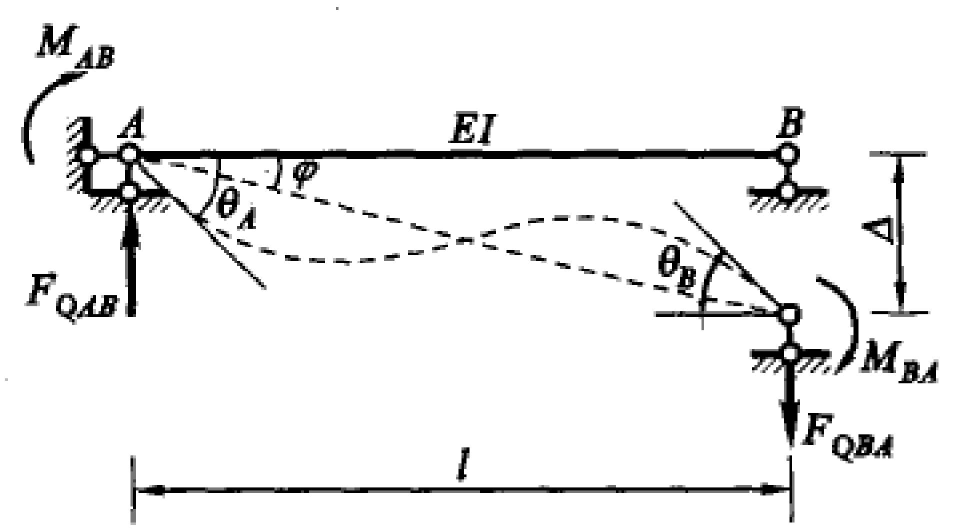


图 7-4

首先，计算简支梁在两端力偶 M_{AB}、M_{BA} 作用下产生的杆端转角（图 7-5a）。由单位荷载法，得

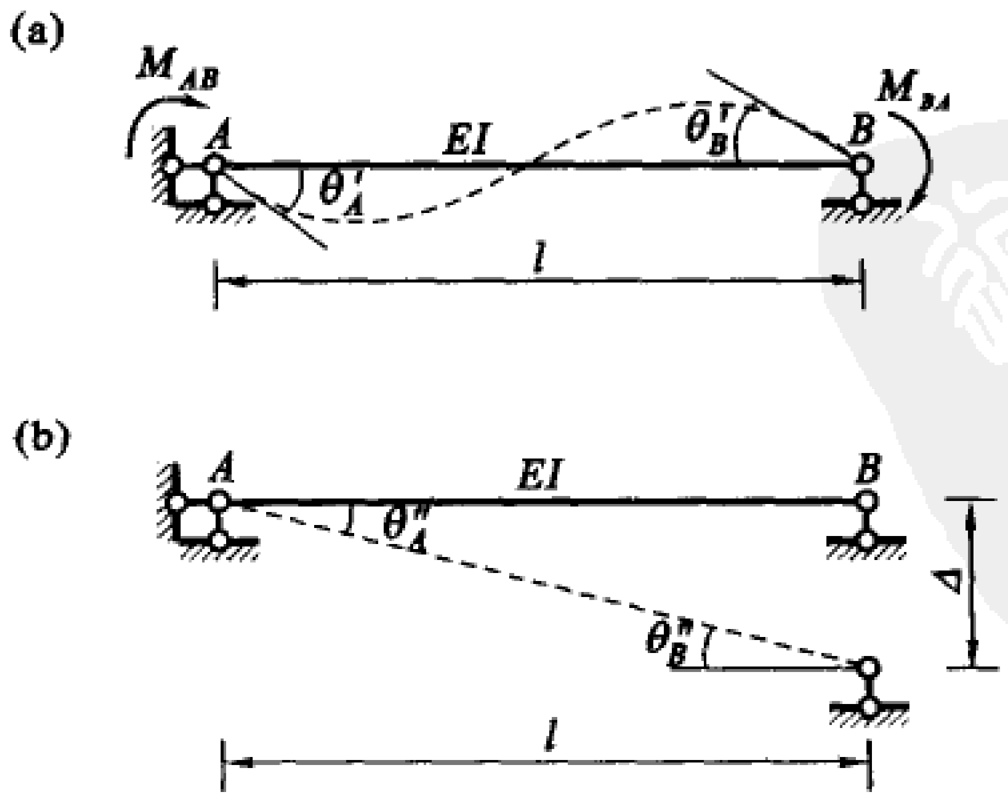


图 7-5

$$\left.\begin{aligned}\theta'_A &= \frac{1}{3i}M_{AB} - \frac{1}{6i}M_{BA}\\ \theta'_B &= -\frac{1}{6i}M_{AB} + \frac{1}{3i}M_{BA}\end{aligned}\right\} \tag{7-2}$$

式中 $i=\frac{EI}{l}$,称为杆件的线刚度。

其次,当简支梁两端有相对竖向位移 Δ 时(图 7－5b),杆端转角应为

$$\theta''_A = \theta''_B = \frac{\Delta}{l} \tag{7-3}$$

综合起来,当两端有力偶 M_{AB}、M_{BA} 作用,而两端又有相对竖向位移 Δ 时,则杆端转角为

$$\left.\begin{aligned}\theta_A &= \frac{1}{3i}M_{AB} - \frac{1}{6i}M_{BA} + \frac{\Delta}{l}\\ \theta_B &= -\frac{1}{6i}M_{AB} + \frac{1}{3i}M_{BA} + \frac{\Delta}{l}\end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

解联立方程,则得

$$\left.\begin{aligned}M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B - 6i\,\frac{\Delta}{l}\\ M_{BA} &= 2i\theta_A + 4i\theta_B - 6i\,\frac{\Delta}{l}\end{aligned}\right\} \tag{7-5}$$

式(7－5)就是由杆端位移 θ_A、θ_B、Δ 求杆端弯矩的公式(习惯上称为转角位移方程)。此外,由平衡条件还可求出杆端剪力如下:

$$F_{QAB} = F_{QBA} = -\frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA})$$

再将式(7－5)代入,即得

$$F_{QAB} = F_{QBA} = -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta \tag{7-6}$$

为了紧凑起见,可以把式(7－5)和(7－6)写成矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} M_{AB}\\ M_{BA}\\ F_{QAB}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i & 2i & -\frac{6i}{l}\\ 2i & 4i & -\frac{6i}{l}\\ -\frac{6i}{l} & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_A\\ \theta_B\\ \Delta\end{pmatrix} \tag{7-7}$$

上式与式(7－1)具有类似的性质,称为弯曲杆件的刚度方程。其中

$$
\begin{pmatrix}
4i & 2i & -\frac{6i}{l} \\
2i & 4i & -\frac{6i}{l} \\
-\frac{6i}{l} & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2}
\end{pmatrix}
$$

称为弯曲杆件的刚度矩阵,其中的系数称为刚度系数。刚度系数是只与杆件的截面尺寸和材料性质有关的常数,所以又称为形常数。

下面讨论杆件在一端具有不同支座时的刚度方程。

(1) B 端为固定支座(图 7－6a)

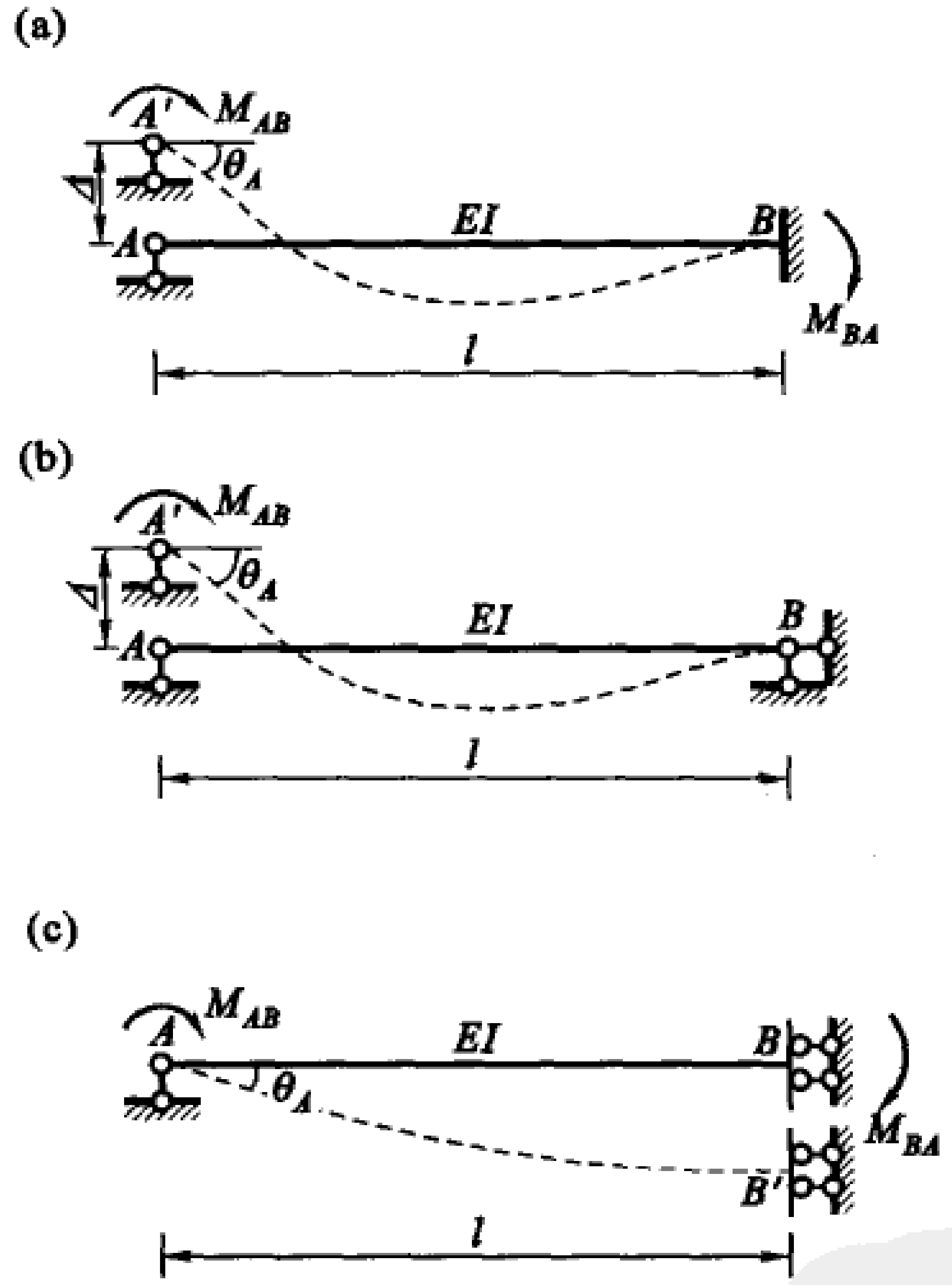


图 7－6

在式(7－5)中令 $\theta_B=0$,则得

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{AB} &= 4i\theta_A - 6i\frac{\Delta}{l} \\
M_{BA} &= 2i\theta_A - 6i\frac{\Delta}{l}
\end{aligned}
\right\} \tag{7-8}
$$

(2) B 端为铰支座(图 7－6b)

在式(7－4)第一式中令 $M_{BA}=0$,则得

$$M_{AB}=3i\theta_A-3i\frac{\Delta}{l} \tag{7-9}$$

(3) B 端为滑动支座(图 7-6c)

在式(7-6)中令 $\theta_B=0$ 和 $F_{QAB}=F_{QBA}=0$,则得

$$\frac{\Delta}{l}=\frac{1}{2}\theta_A$$

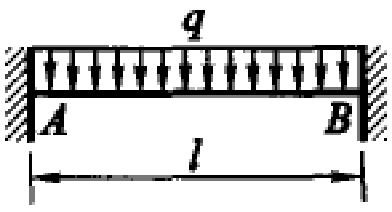
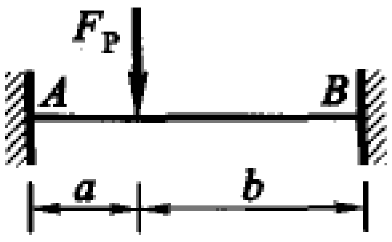
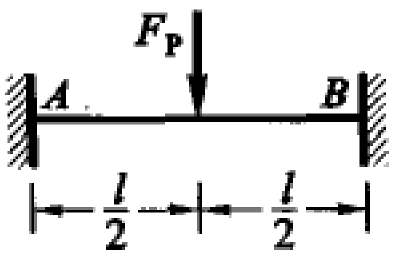
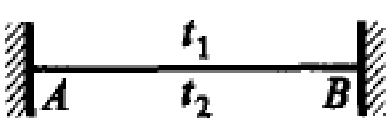
再代入式(7-5),得

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=i\theta_A\\M_{BA}&=-i\theta_A\end{aligned}\right\} \tag{7-10}$$

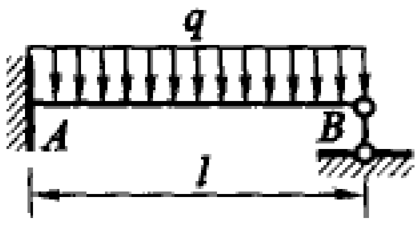
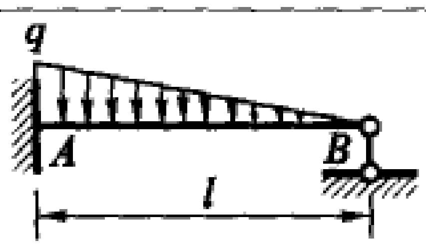
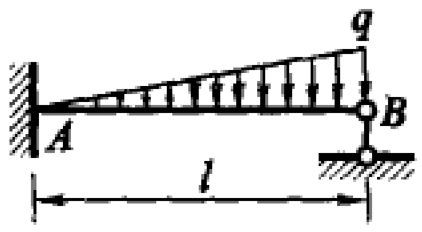
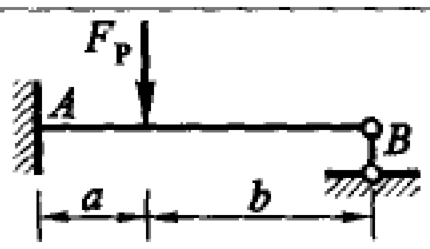
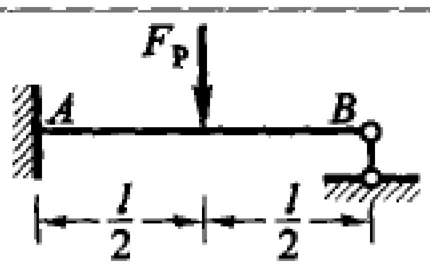
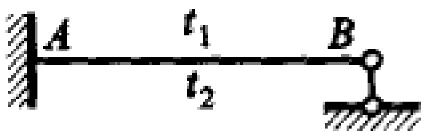
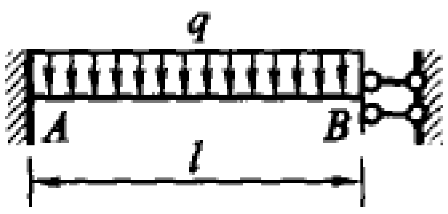
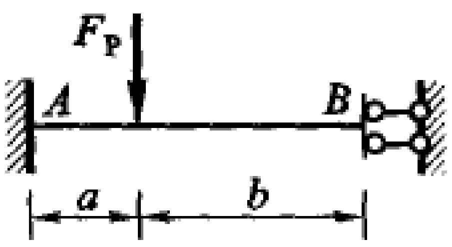
2. 由荷载求固端弯矩

对于三种杆件:① 两端固定的梁;② 一端固定、另一端简支的梁;③ 一端固定、另一端滑动支承的梁;表 7-1 给出了在几种常见荷载作用下的杆端弯矩和杆端剪力,称为固端弯矩和固端剪力。因为它们是只与荷载形式有关的常数,所以又称为载常数。固端弯矩用 M_{AB}^F 和 M_{BA}^F 表示。

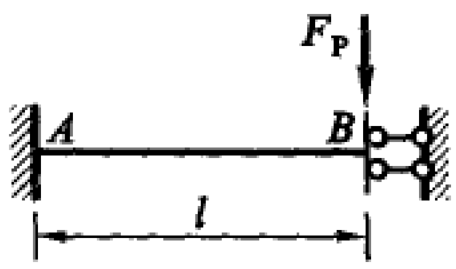
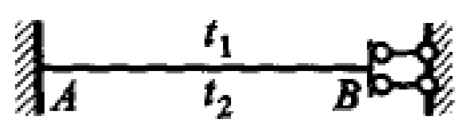
表 7-1 等截面杆件的固端弯矩和剪力

	编号	简　图	固端弯矩(以顺时针转向为正)	固端剪力
两端固定	1		$M_{AB}^F=-\frac{ql^2}{12}$ $M_{BA}^F=\frac{ql^2}{12}$	$F_{QAB}^F=\frac{ql}{2}$ $F_{QBA}^F=-\frac{ql}{2}$
	2		$M_{AB}^F=-\frac{ql^2}{30}$ $M_{BA}^F=\frac{ql^2}{20}$	$F_{QAB}^F=\frac{3ql}{20}$ $F_{QBA}^F=-\frac{7ql}{20}$
	3		$M_{AB}^F=-\frac{F_Pab^2}{l^2}$ $M_{BA}^F=\frac{F_Pa^2b}{l^2}$	$F_{QAB}^F=\frac{F_Pb^2}{l^2}\left(1+\frac{2a}{l}\right)$ $F_{QBA}^F=-\frac{F_Pa^2}{l^2}\left(1+\frac{2b}{l}\right)$
	4		$M_{AB}^F=-\frac{F_Pl}{8}$ $M_{BA}^F=\frac{F_Pl}{8}$	$F_{QAB}^F=\frac{F_P}{2}$ $F_{QBA}^F=-\frac{F_P}{2}$
	5	 $\Delta t=t_1-t_2$	$M_{AB}^F=\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$ $M_{BA}^F=-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$F_{QAB}^F=0$ $F_{QBA}^F=0$

续表

	编号	简　　图	固端弯矩(以顺时针转向为正)	固端剪力
一端固定另一端铰支	6		$M^F_{AB}=-\frac{ql^2}{8}$	$F^F_{QAB}=\frac{5}{8}ql$ $F^F_{QBA}=-\frac{3}{8}ql$
	7		$M^F_{AB}=-\frac{ql^2}{15}$	$F^F_{QAB}=\frac{2}{5}ql$ $F^F_{QBA}=-\frac{1}{10}ql$
	8		$M^F_{AB}=-\frac{7ql^2}{120}$	$F^F_{QAB}=\frac{9}{40}ql$ $F^F_{QBA}=-\frac{11}{40}ql$
	9		$M^F_{AB}=-\frac{F_P b(l^2-b^2)}{2l^2}$	$F^F_{QAB}=\frac{F_P b(3l^2-b^2)}{2l^3}$ $F^F_{QBA}=-\frac{F_P a^2(3l-a)}{2l^3}$
	10		$M^F_{AB}=-\frac{3F_P l}{16}$	$F^F_{QAB}=\frac{11}{16}F_P$ $F^F_{QBA}=-\frac{5}{16}F_P$
	11	 $\Delta t=t_1-t_2$	$M^F_{AB}=\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$	$F^F_{QAB}=F^F_{QBA}$ $=-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$
一端固定另一端滑动支承	12		$M^F_{AB}=-\frac{ql^2}{3}$ $M^F_{BA}=-\frac{ql^2}{6}$	$F^F_{QAB}=ql$ $F^F_{QBA}=0$
	13		$M^F_{AB}=-\frac{F_P a}{2l}(2l-a)$ $M^F_{BA}=-\frac{F_P a^2}{2l}$	$F^F_{QAB}=F_P$ $F^F_{QBA}=0$

续表

	编号	简　图	固端弯矩(以顺时针转向为正)	固端剪力
一端固定另一端滑动支承	14		$M^F_{AB}=M^F_{BA}=-\frac{F_P l}{2}$	$F^F_{QAB}=F_P$ $F^L_{QB}=F_P$ $F^R_{QB}=0$
	15	 $\Delta t=t_1-t_2$	$M^F_{AB}=\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$ $M^F_{BA}=-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$F^F_{QAB}=0$ $F^F_{QBA}=0$

在两端固定的梁中，表7－1中编号3的公式是基本公式，利用这个公式，根据叠加原理，可得出在集中力系F_{Pi}和分布荷载$q(a)$作用下的固端弯矩如下(图7－7)：

$$\left.\begin{aligned}M^F_{AB}&=-\sum F_{Pi}\frac{a_i(l-a_i)^2}{l^2}-\int_0^l\frac{q(a)a(l-a)^2}{l^2}\mathrm{d}a\\M^F_{BA}&=\sum F_{Pi}\frac{a_i^2(l-a_i)}{l^2}+\int_0^l\frac{q(a)a^2(l-a)}{l^2}\mathrm{d}a\end{aligned}\right\}\qquad(7-11)$$

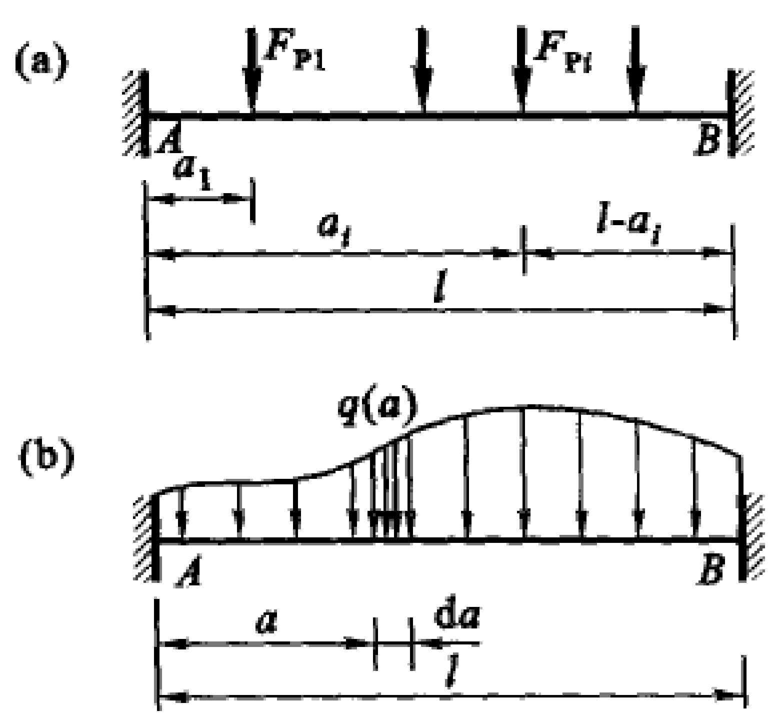


图　7－7

式中a_i表示荷载F_{Pi}与A端的距离，a表示荷载$q(a)\mathrm{d}a$与A端的距离。

此外，三种梁的固端弯矩是有联系的，例如第二、三种梁的固端弯矩可利用第一种梁的结果得到。

如果等截面杆件既有已知荷载作用，又有已知的端点位移，则根据叠加原理，杆端弯矩的一般公式[对照式(7－5)]为

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=4i\theta_A+2i\theta_B-6i\frac{\Delta}{l}+M_{AB}^{F}\\M_{BA}&=2i\theta_A+4i\theta_B-6i\frac{\Delta}{l}+M_{BA}^{F}\end{aligned}\right\}\tag{7-12}$$

杆端剪力的一般公式[对照式(7-6)]为

$$\left.\begin{aligned}F_{QAB}&=-\frac{6i}{l}\theta_A-\frac{6i}{l}\theta_B+\frac{12i}{l^2}\Delta+F_{QAB}^{F}\\F_{QBA}&=-\frac{6i}{l}\theta_A-\frac{6i}{l}\theta_B+\frac{12i}{l^2}\Delta+F_{QBA}^{F}\end{aligned}\right\}\tag{7-13}$$

式中 F_{QAB}^{F} 和 F_{QBA}^{F} 是荷载引起的固端剪力。

本节解决了一个杆件的杆端力与杆端位移及荷载之间的关系问题，是位移法的基础；与第9章矩阵位移法中的单元分析是相对应的内容。

§7-3 无侧移刚架的计算

如果刚架的各结点（不包括支座）只有角位移而没有线位移，这种刚架称为无侧移刚架。

本节讨论无侧移刚架的计算。连续梁的计算也属于这类问题。

图7-8a所示为一连续梁，在荷载作用下，结点 B 只有角位移 θ_B，没有线位移，属于无侧移的问题。

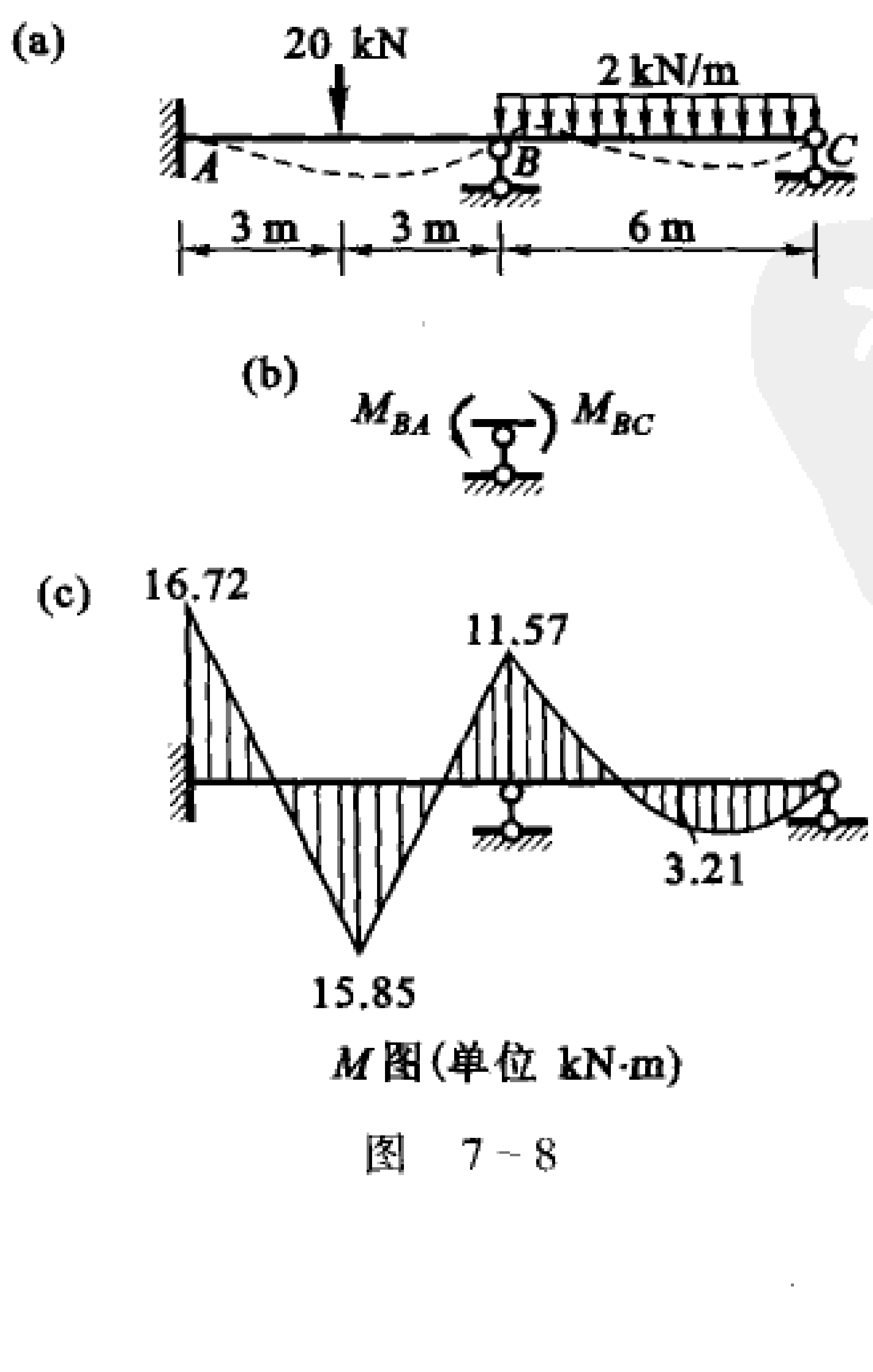


图 7-8

采用位移法计算时，取结点角位移 θ_B 作为基本未知量(铰支座 C 处虽有角位移，但可不选作基本未知量)。

由表 7－1 可求出各杆的固端弯矩为

$$-M_{AB}^{\mathrm{F}}=M_{BA}^{\mathrm{F}}=\frac{20\ \mathrm{kN}\times 6\ \mathrm{m}}{8}=15\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{BC}^{\mathrm{F}}=-\frac{2\ \mathrm{kN/m}\times(6\ \mathrm{m})^2}{8}=-9\ \mathrm{kN\cdot m}$$

再利用式(7－8)和(7－9)(其中令 $\Delta=0$)，可列出各杆杆端弯矩如下(设各杆的线刚度 i 相等)：

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=2i\theta_B-15\ \mathrm{kN\cdot m}\\M_{BA}&=4i\theta_B+15\ \mathrm{kN\cdot m}\\M_{BC}&=3i\theta_B-9\ \mathrm{kN\cdot m}\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

由此看出，一旦求出 θ_B，杆端弯矩即可求出。

下面建立位移法基本方程，以便求出基本未知量 θ_B。为此，取结点 B 为隔离体(图 7－8b)，可列出力矩平衡方程：

$$\sum M_B=0,\quad M_{BA}+M_{BC}=0\tag{b}$$

利用式(a)，此平衡方程可写为

$$7i\theta_B+6\ \mathrm{kN\cdot m}=0\tag{c}$$

式(c)就是用位移 θ_B 表示的平衡方程，即位移法的基本方程，由此可求出基本未知量

$$\theta_B=-\frac{6\ \mathrm{kN\cdot m}}{7i}\tag{d}$$

至此，位移法的关键问题已得到解决。余下的问题是将式(d)代入式(a)，即可求出各杆杆端弯矩：

$$M_{AB}=2i\times\left(-\frac{6\ \mathrm{kN\cdot m}}{7i}\right)-15\ \mathrm{kN\cdot m}=-16.72\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{BA}=4i\times\left(-\frac{6\ \mathrm{kN\cdot m}}{7i}\right)+15\ \mathrm{kN\cdot m}=11.57\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{BC}=3i\times\left(-\frac{6\ \mathrm{kN\cdot m}}{7i}\right)-9\ \mathrm{kN\cdot m}=-11.57\ \mathrm{kN\cdot m}$$

据此，可作弯矩图，如图 7－8c 所示。

一般说来，用位移法解连续梁和无侧移刚架时，在每个刚结点处有一个结点转角——基本未知量；与此相应，在每个刚结点处又可写出一个力矩平衡方程——基本方程。因此，基本方程的个数与基本未知量的个数恰好相等，因而可解出全部基本未知量。

位移法的基本作法是先拆散,后组装。组装的原则有二:首先,在结点处各个杆件的变形要协调一致;其次,装配好的结点要满足平衡条件。关于第一个要求,在选定基本未知量时已经考虑到。因为在每个刚结点处只规定了一个结点转角,也就是说,我们规定了刚结点处的各杆杆端转角都彼此相等,这样就保证了结点处的变形连续条件。关于第二个要求,是在建立基本方程时才考虑的,因为基本方程就是根据结点的平衡条件列出的。从这里不仅看到位移法的解答已经满足平衡条件和变形连续条件,而且还看到经过什么途径才使这两方面的条件得到满足。

例 7-1 试作图 7-9a 所示刚架的弯矩图。

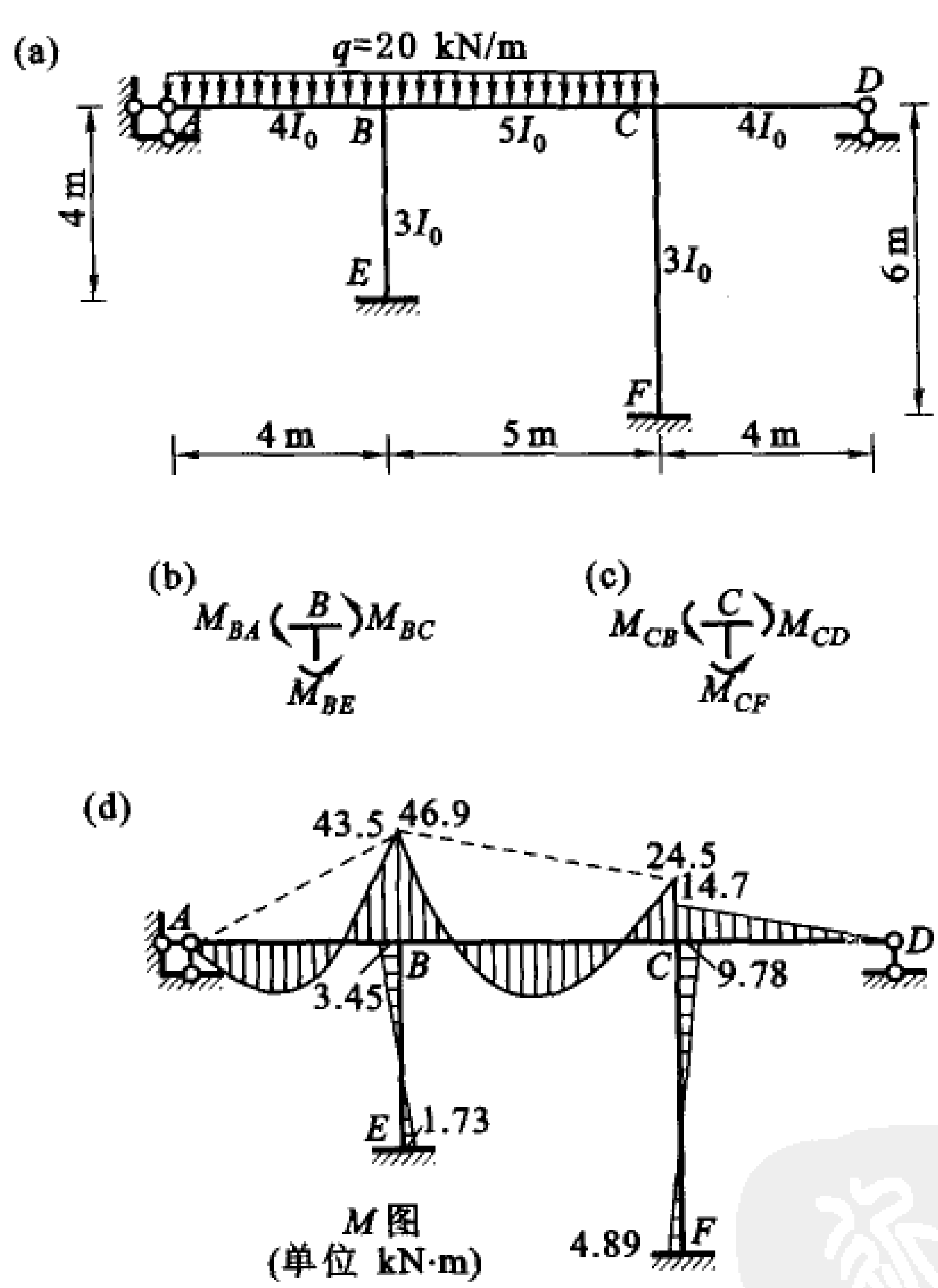


图 7-9

解 (1) 基本未知量

共有两个基本未知量:θ_B,θ_C。

(2) 杆端弯矩

固端弯矩查表 7-1 求得

$$M_{BA}^{F}=\frac{ql^2}{8}=\frac{20\ \text{kN/m}\times(4\ \text{m})^2}{8}=40\ \text{kN·m}$$

$$M_{BC}^{F}=-\frac{ql^2}{12}=-\frac{20\ \text{kN/m}\times(5\ \text{m})^2}{12}=-41.7\ \text{kN·m}$$

$$M_{CB}^{F}=41.7\ \text{kN·m}$$

各杆刚度取相对值计算，设 $EI_0=1$①，则

$$i_{BA}=\frac{4EI_0}{4}=1,\quad i_{BC}=\frac{5EI_0}{5}=1,\quad i_{CD}=\frac{4EI_0}{4}=1$$

$$i_{BE}=\frac{3EI_0}{4}=\frac{3}{4},\quad i_{CF}=\frac{3EI_0}{6}=\frac{1}{2}$$

由式(7－5)，(7－8)，(7－9)，再叠加固端弯矩，可列出各杆杆端弯矩如下：

$$M_{BA}=3i_{BA}\theta_B+M_{BA}^{F}=3\theta_B+40$$

$$M_{BC}=4i_{BC}\theta_B+2i_{BC}\theta_C+M_{BC}^{F}=4\theta_B+2\theta_C-41.7$$

$$M_{CB}=2i_{BC}\theta_B+4i_{BC}\theta_C+M_{CB}^{F}=2\theta_B+4\theta_C+41.7$$

$$M_{CD}=3i_{CD}\theta_C=3\theta_C$$

$$M_{BE}=4i_{BE}\theta_B=3\theta_B,\quad M_{EB}=2i_{BE}\theta_B=1.5\theta_B$$

$$M_{CF}=4i_{CF}\theta_C=2\theta_C,\quad M_{FC}=2i_{CF}\theta_C=\theta_C$$

(3) 位移法方程

结点 B 平衡(图 7－9b)：

$$\sum M_B=0,\qquad M_{BA}+M_{BC}+M_{BE}=0$$

将上步结果代入得

$$10\theta_B+2\theta_C-1.7=0 \tag{a}$$

结点 C 平衡(图 7－9c)：

$$\sum M_C=0,\qquad M_{CB}+M_{CD}+M_{CF}=0$$

将上步结果代入得

$$2\theta_B+9\theta_C+41.7=0 \tag{b}$$

(4) 求基本未知量

解(a)、(b)两方程，得

$$\theta_B=1.15,\quad \theta_C=-4.89$$

(5) 求杆端弯矩

将求得的位移代入上述各杆杆端弯矩公式，得

① 当超静定结构内力计算时，若各杆刚度均按相对值取用，即只是一个比例关系，而没有取真值，则中间运算式中不再注明其单位，单位只在最后结果中给出。下同。

$$M_{BA}=43.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{BC}=-46.9\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{CB}=24.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{CD}=-14.7\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{BE}=3.45\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{EB}=1.73\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{CF}=-9.78\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{FC}=-4.89\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

最后指出，因为各杆用的是相对刚度，因而例题中求出的位移并不是真值。如果要求位移的真值，则刚度也必须采用真值。

§7-4 有侧移刚架的计算

刚架分为无侧移和有侧移两类。图7-10中刚架除有结点转角外，还有结点线位移，它们都是有侧移刚架。

用位移法计算有侧移的刚架时，基本思路与无侧移刚架基本相同，但在具体作法上增加了一些新内容：

(1) 在基本未知量中，要包括结点线位移；

(2) 在杆件计算中，要考虑线位移的影响；

(3) 在建立基本方程时，要增加与结点线位移对应的平衡方程。

在下面的讨论中将着重讲解上述新内容。

1. 基本未知量的选取

计算有侧移刚架时，位移法的基本未知量既包括刚结点角位移，又包括结点线位移。现在着重讨论结点线位移的选取问题。

如果不忽略杆件在轴力作用下的轴向变形，则平面刚架中每个结点有两个线位移。例如，图7-10a、b、c的刚架各有2、3、4个结点，故分别有4、6、8个结点线位移。

结点线位移的个数越多，则位移法的计算工作量越大。为了减少基本未知量的个数，使计算得到简化，通常在位移法中忽略轴力对变形的影响。更详细地说，我们引入如下假设：

(1) 忽略轴力产生的轴向变形。

(2) 结点转角 θ 和各杆弦转角 φ 都很微小。

根据假设(1)，杆件变形前的直线长度与变形后的曲线长度可认为相等。根

据假设(2),变形后的曲线长度与弦线长度可认为相等。综合起来,可得出如下结论:尽管杆件发生弯曲变形,但杆件两端结点之间的距离仍保持不变。

根据上述假设,下面研究独立的结点线位移的个数。

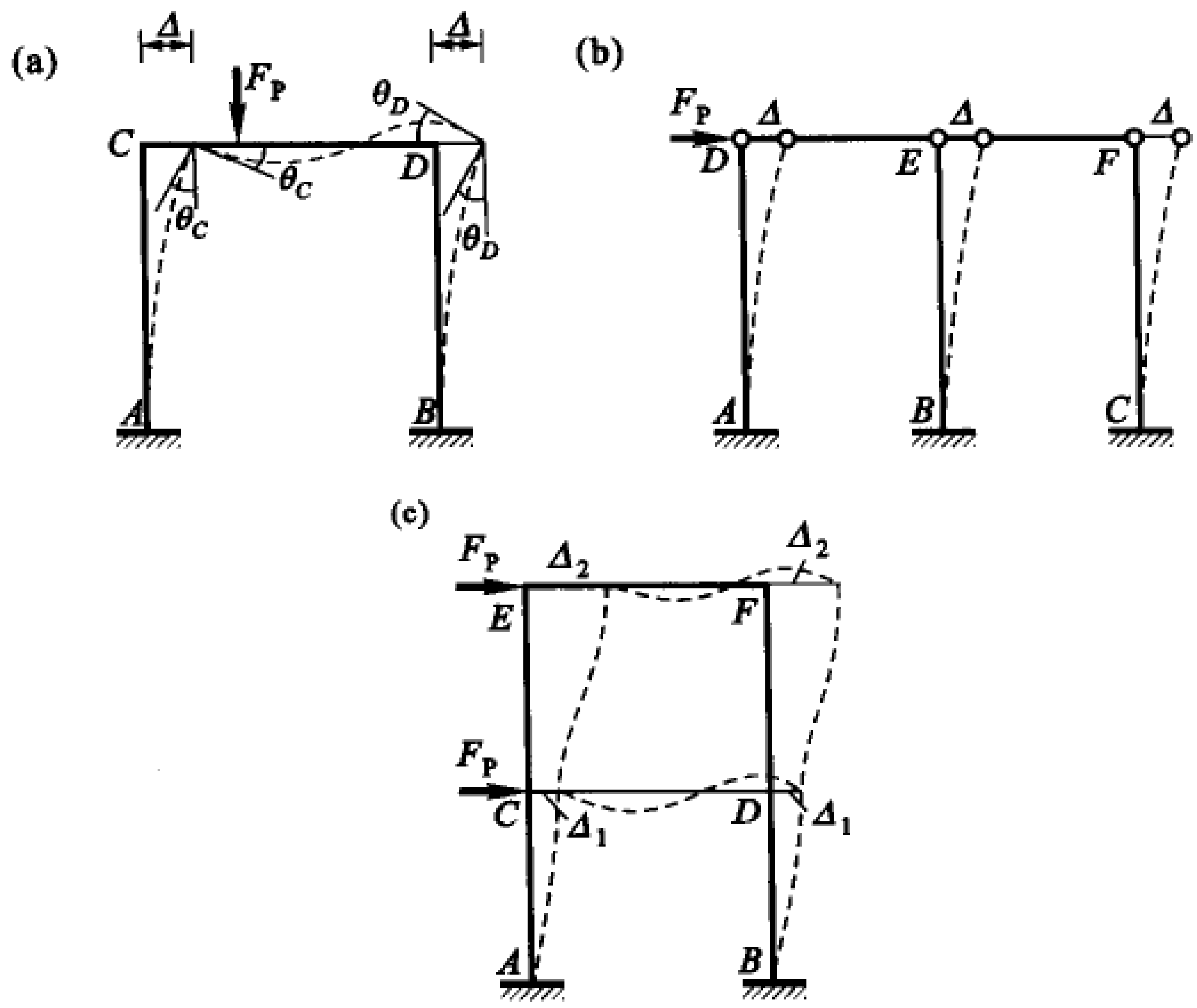


图 7-10

以图 7-10a 中的刚架为例。由于各杆两端距离假设不变,因此在微小位移的情况下,结点 C 和 D 都没有竖向位移,而且结点 C 和 D 的水平位移也彼此相等,可用一个符号 Δ 来表示。因此,原来两个结点的 4 个线位移现在归结为一个独立的结点线位移 Δ。全部基本未知量只有三个,即 θ_C、θ_D 和 Δ。

对于一般刚架,独立结点线位移的数目常可由观察判定。图 7-10b、c 所示两个例子,虚线表示变形后杆的曲线。在图 7-10b 中,只有一个独立线位移 Δ,因为由水平梁连起来的各结点 D、E、F 其水平线位移必然相同。图 7-10c 所示为由水平梁与立柱组成的两层刚架,4 个刚结点 C、D、E、F 有 4 个转角;此外,还有两个独立结点线位移 Δ_1 和 Δ_2。显然,每层有一个线位移,因而独立结点线位移的数目等于刚架的层数。

由于在刚架计算中,不考虑各杆长度的改变,因而结点的独立线位移的数目还可以用几何构造分析的方法来确定。如果把所有的刚结点(包括固定支座)都改为铰结点,则此铰结体系的自由度数就是原结构的独立结点线位移的数目。换句话说,为了使此铰结体系成为几何不变而需添加的链杆数就等于原结构的独立结点线位移的数目。以图 7-11a 所示刚架为例,为了确定独立结点线位移

的数目，把所有刚结点都改为铰结点，得到图7－11b中实线所示的体系。添加两个链杆（虚线）后，体系就由几何可变成为几何不变（实际上成为一个简单桁架）。由此可知，图7－11a中的刚架有两个独立结点线位移。

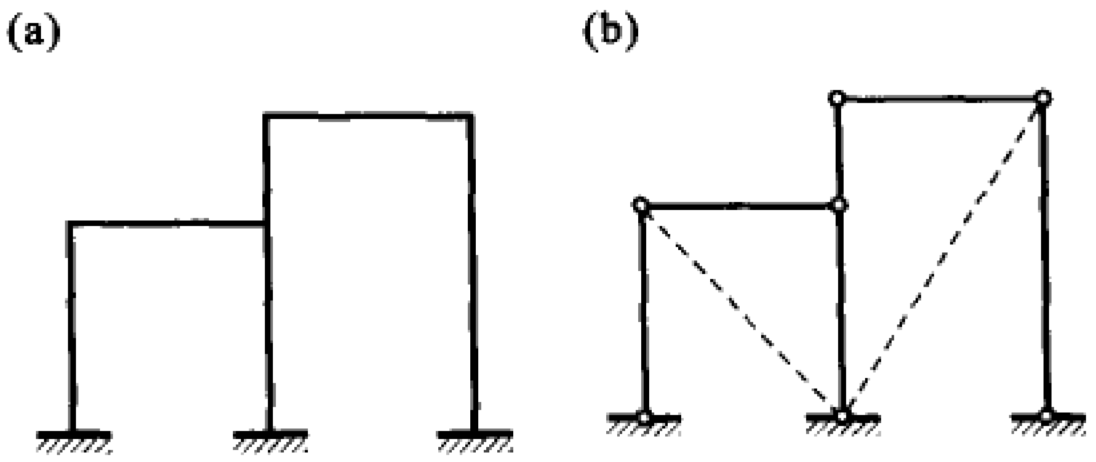


图　7－11

总起来看，用位移法计算有侧移刚架时，基本未知量包括结点转角和独立结点线位移。结点转角的数目等于刚结点的数目，独立结点线位移的数目等于铰结体系的自由度的数目。在选取基本未知量时，由于既保证了刚结点处各杆杆端转角彼此相等，又保证了各杆杆端距离保持不变。因此，在拆了再搭的过程中，能够保证各杆位移的彼此协调，因而能够满足变形连续条件。

2．基本方程的建立

基本未知量分为刚结点角位移和独立结点线位移两类，与此对应，基本方程也分为两类。下面举例说明位移法的基本方程是如何建立的。

图7－12a所示刚架，柱的线刚度为 i，梁的线刚度为 $2i$。基本未知量为刚结点 B 的转角 θ_B 和柱顶的水平位移 Δ，如图7－12b所示。

进行杆件计算时，要注意 AB 和 CD 两杆的两端结点有相对侧移 Δ，但杆 BC 的两端结点只有整体的水平位移，而没有相对的垂直位移。利用式(7－8)、(7－9)，并叠加固端弯矩后，可列出各杆的杆端弯矩如下：

$$\left.\begin{aligned}
M_{AB} &= 2i\theta_B - 6i\,\frac{\Delta}{4} - \frac{1}{12}\times 3\times 4^2 \\
M_{BA} &= 4i\theta_B - 6i\,\frac{\Delta}{4} + \frac{1}{12}\times 3\times 4^2 \\
M_{BC} &= 3(2i)\theta_B \\
M_{DC} &= -3i\,\frac{\Delta}{4}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

下面建立基本方程。首先，与结点 B 角位移 θ_B 对应，取结点 B 为隔离体（图7－12c），可列出力矩平衡方程：

$$\sum M_B = 0,\qquad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad \text{(b)}$$

利用式(a)，此平衡方程可写为

$$10i\theta_B - 1.5i\Delta + 4 = 0 \qquad (7-14a)$$

其次，与横梁水平位移 Δ 对应，取柱顶以上横梁 BC 部分为隔离体(图 7-12d)，可列出水平投影方程：

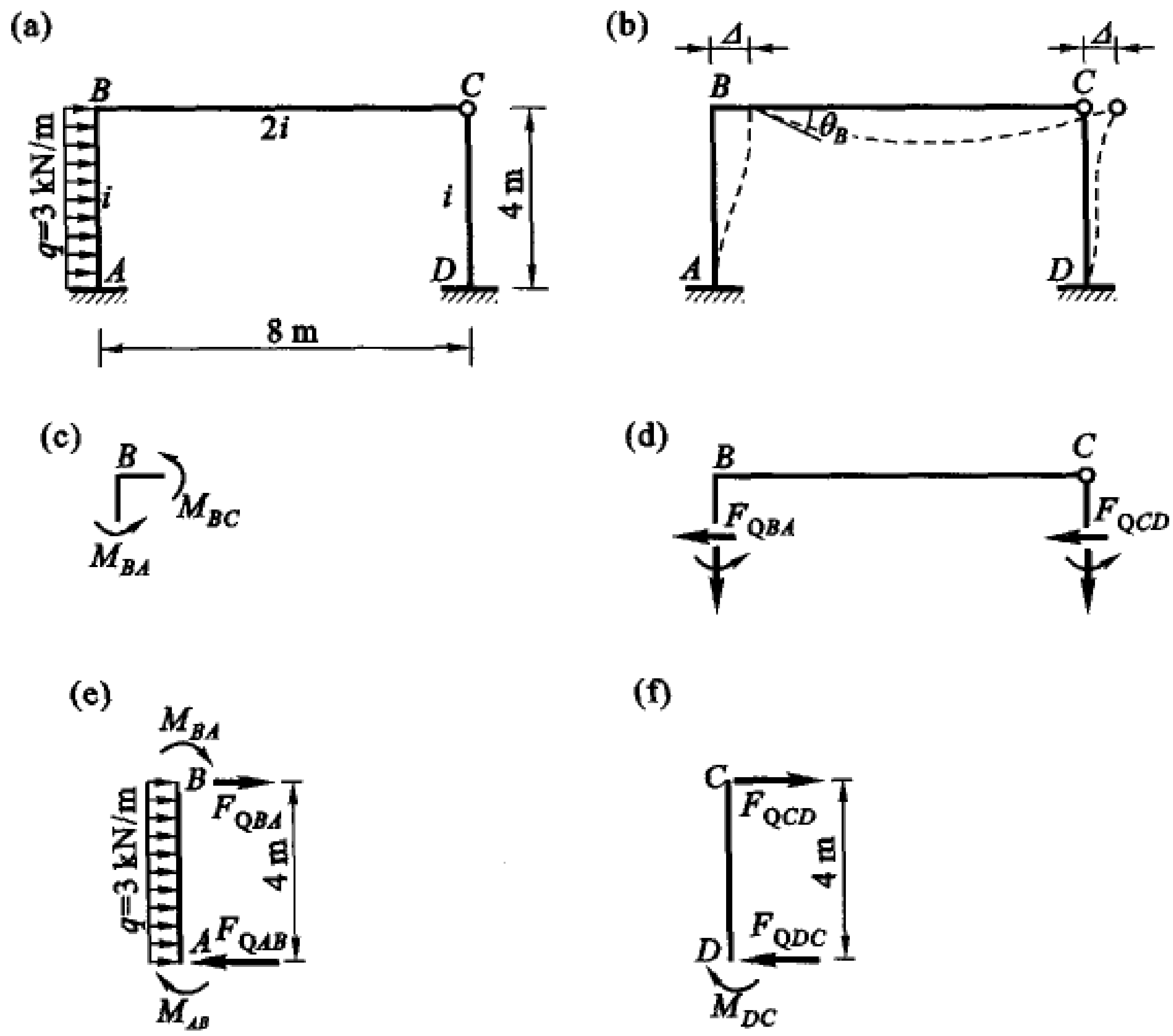


图　7-12

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{QBA} + F_{QCD} = 0 \qquad (c)$$

式(c)中的杆端剪力可先换成杆端弯矩。为此，取柱 AB 作隔离体(图 7-12e，图中杆端轴力未画出)，得

$$\sum M_A = 0, \qquad F_{QBA} = -\frac{1}{4}(M_{AB} + M_{BA}) - 6$$

再取柱 CD 作隔离体(图 7-12f)，得

$$\sum M_D' = 0, \qquad F_{QCD} = -\frac{1}{4}M_{DC}$$

将以上两剪力的表达式代入式(c)，得

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{DC} + 24 = 0 \qquad (d)$$

再利用式(a)，得

$$6i\theta_B - 3.75i\Delta + 24 = 0 \qquad (7-14b)$$

解联立方程(7-14a、b)，就可求出结点位移 θ_B 和 Δ，然后代入式(a)可求出杆端弯矩，进而可以作刚架的内力图。

一般说来,位移法的基本方程都是根据平衡方程得出的。基本未知量中每一个转角有一个相应的结点力矩平衡方程,每一个独立结点线位移有一个相应的截面平衡方程。平衡方程的个数与基本未知量的个数彼此相等,正好解出全部基本未知量。

例 7-2 试作图 7-13a 所示刚架的弯矩图,忽略横梁的轴向变形。

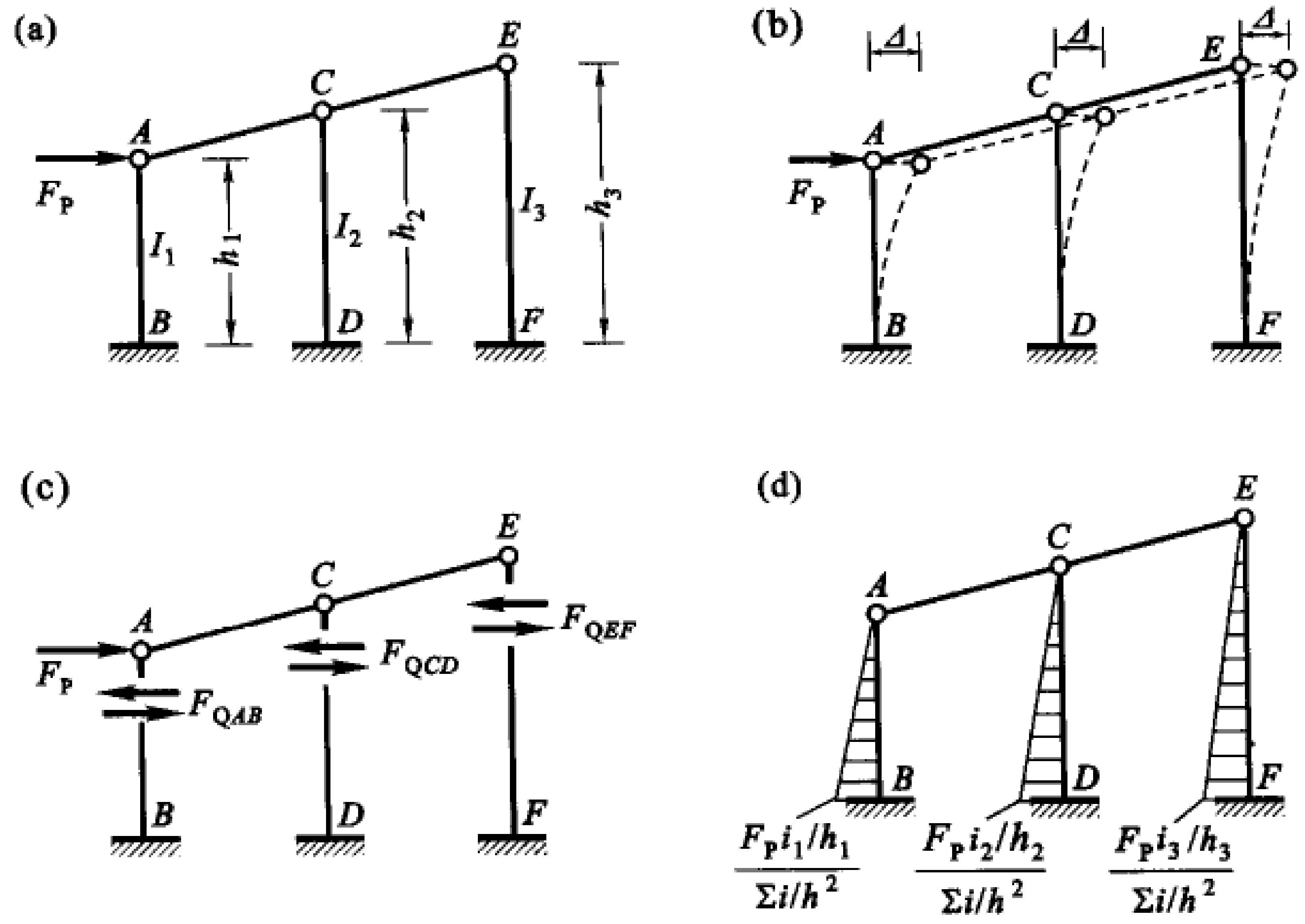


图 7-13

解 (1) 基本未知量

柱 AB、CD、EF 是平行的,因而变形时横梁只有水平移动,横梁在变形前后保持平行(图 7-13b),所以各柱顶的水平位移是相等的,只有一个独立线位移 Δ。本例没有刚结点,没有转角基本未知量。

(2) 各柱的杆端弯矩和剪力

各柱的线刚度为

$$i_1 = \frac{EI_1}{h_1}$$

$$i_2 = \frac{EI_2}{h_2}$$

$$i_3 = \frac{EI_3}{h_3}$$

由式(7-9)可知杆端弯矩为

$$M_{BA}=-3i_1\frac{\Delta}{h_1}$$

$$M_{DC}=-3i_2\frac{\Delta}{h_2}$$

$$M_{FE}=-3i_3\frac{\Delta}{h_3}$$

由每柱的平衡求得杆端剪力为

$$F_{QAB}=3i_1\frac{\Delta}{h_1^2}$$

$$F_{QCD}=3i_2\frac{\Delta}{h_2^2}$$

$$F_{QEF}=3i_3\frac{\Delta}{h_3^2}$$

(3) 位移法方程

取柱顶以上横梁部分为隔离体(图 7-13c),由水平方向的平衡条件 $\sum F_x=0$,得

$$F_P-(F_{QAB}+F_{QCD}+F_{QEF})=0$$

$$F_P-3\Delta\left(\frac{i_1}{h_1^2}+\frac{i_2}{h_2^2}+\frac{i_3}{h_3^2}\right)=0$$

求得

$$\Delta=\frac{F_P}{3\left(\frac{i_1}{h_1^2}+\frac{i_2}{h_2^2}+\frac{i_3}{h_3^2}\right)}=\frac{F_P}{3\sum\frac{i}{h^2}}$$

式中$\sum\frac{i}{h^2}$为各立柱$\frac{i}{h^2}$之和。

(4) 杆端弯矩和剪力

将 Δ 代入第(2)步各式得

$$M_{BA}=-\frac{F_P\frac{i_1}{h_1}}{\sum\frac{i}{h^2}},\quad M_{DC}=-\frac{F_P\frac{i_2}{h_2}}{\sum\frac{i}{h^2}},\quad M_{FE}=-\frac{F_P\frac{i_3}{h_3}}{\sum\frac{i}{h^2}}$$

$$F_{QAB}=\frac{F_P\frac{i_1}{h_1^2}}{\sum\frac{i}{h^2}},\quad F_{QCD}=\frac{F_P\frac{i_2}{h_2^2}}{\sum\frac{i}{h^2}},\quad F_{QEF}=\frac{F_P\frac{i_3}{h_3^2}}{\sum\frac{i}{h^2}}$$

(5) 根据杆端弯矩可画出 M 图,如图 7-13d 所示。

(6) 讨论

计算结果表明，排架仅在柱顶荷载作用时，各柱柱顶剪力 F_Q 与 $\frac{i}{h^2}$ 成正比。根据这个性质，可以用下述方法求此排架的内力：荷载 F_P 作为各柱总剪力，按各柱 $\frac{i}{h^2}$ 的比例分配给各柱，得各柱剪力，根据柱顶剪力，即可画出弯矩图（图7－13d）。$\frac{i}{h^2}$ 称为排架柱的侧移刚度，这种解法称为剪力分配法。

例7－3　试作图7－14a所示刚架的内力图。

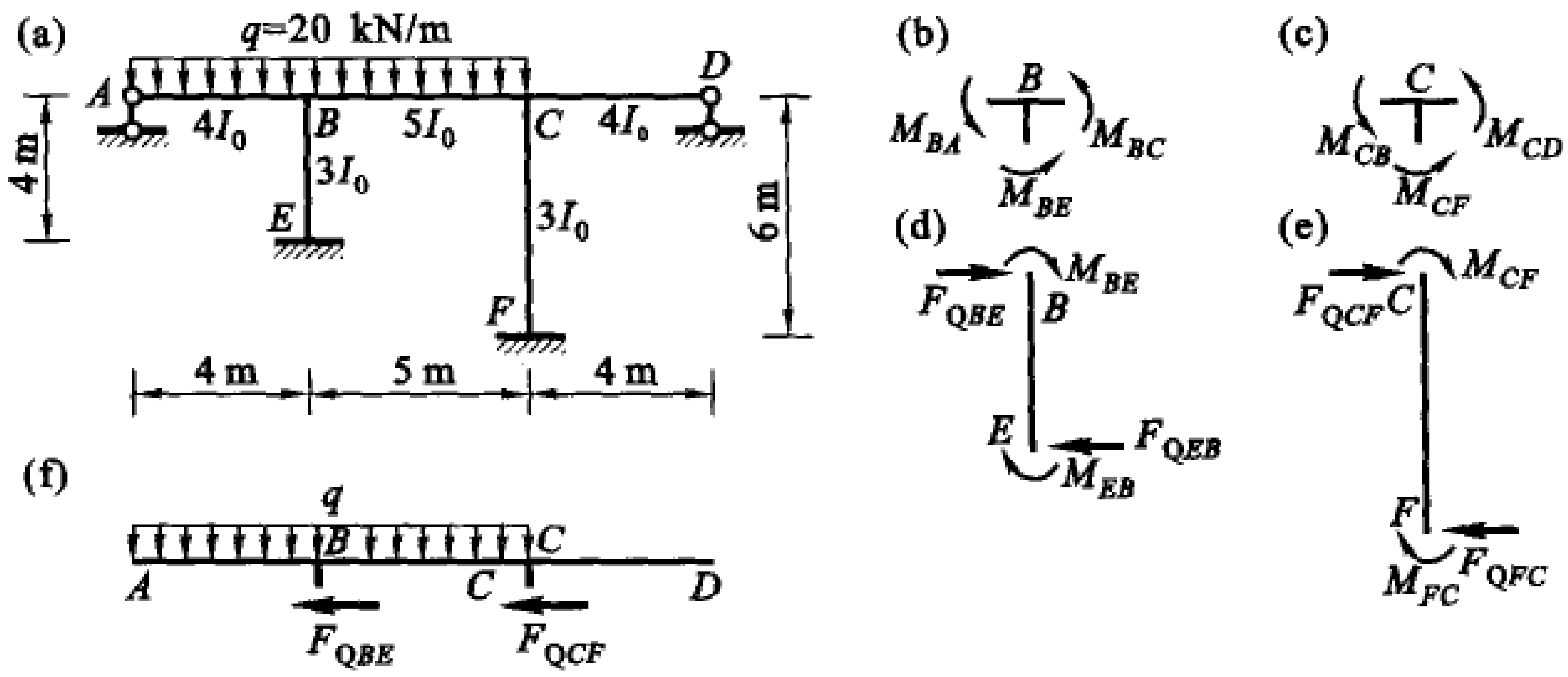


图　7－14

解　(1) 基本未知量

本例与例7－1不同处是结点 B、C 除转角 θ_B 和 θ_C 外，还有水平线位移 Δ。

(2) 杆端弯矩

固端弯矩在例7－1中已求出。仍假设各杆刚度取相对值，由式(7－5)、(7－8)、(7－9)叠加固端弯矩后，各杆杆端弯矩为

$$M_{BA} = 3i_{BA}\theta_B + M^F_{BA} = 3\theta_B + 40$$

$$M_{BC} = 4i_{BC}\theta_B + 2i_{BC}\theta_C + M^F_{BC} = 4\theta_B + 2\theta_C - 41.7$$

$$M_{CB} = 2i_{BC}\theta_B + 4i_{BC}\theta_C + M^F_{CB} = 2\theta_B + 4\theta_C + 41.7$$

$$M_{CD} = 3i_{CD}\theta_C = 3\theta_C$$

$$M_{BE} = 4i_{BE}\theta_B - 6\frac{i_{BE}}{l_{BE}}\Delta = 3\theta_B - 1.125\Delta$$

$$M_{EB} = 2i_{BE}\theta_B - 6\frac{i_{BE}}{l_{BE}}\Delta = 1.5\theta_B - 1.125\Delta$$

$$M_{CF} = 4i_{CF}\theta_C - 6\frac{i_{CF}}{l_{CF}}\Delta = 2\theta_C - 0.5\Delta$$

$$M_{FC}=2i_{CF}\theta_C-6\frac{i_{CF}}{l_{CF}}\Delta=\theta_C-0.5\Delta$$

(3) 位移法方程

考虑结点 B 的平衡(图 7-14b),

$$\sum M_B=0,\qquad M_{BA}+M_{BC}+M_{BE}=0$$

得

$$10\theta_B+2\theta_C-1.125\Delta-1.7=0 \tag{a}$$

考虑结点 C 的平衡(图 7-14c):

$$\sum M_C=0,\quad M_{CB}+M_{CD}+M_{CF}=0$$

得

$$2\theta_B+9\theta_C-0.5\Delta+41.7=0 \tag{b}$$

以截面切断柱顶,考虑柱顶以上横梁 $ABCD$ 部分的平衡(图 7-14f):

$$\sum F_x=0,\qquad F_{QBE}+F_{QCF}=0$$

再考虑柱 BE 和柱 CF 的平衡(图 7-14d 和 e):

$$\sum M_E=0,\qquad F_{QBE}=-\frac{M_{BE}+M_{EB}}{4}$$

$$\sum M_F=0,\qquad F_{QCF}=-\frac{M_{CF}+M_{FC}}{6}$$

故截面平衡方程可写为

$$\frac{M_{BE}+M_{EB}}{4}+\frac{M_{CF}+M_{FC}}{6}=0$$

得

$$6.75\theta_B+3\theta_C-4.37\Delta=0 \tag{c}$$

(4) 求基本未知量

联立解(a)、(b)、(c)三个方程,得

$$\theta_B=0.94,\quad \theta_C=-4.94,\quad \Delta=-1.94$$

(5) 求杆端弯矩

将求得的位移代入第(2)步各式,得

$$M_{BA}=42.82\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{BC}=-47.82\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{CB}=23.82\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{CD}=-14.8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{BE}=5.0\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{EB}=3.59\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{CF}=-8.91\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FC} = -3.97\ \mathrm{kN \cdot m}$$

(6) 作内力图

由杆端弯矩作出的 M 图,如图 7-15a 所示。由每杆的隔离体图,用平衡方程可求出杆端剪力,然后作 F_Q 图(图 7-15b)。由结点的平衡方程可求出杆端轴力,然后作 N 图(图 7-15c)。

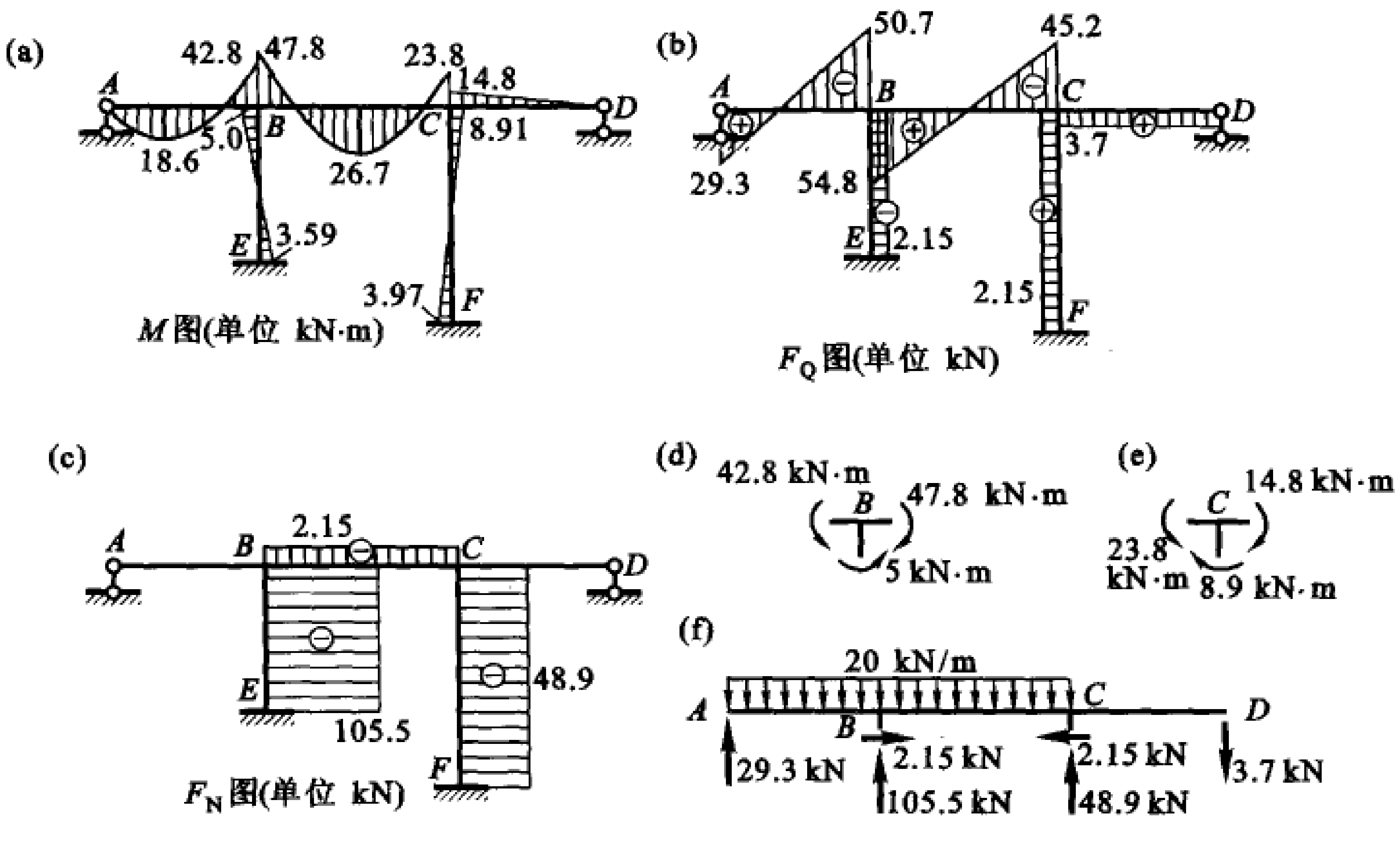


图 7-15

(7) 校核

在力法中曾经详细讨论过超静定结构计算的校核问题,其中许多作法这里仍然适用。但是要注意一点:在位移法中,一般以校核平衡条件为主;与此相反,在力法中,一般以校核变形连续条件为主。这是因为在选取位移法的基本未知量时已经考虑了变形连续条件,而且刚度系数的计算比较简单,不易出错,因而变形连续条件在位移法中不作为校核的重点。

图 7-15 中的内力图可进行平衡条件校核如下:首先,由图 7-15d、e 看出,结点 B 和 C 处的力矩平衡条件是满足的。其次,在图7-15f中取柱顶以上梁 $ABCD$ 部分为隔离体,可校核水平和竖向平衡条件:

$$\sum F_x = 0, \quad 2.15\ \mathrm{kN} - 2.15\ \mathrm{kN} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad 29.3\ \mathrm{kN} + 105.5\ \mathrm{kN} + 48.9\ \mathrm{kN} - 20\ \mathrm{kN/m} \times 9\ \mathrm{m} - 3.7\ \mathrm{kN}$$

$$= 183.7\ \mathrm{kN} - 183.7\ \mathrm{kN} = 0$$

§7－5　位移法的基本体系

在上面的讨论中，介绍了位移法的基本未知量和基本方程，基本方程是直接由平衡条件建立的。本节介绍通过位移法的基本体系建立位移法典型方程的解法。这种方法解题程序与力法相对应，有助于进一步理解位移法基本方程的意义，另外也为以后将要介绍的矩阵位移法打下一些基础。

结合图 7－16a 所示的刚架加以说明。这个刚架前面在§7－4 的图 7－12 中已经讨论过，可以前后对照学习。

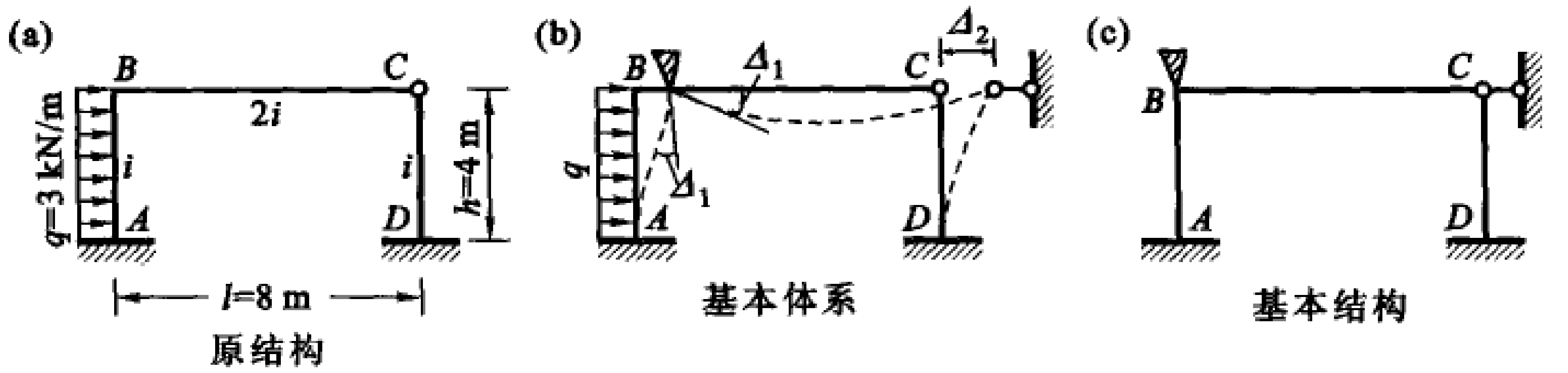


图　7－16

这个刚架有两个基本未知量：结点 B 的转角 Δ_1 和结点 C 的水平位移 Δ_2。这里，位移法的基本未知量，不管是角位移还是线位移，统一用 Δ 表示，以便与力法中使用的基本未知量 X 相对照。

图 7－16b 所示为位移法采用的基本体系：在刚结点 B 加约束控制结点 B 的转角（注意，不控制线位移），在结点 C 加水平支杆控制结点 C 的水平位移。

基本体系与原结构的区别在于：增加了与基本未知量相应的人为约束，从而使基本未知量由被动的位移变成受人工控制的主动的位移。

在位移法基本体系中，如果不看其中作用的力系，而只看其中的结构，则得到图 7－16c 所示的结构，称为位移法基本结构。位移法基本结构就是在原结构中增加了与位移法基本未知量相应的可控约束而得到的结构。

基本体系是用来计算原结构的工具或桥梁。一方面，它可以转化成原结构，可以代表原结构；另一方面，它的计算又比较简单。因为加了人工控制的约束之后，原来的整体结构被分隔成许多杆件（这些杆件各自单独变形，互不干扰；且已经知道了它们的转角位移方程），结构的整体计算拆成许多单个杆件的计算，从而使计算简化。应该注意，在力法中是用撤除约束的办法达到简化计算的目的。在位移法中是用增加约束的办法达到简化计算的目的。措施相反，效果相同。

现在利用基本体系来建立基本方程。

分析：在什么条件下，基本体系才能转化成原结构。这个转化条件就是位移法的基本方程。下面利用基本结构分两步来考虑。

第一步，控制附加约束，使结点位移 Δ_1 和 Δ_2 全部为零，这时基本结构处于锁住状态，施加荷载后，可求出基本结构中的内力（图 7-17a），同时在附加约束中会产生约束力矩 F_{1P} 和约束水平力 F_{2P}。这些约束力在原结构中是没有的。

第二步，再控制附加约束，使基本结构发生结点位移 Δ_1 和 Δ_2，这时附加约束中的约束力 F_1 和 F_2 将随之改变。如果控制结点位移 Δ_1 和 Δ_2 使与原结构的实际值正好相等，则约束力 F_1 和 F_2 即完全消失，即得到如图 7-16b 所示的基本体系。这时，基本体系形式上虽然还有附加约束，但实际上它们已经不起作用，因而基本体系实际上处于放松状态，而与原结构完全相同。

由此看出，基本体系转化为原结构的条件是：基本结构在给定荷载及结点位移 Δ_1 和 Δ_2 共同作用下，在附加约束中产生的总约束力 F_1 和 F_2 应等于零。即

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 0 \\ F_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7-15}$$

这就是建立位移法基本方程的条件。

下面利用叠加原理，把基本体系中的总约束力 F_1 和 F_2 分解成几种情况分别计算：

（1）荷载单独作用——相应的约束力为 F_{1P} 和 F_{2P}（图 7-17a）。

（2）单位位移 $\Delta_1=1$ 单独作用——相应的约束力为 k_{11} 和 k_{21}（图 7-17b）。

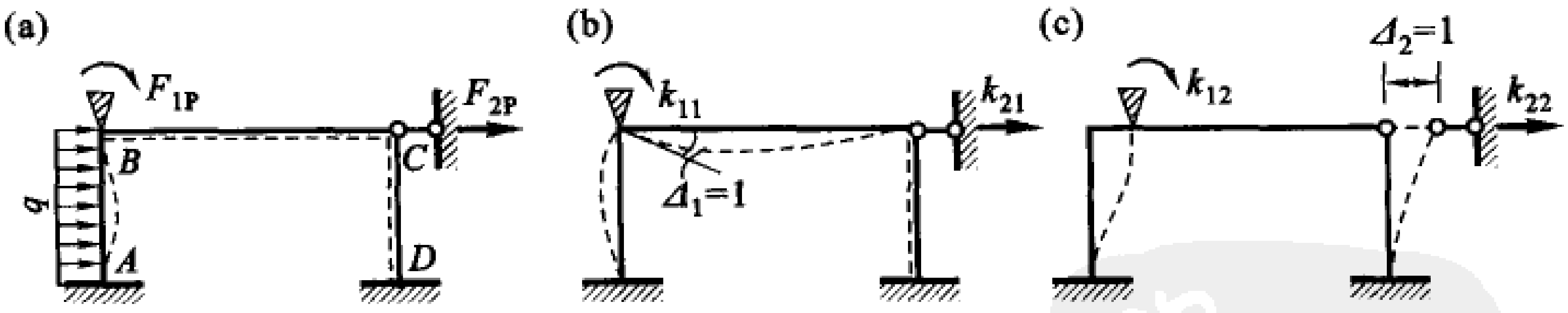


图 7-17

（3）单位位移 $\Delta_2=1$ 单独作用——相应的约束力为 k_{12} 和 k_{22}（图 7-17c）。

叠加以上结果，则总约束力为

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= k_{11}\Delta_1 + k_{12}\Delta_2 + F_{1P} \\ F_2 &= k_{21}\Delta_1 + k_{22}\Delta_2 + F_{2P} \end{aligned}\right\} \tag{7-16}$$

再考虑式（7-15），得位移法的基本方程为

$$\left.\begin{array}{l}k_{11}\Delta_1+k_{12}\Delta_2+F_{1P}=0\\k_{21}\Delta_1+k_{22}\Delta_2+F_{2P}=0\end{array}\right\}\qquad(7-17)$$

利用基本方程式(7-17)即可求出基本未知量 Δ_1 和 Δ_2。

从基本体系来看,基本方程具有明确的意义,即基本体系应当实际上处于放松状态,附加约束中的约束力应当全部为零;实质上是要求原结构满足平衡方程。

由此可见,位移法的基本思路仍然是过渡法,即由基本体系过渡到原结构。过渡的步骤是先锁住后放松,根据放松的条件建立位移法的基本方程。这里讲的"先锁后松"与前面讲的"先拆后搭",是从不同的角度对位移法的基本思路加以概括;同时,两种说法也是相通的,"锁住"实际上是把结构的整体变形"拆成"孤立的杆件变形,"放松"是要求附加约束实际上不起作用,也就是要求各个杆件综合在一起时能够满足平衡条件。

下面按照上述步骤进行具体计算。

(1) 基本结构在荷载作用下的计算。

先分别求各杆的固端弯矩,作出弯矩图如图 7-18a 所示。基本结构在荷载作用下的弯矩图称为 M_P 图。

取结点 B 为隔离体(图 7-18b),求得 $F_{1P}=4\ \text{kN·m}$。

取柱顶以上横梁 BC 部分为隔离体(图 7-18c),已知立柱 BA 的固端剪力 $F_{QBA}=-\dfrac{qh}{2}=-\dfrac{3\times4}{2}\ \text{kN}=-6\ \text{kN}$,因此 $F_{2P}=-6\ \text{kN}$。

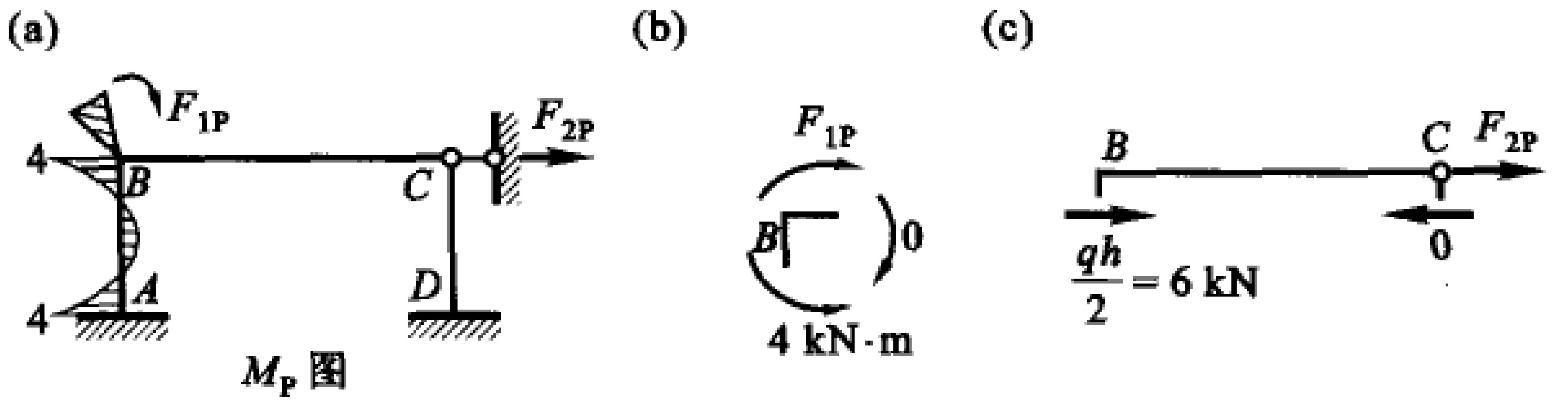


图 7-18

(2) 基本结构在单位转角 $\Delta_1=1$ 作用下的计算。

当结点 B 转角 $\Delta_1=1$ 时,分别求各杆的杆端弯矩,作出弯矩图($\overline{M}_1$ 图)如图 7-19a 所示。

由图 7-19b、c,得

$$k_{11}=4i+3(2i)=10i,\quad k_{21}=-1.5i$$

(3) 基本结构在单位水平位移 $\Delta_2=1$ 作用下的计算。

当结点 B、C 的水平位移 $\Delta_2=1$ 时,分别求各杆的杆端弯矩,作出弯矩图($\overline{M}_2$ 图)如图 7-20a 所示。

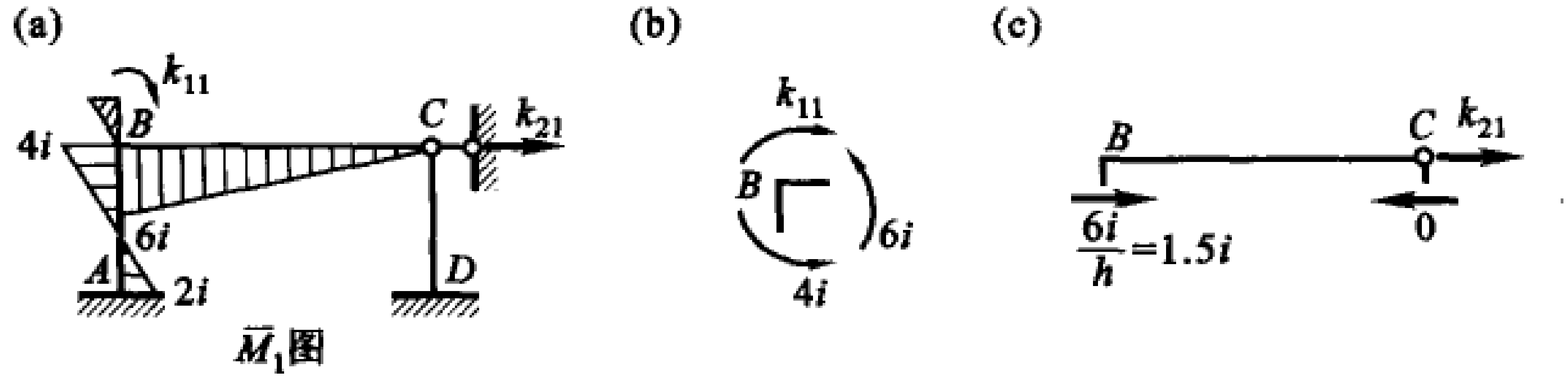


图 7-19

由图 7-20b、c,得

$$k_{12} = -1.5i,\quad k_{22} = \frac{15}{16}i$$

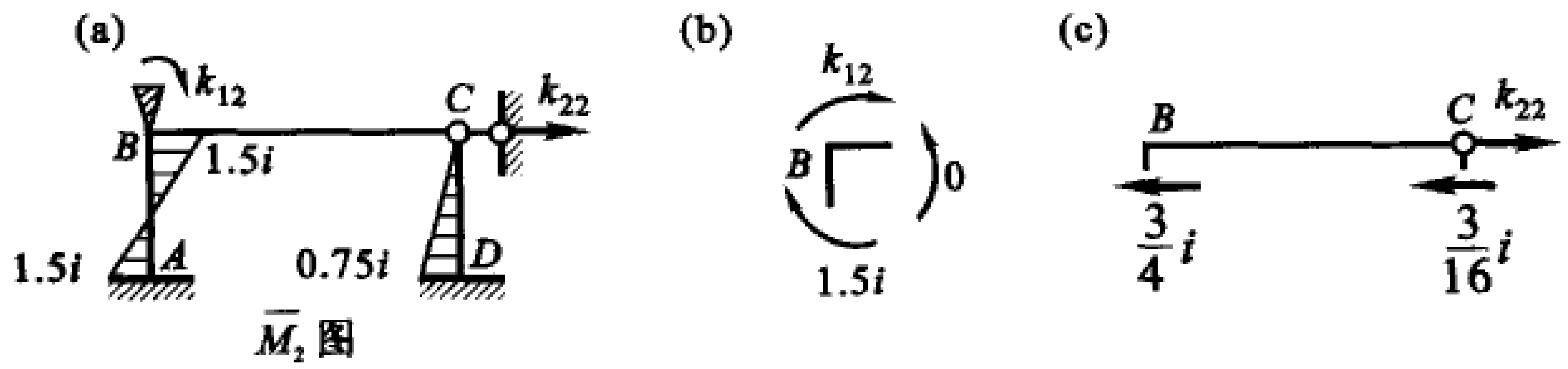


图 7-20

(4) 基本方程

由式(7-17),列出基本方程如下:

$$10i\Delta_1 - 1.5i\Delta_2 + 4 = 0$$

$$-1.5i\Delta_1 + \frac{15}{16}i\Delta_2 - 6 = 0$$

这里得出的基本方程与前面在§7-4中得出的式(7-14a、b)相同。

由基本方程可求出:

$$\Delta_1 = 0.737\frac{1}{i},\quad \Delta_2 = 7.58\frac{1}{i}$$

利用下列叠加公式作刚架的 M 图:

$$M = \overline{M}_1\Delta_1 + \overline{M}_2\Delta_2 + M_P \tag{7-18}$$

杆端弯矩如下:

$$M_{AB} = 2i\times\left(0.737\frac{1}{i}\right) - 1.5i\times\left(7.58\frac{1}{i}\right) - 4 = -13.62\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = 4i\times\left(0.737\frac{1}{i}\right) - 1.5i\times\left(7.58\frac{1}{i}\right) + 4 = -4.42\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 6i\times\left(0.737\frac{1}{i}\right) = 4.42\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC}=-0.75i\times\left(7.58\frac{1}{i}\right)=-5.69\ \mathrm{kN\cdot m}$$

根据杆端弯矩作出刚架的 M 图如图 7-21 所示。

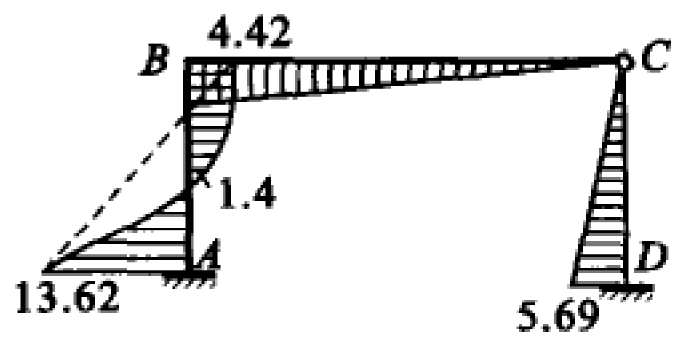


图 7-21

上面对具有两个基本未知量的问题,说明了位移法的基本体系和基本方程的意义。对于具有 n 个基本未知量的问题,位移法的基本方程可参照式(7-17)写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}k_{11}\Delta_1+k_{12}\Delta_2+\cdots+k_{1n}\Delta_n+F_{1P}=0\\k_{21}\Delta_1+k_{22}\Delta_2+\cdots+k_{2n}\Delta_n+F_{2P}=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\k_{n1}\Delta_1+k_{n2}\Delta_2+\cdots+k_{nn}\Delta_n+F_{nP}=0\end{aligned}\right\}\tag{7-19}$$

上式与力法典型方程是对应的,称为位移法典型方程,这里

$$\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}$$

称为结构的刚度矩阵,其中系数称为结构的刚度系数。由反力互等定理可知

$$k_{ij}=k_{ji}$$

因此,结构刚度矩阵也是一个对称矩阵,主对角线上的系数,称为主系数,恒大于零;其他系数称为副系数,可为正,可为负,也可为零。

§7-3、§7-4 和本节以不同的表现形式解决了位移法中把拆开的杆件组装成原结构的问题,是位移法的主体内容;这与第 9 章矩阵位移法中的整体分析是相对应的。

§7-6 对称结构的计算

对称的连续梁和刚架在工程中应用很多。作用于对称结构上的任意荷载,可以分为对称荷载和反对称荷载两部分分别计算。在对称荷载作用下,变形是对称的,弯矩图和轴力图是对称的,而剪力图是反对称的。在反对称荷载作用下,变形是反对称的,弯矩图和轴力图是反对称的,而剪力图是对称的。利用这些规则,计算对称连续梁或对称刚架时,只需计算这些结构的半边结构。

下面讨论半边结构的取法。

1. 奇数跨对称结构

(1) 对称荷载(图 7-22a)

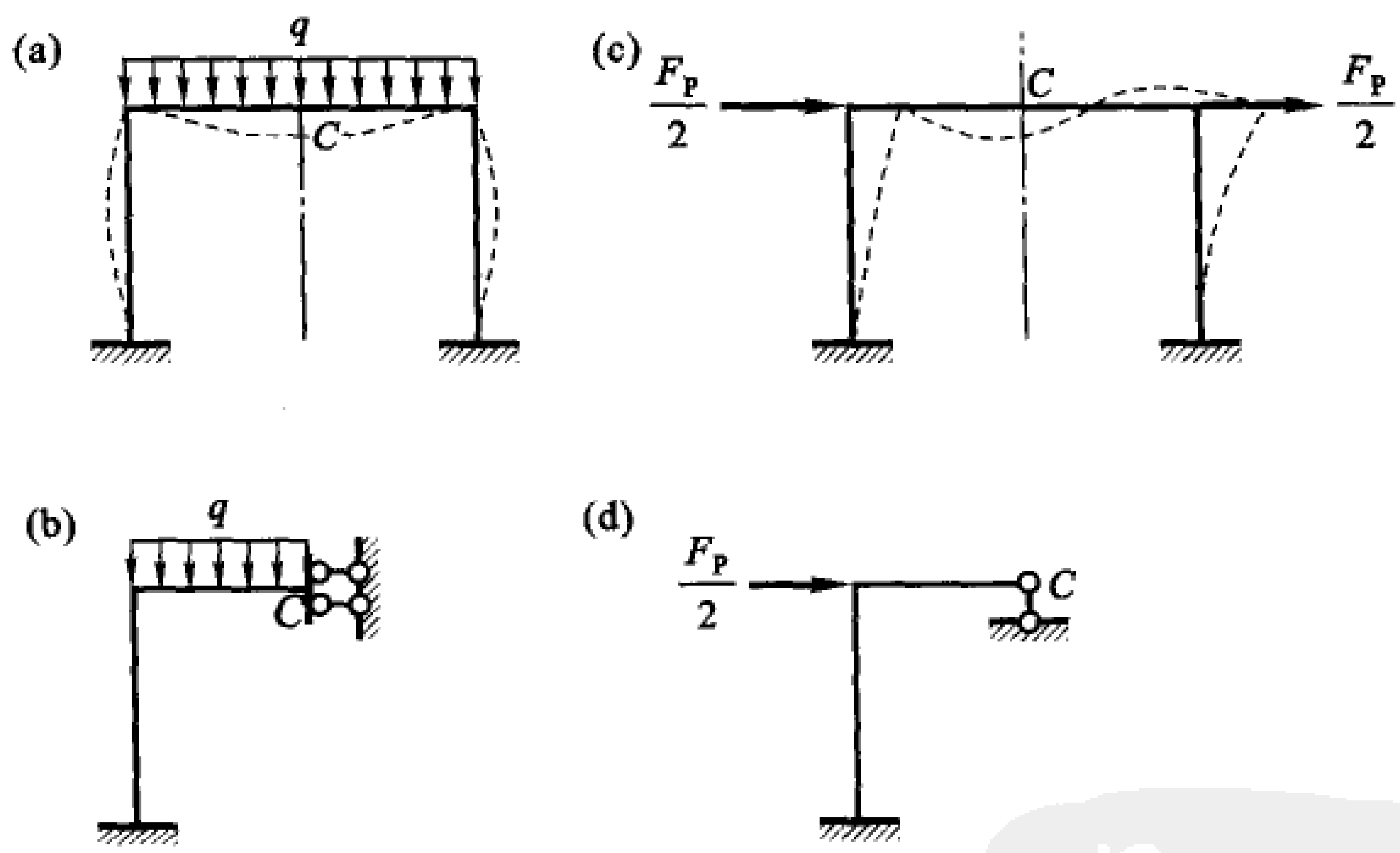


图 7-22

在对称轴上的截面 C 没有转角和水平位移,但可有竖向位移。计算中所取半边结构如图 7-22b 所示,C 端取为滑动支承端。

(2) 反对称荷载(图 7-22c)

在对称轴上的截面 C 没有竖向位移,但可有水平位移和转角。计算中所取的半边结构如图 7-22d 所示,C 端为辊轴支座。

2. 偶数跨对称结构

(1) 对称荷载(图 7-23a)

在对称轴上,截面 C 没有转角和水平位移,柱 CD 没有弯矩和剪力。因为

忽略杆 CD 的轴向变形，故半边结构如图 7-23b 所示。C 端为固定支座。

(2) 反对称荷载(图 7-24a)

在对称轴上，柱 CD 没有轴力和轴向位移，但有弯矩和弯曲变形。可将中间柱分成两根分柱，分柱的抗弯刚度为原柱的一半，这样问题就变为奇数跨的问题，如图 7-24b 所示，其中在两根分柱之间增加一跨，但其跨度为零。半边结构如图 7-24c 所示。因为忽略轴向变形的影响，C 处的竖向支杆可取消，半边结构也可按图 7-24d 选取。中间柱 CD 的总内力为两根分柱内力之和。由于两根分柱的弯矩、剪力相同，故总弯矩和总剪力为分柱弯矩和剪力的 2 倍。又由于两根分柱的轴力绝对值相同而正负号相反，故总轴力为零。

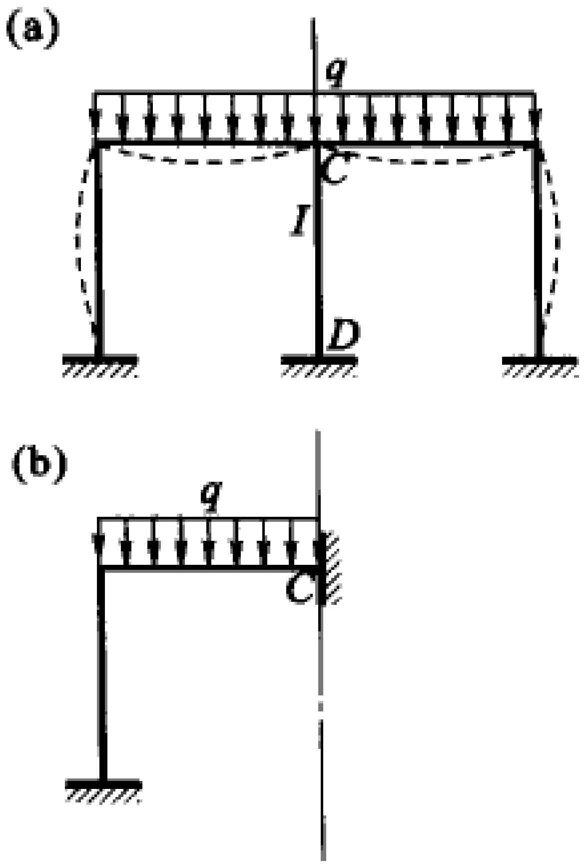


图　7-23

最后说明一下，对取得的半边结构，可以用任何适宜的方法进行计算。

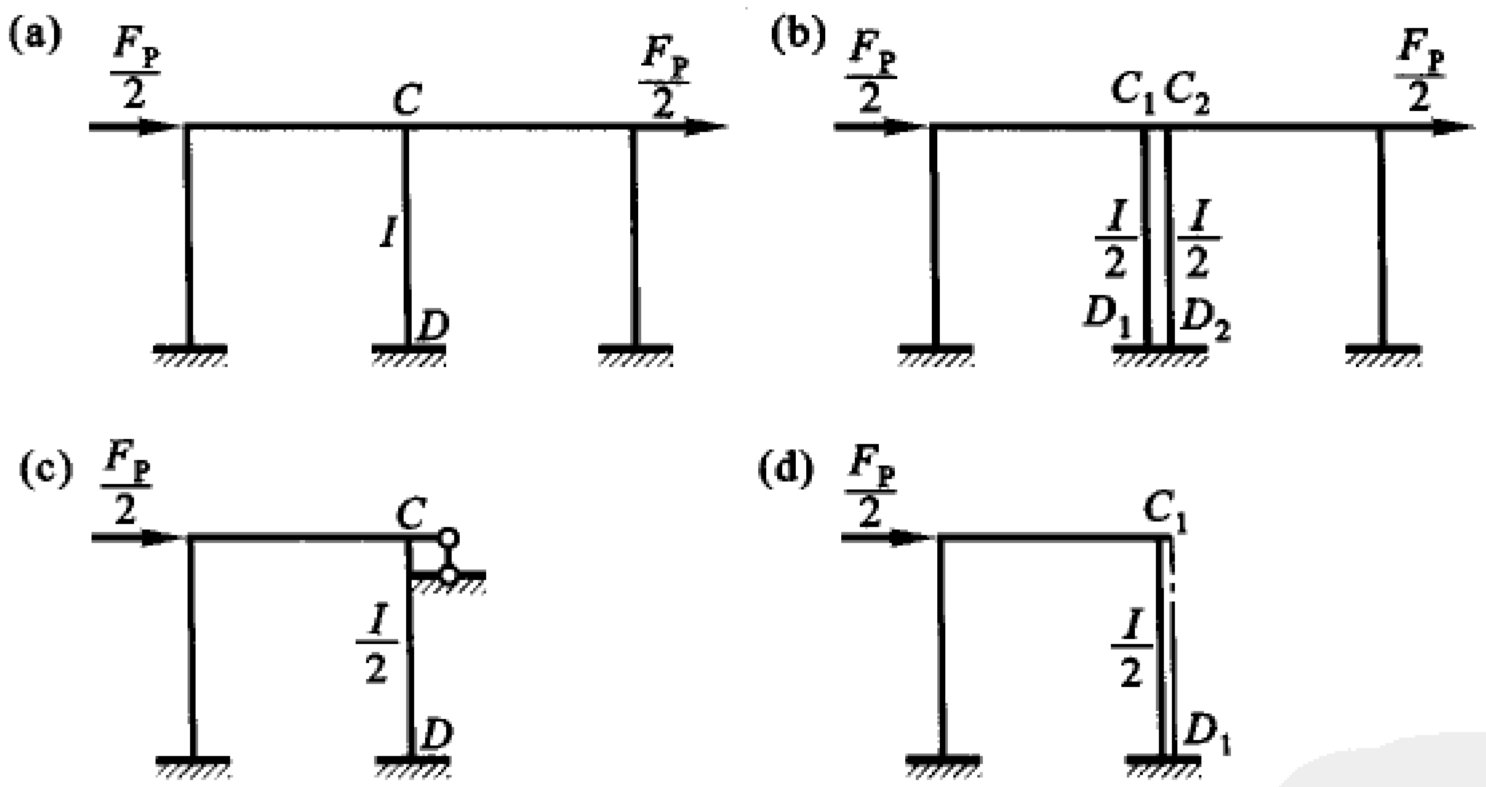


图　7-24

例 7-4　试作图 7-25a 所示吊桥结构的内力图。吊杆的 EA 与横梁 EI 之比为 $\frac{1}{20}$ m^{-2}。

解　(1) 基本未知量

图 7-25a 是一个受对称荷载的对称结构，在对称轴上的截面 C 没有转角。计算时取半边结构如图 7-25b 所示。

取结点 B 的转角 θ 和竖向位移 Δ 为基本未知量(图 7-25c)。

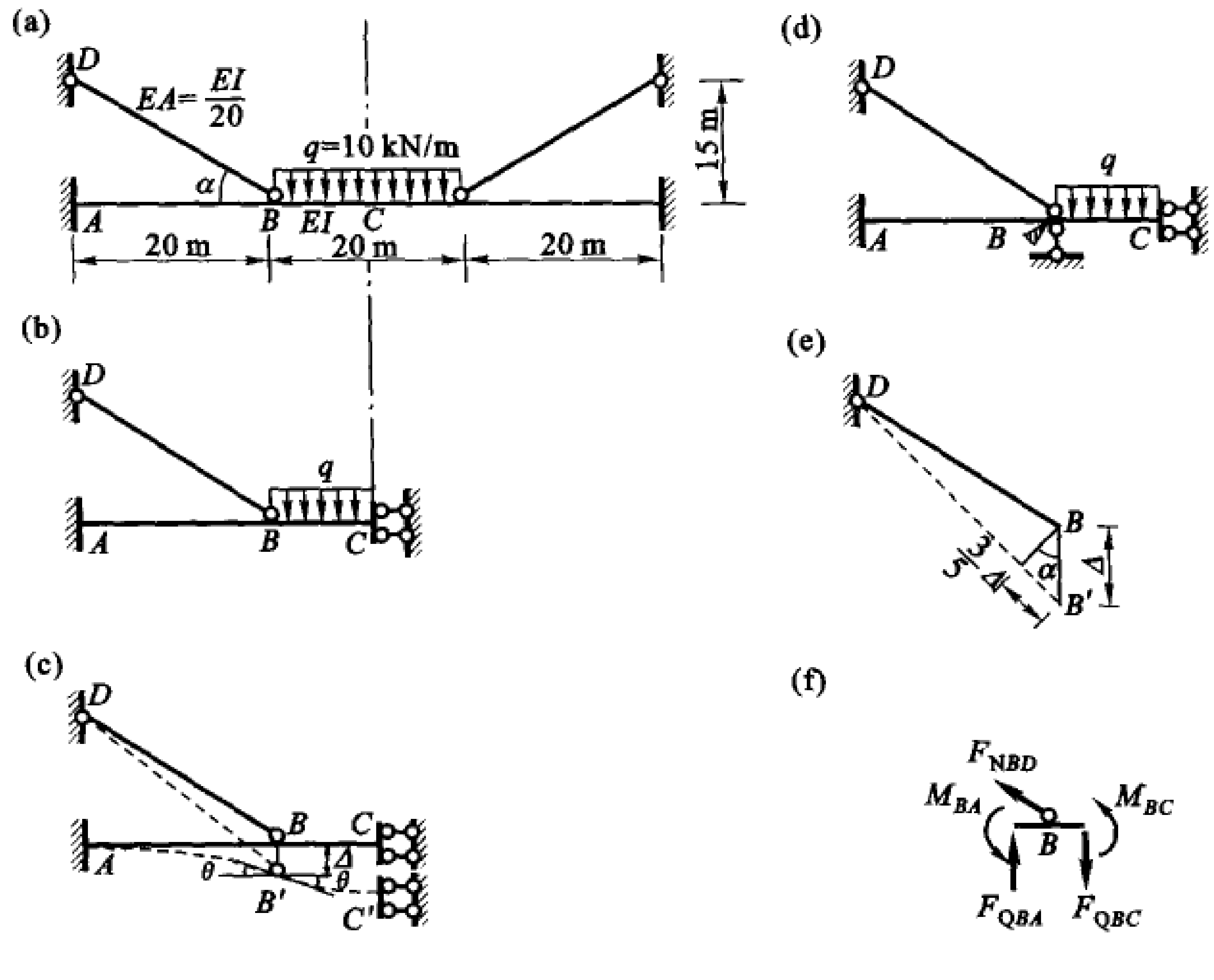


图　7－25

(2) 求固端力

在结点 B 加约束,固定转角 θ 和位移 Δ(图 7－25d)。查表 7－1 求出在荷载作用下的固端弯矩和固端剪力如下:

$$M^{F}_{BC}=-\frac{ql^2}{3}=-\frac{10\ \text{kN/m}\times(10\ \text{m})^2}{3}=-333\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M^{F}_{CB}=-\frac{ql^2}{6}=-\frac{10\ \text{kN/m}\times(10\ \text{m})^2}{6}=-167\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$F_{QBC}=ql=10\ \text{kN/m}\times 10\ \text{m}=100\ \text{kN}$$

$$F_{QCB}=0$$

(3) 求杆端力

先求由位移 θ 和 Δ 所产生的杆端力。对有荷载作用的杆,再叠加上固端力,即得杆端力如下:

杆 AB:

$$M_{AB}=2i_{AB}\theta-6i_{AB}\frac{\Delta}{l}=2\times\frac{EI}{20}\theta-\frac{6EI}{20^2}\Delta$$

$$M_{BA}=4i_{AB}\theta-6i_{AB}\frac{\Delta}{l}=4\times\frac{EI}{20}\theta-\frac{6EI}{20^2}\Delta$$

$$F_{QBA} = -\frac{M_{AB}+M_{BA}}{l} = -\frac{6EI}{20^2}\theta + \frac{12EI}{20^3}\Delta$$

杆 BC：因为 C 端为滑动支承端，B 端有线位移时，不引起杆端弯矩，所以

$$M_{BC} = \frac{EI}{10}\theta - 333$$

$$M_{CB} = -\frac{EI}{10}\theta - 167$$

$$F_{QBC} = 100\ \text{kN}$$

杆 BD：当 B 端有竖向位移 Δ 移至 B' 时（图 7-25e），杆 BD 伸长 $\frac{3}{5}\Delta$。所以，链杆 BD 的轴力为

$$F_{NBD} = \frac{EA}{l}\times\left(\frac{3}{5}\Delta\right) = \frac{\frac{EI}{20}}{25}\times\left(\frac{3}{5}\Delta\right) = \frac{3EI}{5\times20\times25}\Delta$$

(4) 列位移法方程

考虑结点 B 的平衡（图 7-25f，其中横梁轴力未画出）：

$$\sum M_B = 0,\qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\qquad \frac{3}{5}F_{NBD} + F_{QBA} - F_{QBC} = 0$$

将上面求出的杆端力代入，得

$$\frac{4EI}{20}\theta - \frac{6EI}{20^2}\Delta + \frac{EI}{10}\theta - 333 = 0$$

$$\frac{3}{5}\times\left(\frac{3EI}{5\times20\times25}\right)\Delta - \frac{6EI}{20^2}\theta + \frac{12EI}{20^3}\Delta - 100 = 0$$

整理后，得

$$\left.\begin{aligned} 0.3\theta - 0.015\Delta &= \frac{333}{EI} \\ -0.015\theta + 0.002\ 22\Delta &= \frac{100}{EI}\end{aligned}\right\}$$

(5) 解位移法方程

得

$$\theta = \frac{5\ 080}{EI}$$

$$\Delta = \frac{79\ 400}{EI}$$

(6) 求杆端力

将求得的 θ、Δ 代回第(3)步,得

$$M_{AB} = -683\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{BA} = -175\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$F_{QBA} = 42.8\ \text{kN}$$
$$M_{BC} = 175\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{CB} = -675\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$F_{QBC} = 100\ \text{kN}$$
$$F_{NBD} = 95.2\ \text{kN}$$

(7) 绘内力图

内力图如图 7-26 所示。

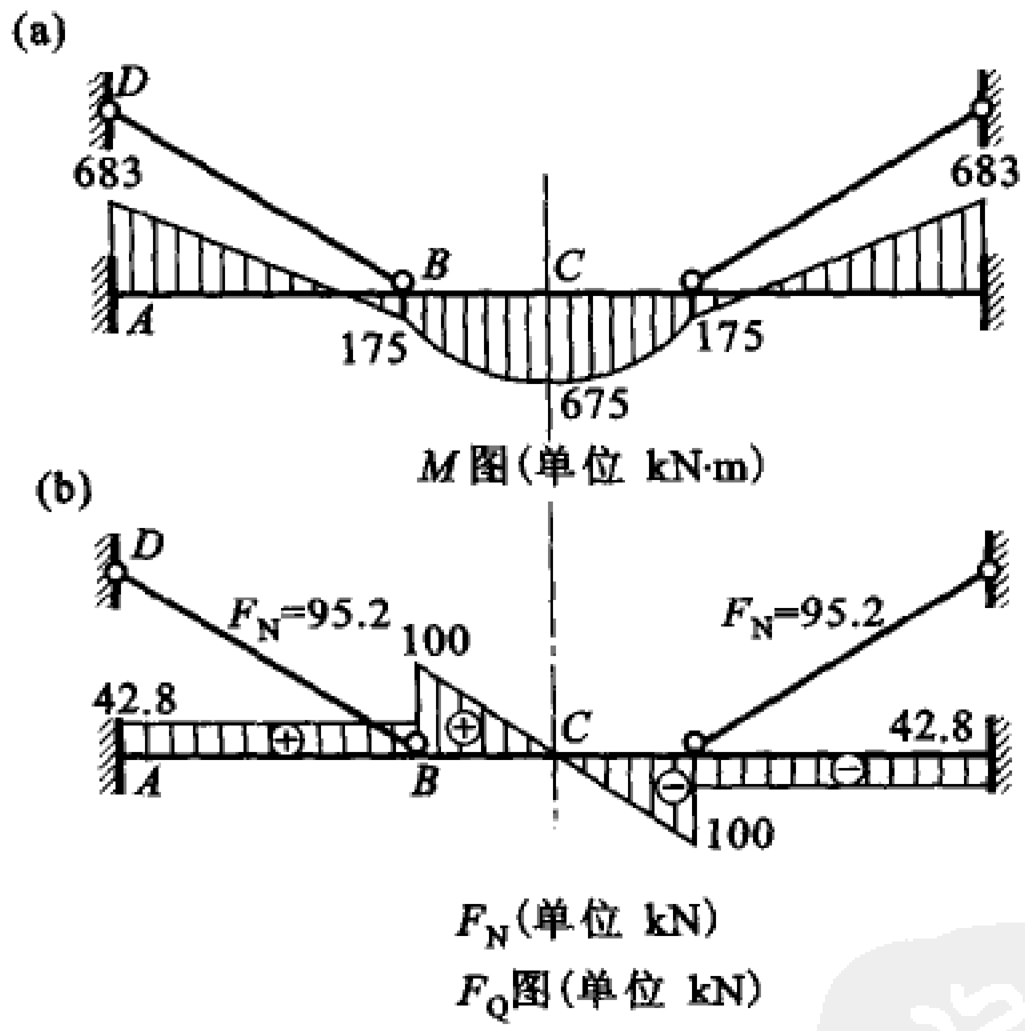


图 7-26

*§7-7 支座位移和温度改变时的计算

1. 支座位移时的计算

超静定结构当支座产生已知的位移(移动或转动)时,结构中一般会引起内力。用位移法计算时,基本未知量和基本方程以及作题步骤都与荷载作用时一样,不同的只有固端力一项,即由荷载产生的固端弯矩改变成由已知支座位移产

生的固端弯矩。具体计算通过下面的例题说明。

例 7－5 试作图 7－27a 所示连续梁支座 C 下沉 Δ_C 时的弯矩图。设两杆的 i 相等。

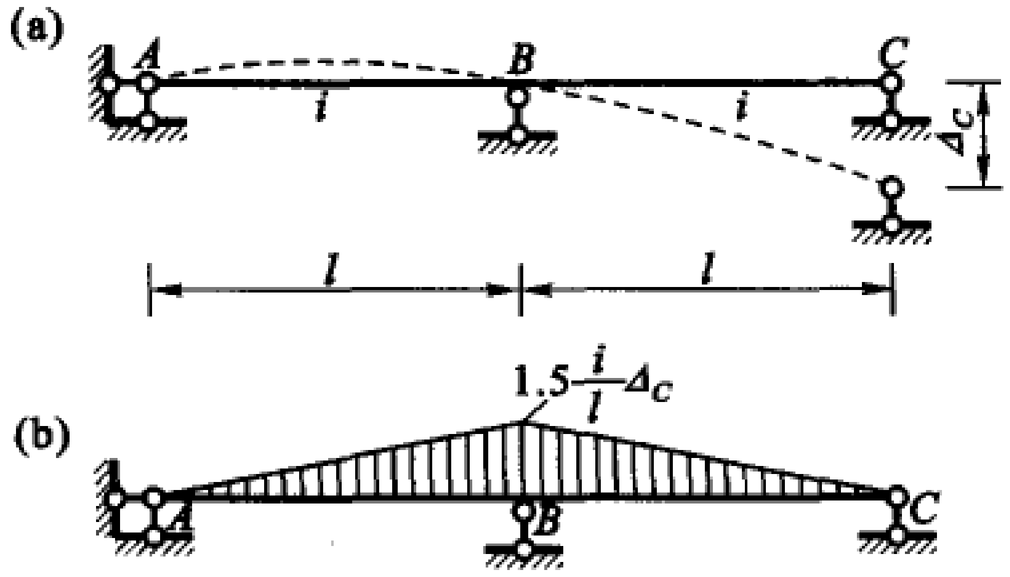


图 7－27

解 (1) 基本未知量为 θ_B

(2) 求杆端弯矩

$$M_{BA}=3i\theta_B$$

$$M_{BC}=3i\theta_B-3i\frac{\Delta_C}{l}$$

因为没有荷载作用，只有支座 C 下沉 Δ_C，上式中第二项 $\left(-3i\frac{\Delta_C}{l}\right)$ 就是由已知下沉 Δ_C 引起的固端弯矩。

(3) 列位移法方程

$$M_{BA}+M_{BC}=0,\quad 3i\theta_B+3i\theta_B-3i\frac{\Delta_C}{l}=0$$

得

$$\theta_B=\frac{1}{2}\frac{\Delta_C}{l}$$

(4) 杆端弯矩和弯矩图

$$M_{BA}=3i\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta_C}{l}\right)=1.5i\frac{\Delta_C}{l}$$

$$M_{BC}=3i\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta_C}{l}\right)-3i\frac{\Delta_C}{l}=-1.5i\frac{\Delta_C}{l}$$

弯矩图如图 7－27b 所示。

2. 温度改变时的计算

温度改变时的计算，与支座位移时的计算基本相同，不同的仍是固端力计算。这里，只作一点补充：除了杆件内外温差使杆件弯曲，因而产生一部分固端弯矩外；温度改变时杆件的轴向变形不能忽略，而这种轴向变形会使结点产生已

知位移,从而使杆端产生相对横向位移,又产生另一部分固端弯矩。具体计算通过下面的例题说明。

例 7-6 试求图 7-28 所示排架由于温度均匀升高 t 所产生的弯矩。各横梁截面尺寸相同,各立柱截面也相同,温度膨胀系数为 α。

解 图 7-28a 为奇数跨情况,图 7-28b 为偶数跨情况。因为排架是对称的,荷载(温度变化也是一种广义荷载)也是对称的,因此在对称轴上的 C 点没有转角和水平侧移。温度升高 t 时的变形如图中虚线所示。立柱伸长时,由于不受约束,故不产生内力。横梁伸长时,使柱顶各点产生的水平线位移为

$$\Delta = \alpha t L$$

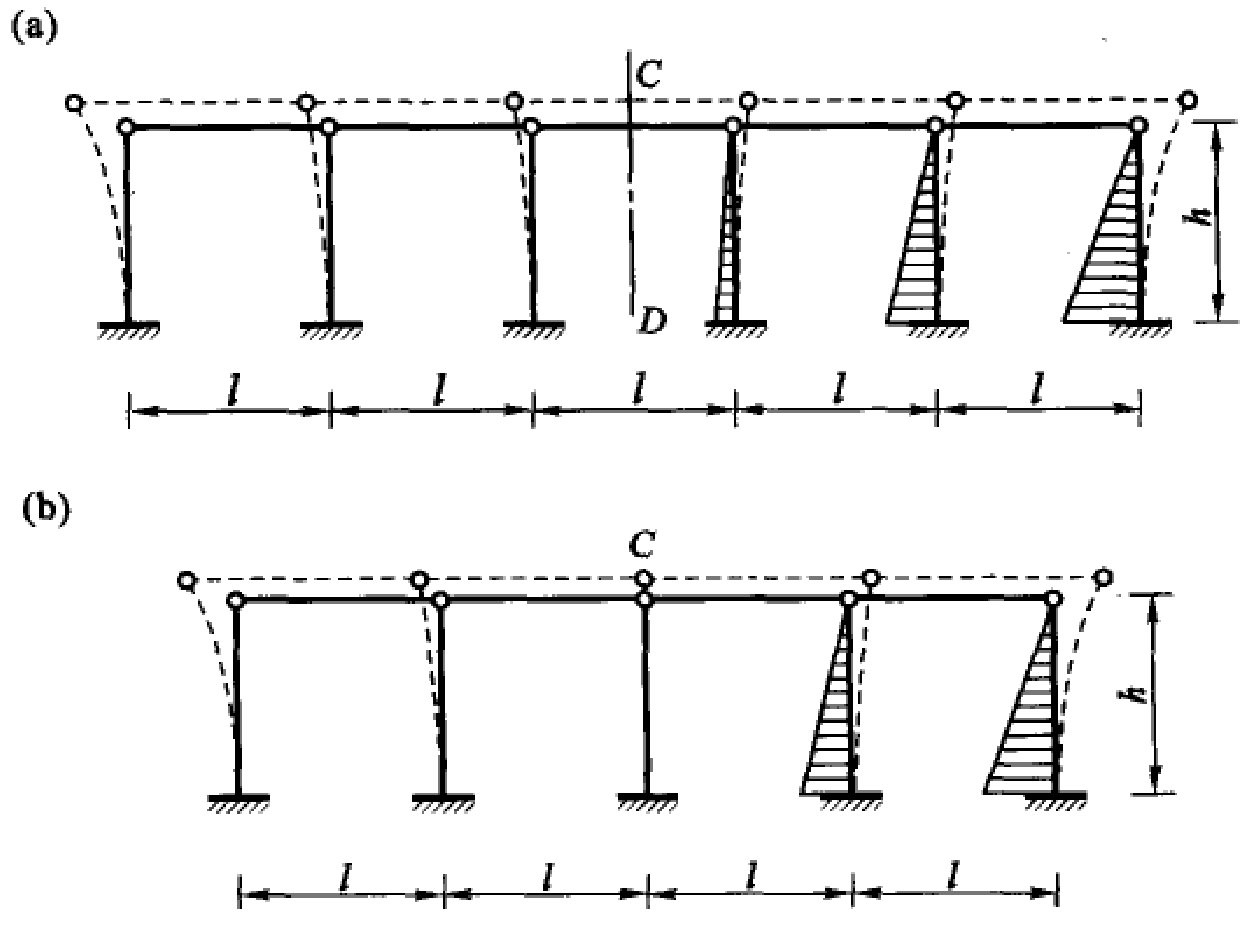


图 7-28

其中 L 为结点到对称轴的距离。

根据结点位移,由式(7-9)可求出柱底弯矩如下:

$$M = -3i\,\frac{1}{h}\Delta = -3i\,\frac{\alpha t L}{h}$$

弯矩图在图 7-28 中的右半部画出。计算结果表明,排架愈长,温度变化产生的内力也愈大。所以,当结构长度过大时,应设置温度缝,将结构分开,以减小温度内力。

例 7-7 试求图 7-29a 所示刚架由于温度改变而产生的弯矩。图中所标温度为温度变化值,各杆截面尺寸相同。

解 本题原有三个结点角位移和一个独立的结点线位移。由于结构是对称

的，温度也是对称分布的，因此半边结构可取如图 7－29b 所示，其中只有一个基本未知量 θ_B。这里，因为要考虑轴向变形的影响，所以图 7－29b 中 CD 杆仍要画出。

为了求固端弯矩，可将温度变化分为两部分：轴线平均温度变化 t_0（图 7－29c）和杆两侧温度差变化 Δt（图 7－29d）。杆轴线平均温度变化使杆长发生变化，但变化值为已知值（图 7－29c）：

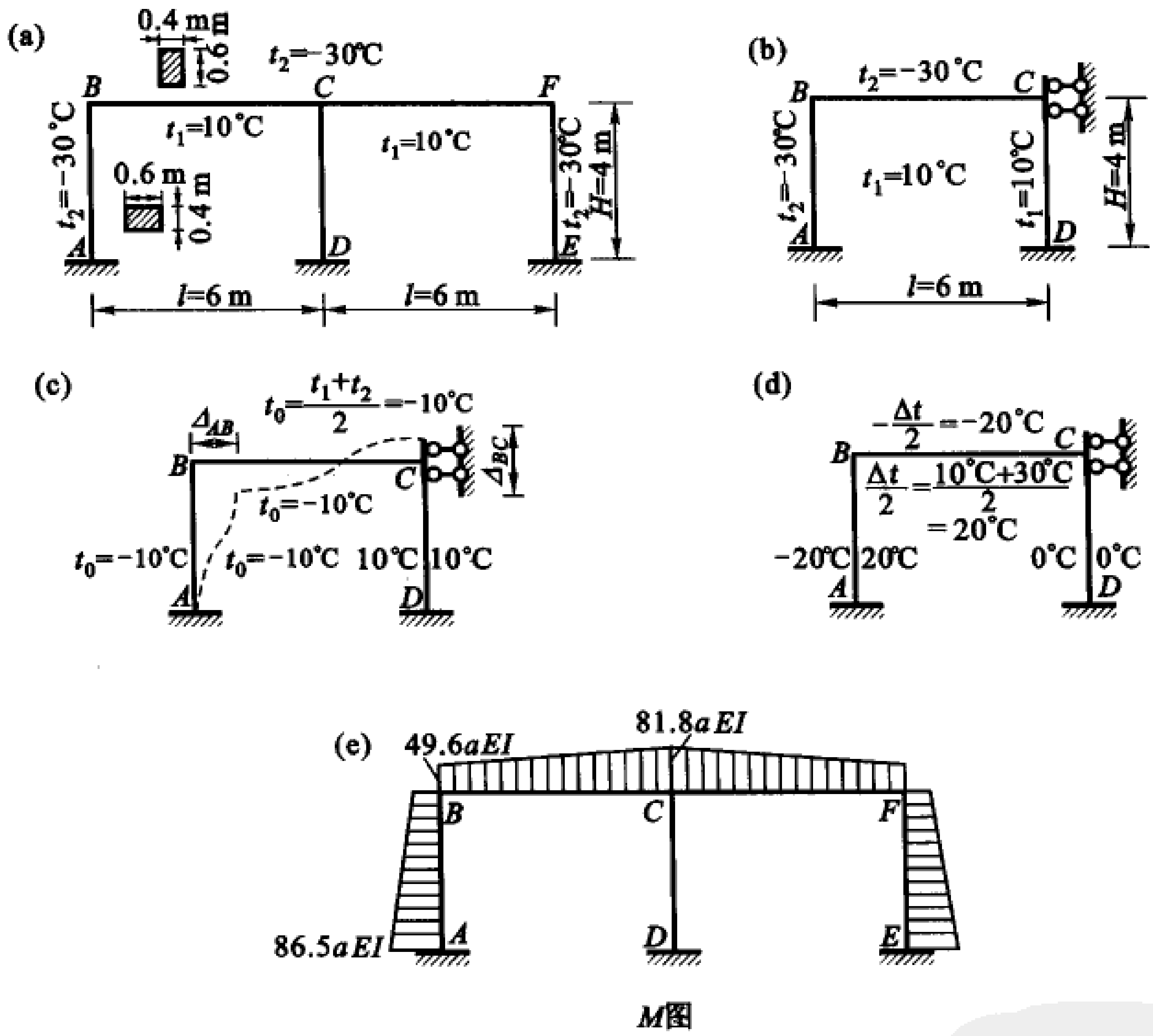


图　7－29

柱 AB 缩短　　$\alpha t_0 H = 40\alpha$

柱 CD 伸长　　$\alpha t_0 H = 40\alpha$

梁 BC 缩短　　$\alpha t_0 l = 60\alpha$

这些长度变化使各杆端结点产生相对线位移：

$$\Delta_{AB} = 60\alpha$$

$$\Delta_{BC} = -(40\alpha + 40\alpha) = -80\alpha$$

上述位移使杆端产生的固端弯矩为

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}^{F}=M_{BA}^{F}=-6\frac{i}{H}\Delta_{AB}=-6\frac{EI}{4^{2}}\times(60\alpha)=-22.5\alpha EI\\M_{BC}^{F}=M_{CB}^{F}=-6\frac{i}{l}\Delta_{BC}=-6\frac{EI}{6^{2}}\times(-80\alpha)=13.3\alpha EI\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

杆件两侧的温度差 Δt 使杆端产生的固端弯矩为(查表 7－1)：

$$\left.\begin{aligned}-M_{AB}^{F}=M_{BA}^{F}=\frac{EI\alpha\Delta t}{h}=\frac{40\alpha EI}{0.6}=66.7\alpha EI\\-M_{BC}^{F}=M_{CB}^{F}=\frac{EI\alpha\Delta t}{h}=\frac{40\alpha EI}{0.6}=66.7\alpha EI\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

最后固端弯矩等于式(a)、式(b)之和。

杆端弯矩为

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}=2i_{AB}\theta_B+M_{AB}^{F}=2\frac{EI}{4}\theta_B+(-22.5\alpha EI-66.7\alpha EI)=0.5EI\theta_B-89.2\alpha EI\\M_{BA}=4i_{AB}\theta_B+M_{BA}^{F}=4\frac{EI}{4}\theta_B+(-22.5\alpha EI+66.7\alpha EI)=1.0EI\theta_B+44.2\alpha EI\\M_{BC}=4i_{BC}\theta_B+M_{BC}^{F}=4\frac{EI}{6}\theta_B+(13.3\alpha EI-66.7\alpha EI)=0.67EI\theta_B-53.3\alpha EI\\M_{CB}=2i_{BC}\theta_B+M_{CB}^{F}=2\frac{EI}{6}\theta_B+(13.3\alpha EI+66.7\alpha EI)=0.33EI\theta_B+80.0\alpha EI\end{aligned}\right\}\quad(c)$$

位移法方程为

$$M_{BA}+M_{BC}=0,\qquad 1.67EI\theta_B-9.1\alpha EI=0$$

由此求得

$$\theta_B=5.4\alpha$$

代回式(c)，得杆端弯矩为

$$M_{AB}=(0.5\times5.4-89.2)\alpha EI=-86.5\alpha EI$$
$$M_{BA}=(5.4+44.2)\alpha EI=49.6\alpha EI$$
$$M_{BC}=(0.67\times5.4-53.3)\alpha EI=-49.7\alpha EI$$
$$M_{CB}=(0.33\times5.4+80.0)\alpha EI=81.8\alpha EI$$

弯矩图如图 7－29e 所示。

§7－8　小　　结

力法和位移法是计算超静定结构的两个基本方法。由杆端位移和荷载推算杆端弯矩的公式是位移法的基本公式，对它的物理意义应了解清楚。由此可以

了解在位移法中为什么可以取结点位移作为基本未知量。这里,要特别注意关于杆端弯矩新的正负号规定。

在位移法中,用以解算基本未知量的是平衡方程。对每一个刚结点的未知角位移,可以写一个结点力矩平衡方程。对每一个独立的结点线位移,可以写一个截面平衡方程。平衡方程的数目与基本未知量的数目正好相等。

位移法的另一种演算形式是利用基本体系进行计算。这样可使位移法与力法之间建立更加完整的对应关系,因而有助于对两种方法的深入了解。采用基本体系后,不仅使得基本方程中的每项系数和自由项都具有独立的力学意义,而且可以与第9章的矩阵位移法相呼应。学习时对两种解法可以有所侧重。对前一解法应熟练掌握;对后一解法重在理解力学意义,为学习矩阵位移法打下基础。

对称结构的计算,可以取半边结构进行。这里,关键的是要了解清楚半边结构的取法,即了解清楚在对称荷载或反对称荷载下结构有哪些独立的结点位移。

最后想提一下:学习了力法与位移法之后,如果再把二者加以联系和对比,将是很有兴味的。实际上,这两个方法可以说是天生的一对,相反互补,有许多对偶关系:

从基本未知量看,力法取的是力——多余约束力,位移法取的是位移——独立的结点位移。

从基本体系看,力法是去约束,位移法是加约束。

从基本方程看,力法是写位移协调方程,位移法是写力系平衡方程。

这些对偶关系简直就像一幅对仗工整的对联,体现了一种内在的科学美。掌握了这个对偶关系,就可以学一知二,达到融会贯通的境界。还应看到,力法只是用于分析超静定结构,位移法则通用于分析静定和超静定结构。这也许是相反互补的另一表现。

本章习题7-1~7-3供辅导课选用参考。习题7-21以后的习题是借助于求解器求解的综合题,供参考。

§7-9 思考与讨论

§7-2 思考题

7-1 为什么铰支座及铰结点处的角位移可不选作基本未知量?试比较当铰支座及铰结点处角位移选作与不选作基本未知量时两种算法的优缺点。

7-2 为什么滑动支座处的线位移可不选作基本未知量?试比较当滑动支座处线位移选作与不选作基本未知量时两种算法的优缺点。

讨论：从以上两思考题可以知道，当只有两端刚结杆的转角位移方程式(7－5)和两端固定杆的固端弯矩值时，铰支座和铰结点处的角位移必须选作基本未知量，滑动支座处的线位移也必须选作基本未知量，方可用位移法求解。

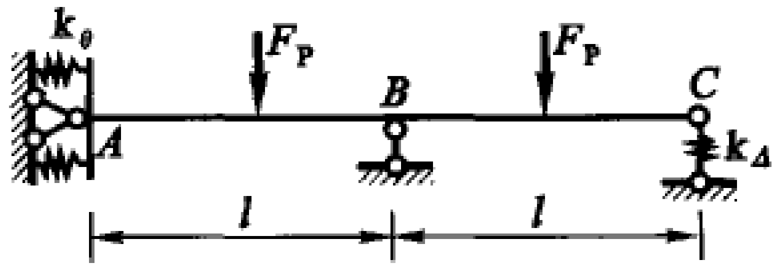
当有了一端刚结另端铰结的转角位移方程式(7－9)和一端固定另端铰支的固端弯矩值后，铰支座和铰结点处的转角不选作基本未知量，用位移法亦可求解。

同理，当有了一端刚结另端为滑动支座的转角位移方程式(7－10)和一端固定另端为滑动支座的固端弯矩值后，则滑动支座处的线位移不选作基本未知量，用位移法亦可求解。

由此可知，用位移法能否求解，以及选取哪些量作为基本未知量，取决于事先已知的条件，即从已知求未知这一总的方法中已知的程度。

§7－4 思考题

7－3 图示弹性支座上的梁，用位移法求解，弹性支座 A 的转角 θ_A 与支座 C 的线位移是否应取为基本未知量？为什么？相应地，位移法方程应该怎么写？弹性支座的刚度系数分别为 k_θ 与 k_Δ。



思考题 7－3 图

讨论：若预先不知道弹性支座杆的转角位移方程和弹性支座杆的固端弯矩值，则根据思考题7－1和7－2的讨论，基本未知量应怎么取？相应的位移法平衡方程有几个？建议读者自己完成此题。

7－4 为什么求内力时可采用刚度的相对值，而求位移时则需采用刚度的真值？

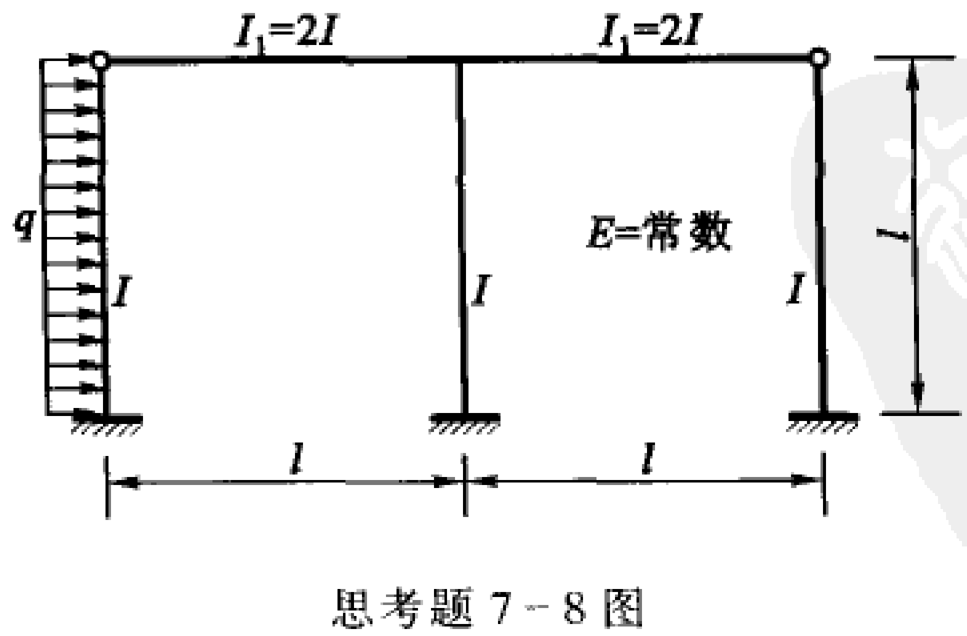
7－5 在什么条件下独立的结点线位移的数目等于铰结体系自由度的数目？

7－6 在力法和位移法中，各以什么方式满足平衡条件和变形连续条件？

§7－5 思考题

7－7 位移法的基本体系和基本结构有什么不同？它们各自在位移法的计算过程中起什么作用？

7－8 将§7－3、§7－4直接写平衡方程的方法与§7－5基本体系典型方程的方法加以比较。两种计算方法的位移法方程是否相同？它们的关系是什么？



思考题 7－8 图

讨论：直接写平衡方程的方法可概括为两步：

(1) 先利用叠加原理写出含基本未知量的杆端力表达式。

(2) 根据平衡条件列出位移法方程。

基本体系典型方程的方法也可概括为两步：

(1) 先分别用平衡条件求出位移法方程的刚度系数 k_{ij} 和自由项 F_{iP}。

(2) 再按叠加原理写出含基本未知量的位移法平衡方程。

读者可按照上述概括的步骤，用图中所示两个基本未知量的刚架为例，试分别写出两种方法的位移法方程，分析二者间的关系，最后结果是否相同。

7-9　将力法与位移法加以比较。二者的基本未知量、基本体系和基本方程有什么不同？

§7-6　思考题

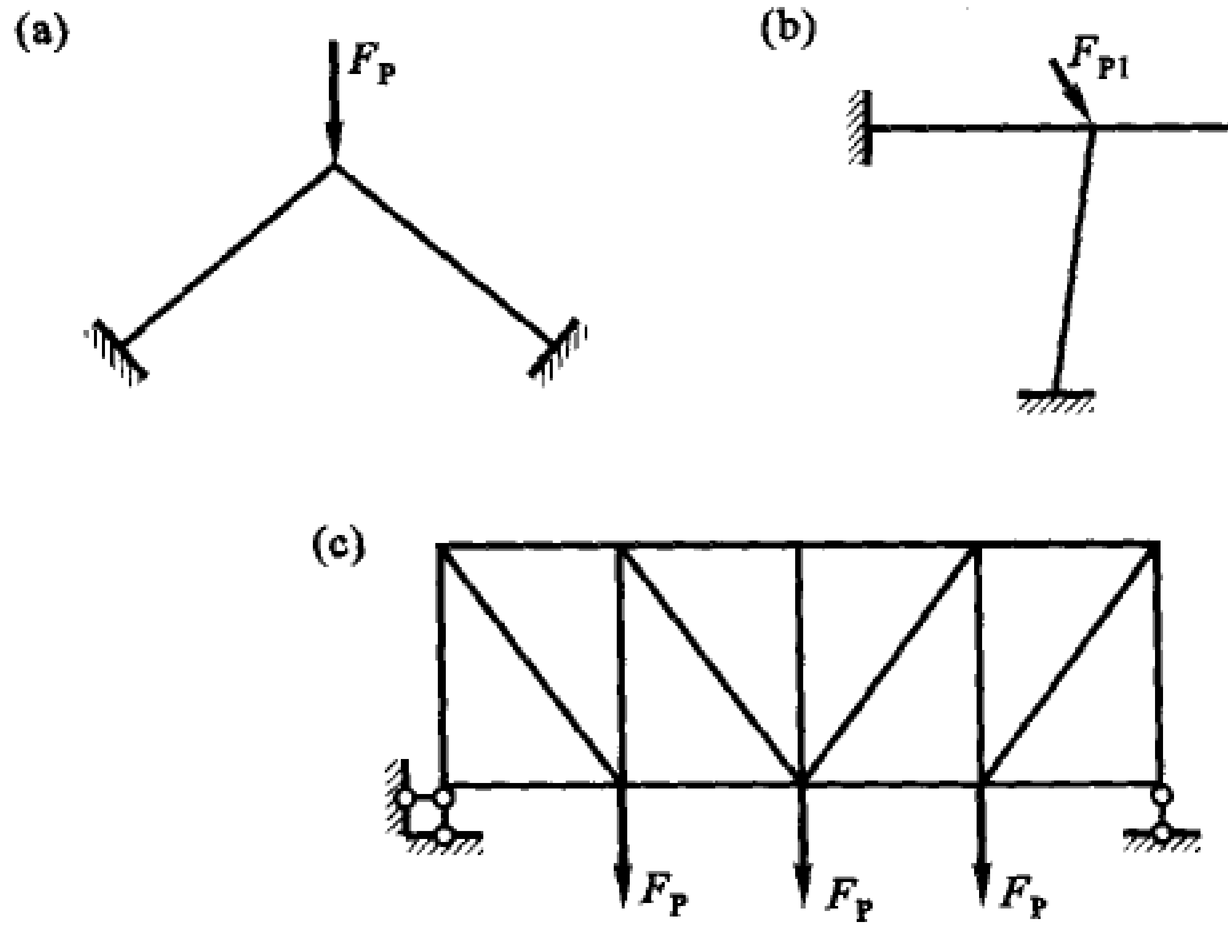
7-10　为什么对称结构在对称和反对称荷载作用时可以取半边结构计算？荷载不对称时还能不能取半边结构计算？

7-11　对称结构如不取半边结构，而直接利用原结构用位移法进行计算，是否也能利用对称性简化计算？

7-12　对具有刚性横梁（EI 为∞）的结构，用位移法求解时应注意些什么问题？

§7-7　思考题

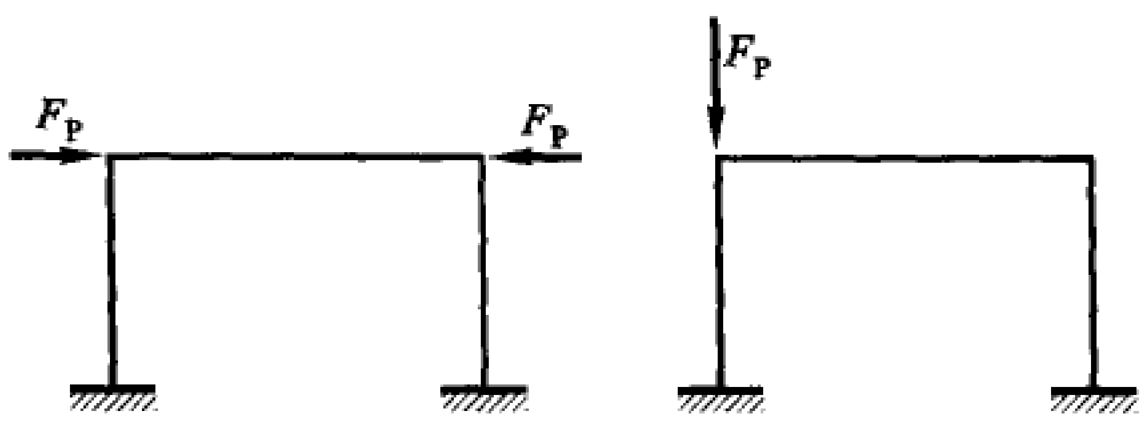
7-13　对图中所示无结点线位移的刚架（图 a、b）和刚结桁架（图 c），当忽略杆轴向变形的影响时，在结点荷载作用下，各杆的弯矩是否均为零？试说明原因。



思考题 7-13 图

讨论：试用本题的理由说明桁架结构虽然其结点并不是理想铰，但可按铰结点计算的依据。

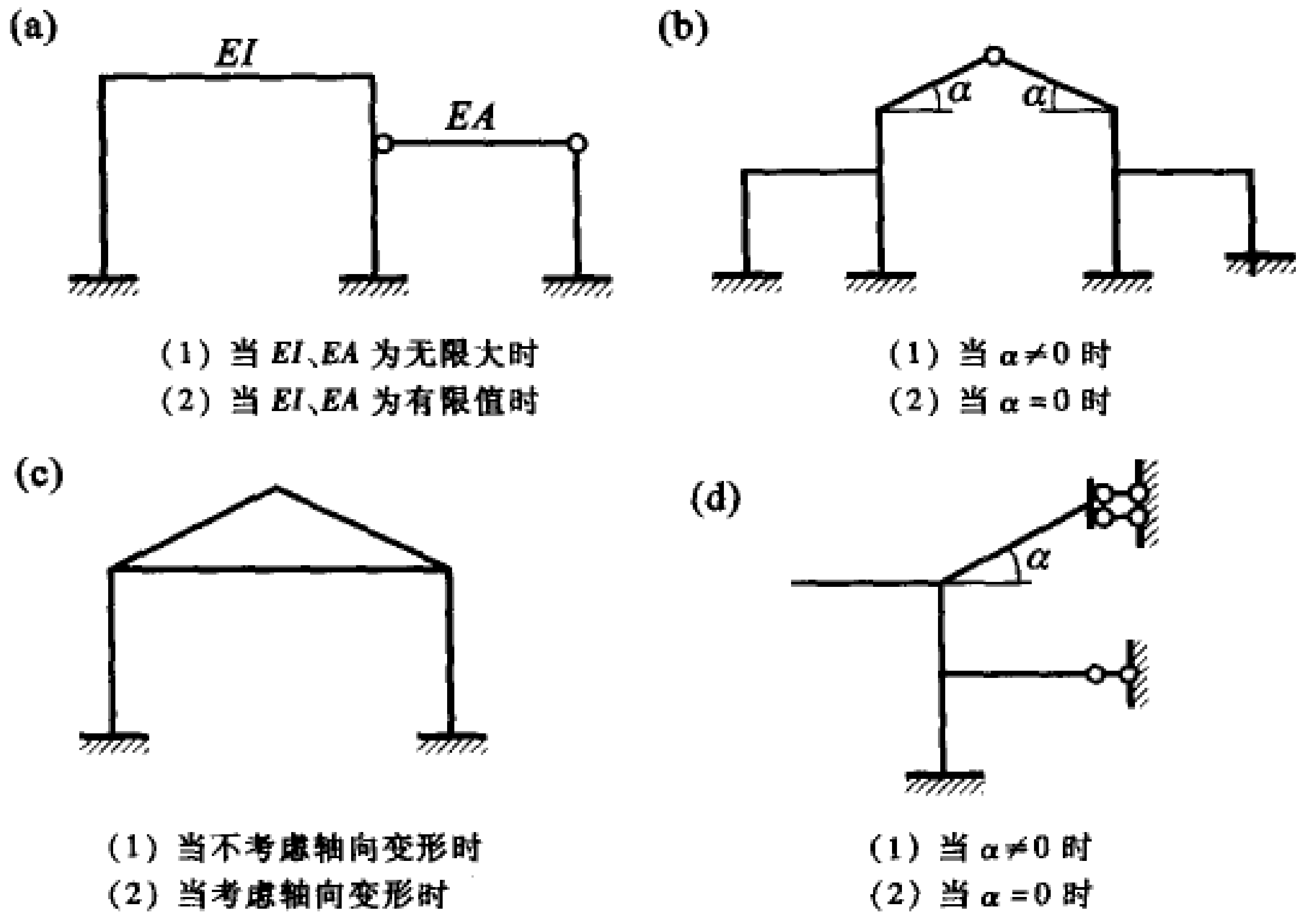
7-14　图中所示有结点线位移的刚架，因为荷载的特殊性，在什么情况下各杆的弯矩均为零？



思考题 7－14 图

习　题

7－1　试确定图中基本未知量。



题 7－1 图

7－2　试写出图示杆端弯矩表达式及位移法基本方程。

7－3　试对图示对称结构确定基本未知量和选取半边结构。

7－4　图示刚性承台，各杆 EA 相同，试用位移法求各杆轴力。

7－5　试作图示刚架的弯矩图，假设各杆 EI 相同。

7－6　试作图示刚架的弯矩图，设各杆 EI 相同。

7－7　试作图示刚架的 M、F_Q、F_N 图。

7－8　试作图示排架的 M 图。

7－9　试作图示刚架的 M 图。设各杆 EI 为常数。

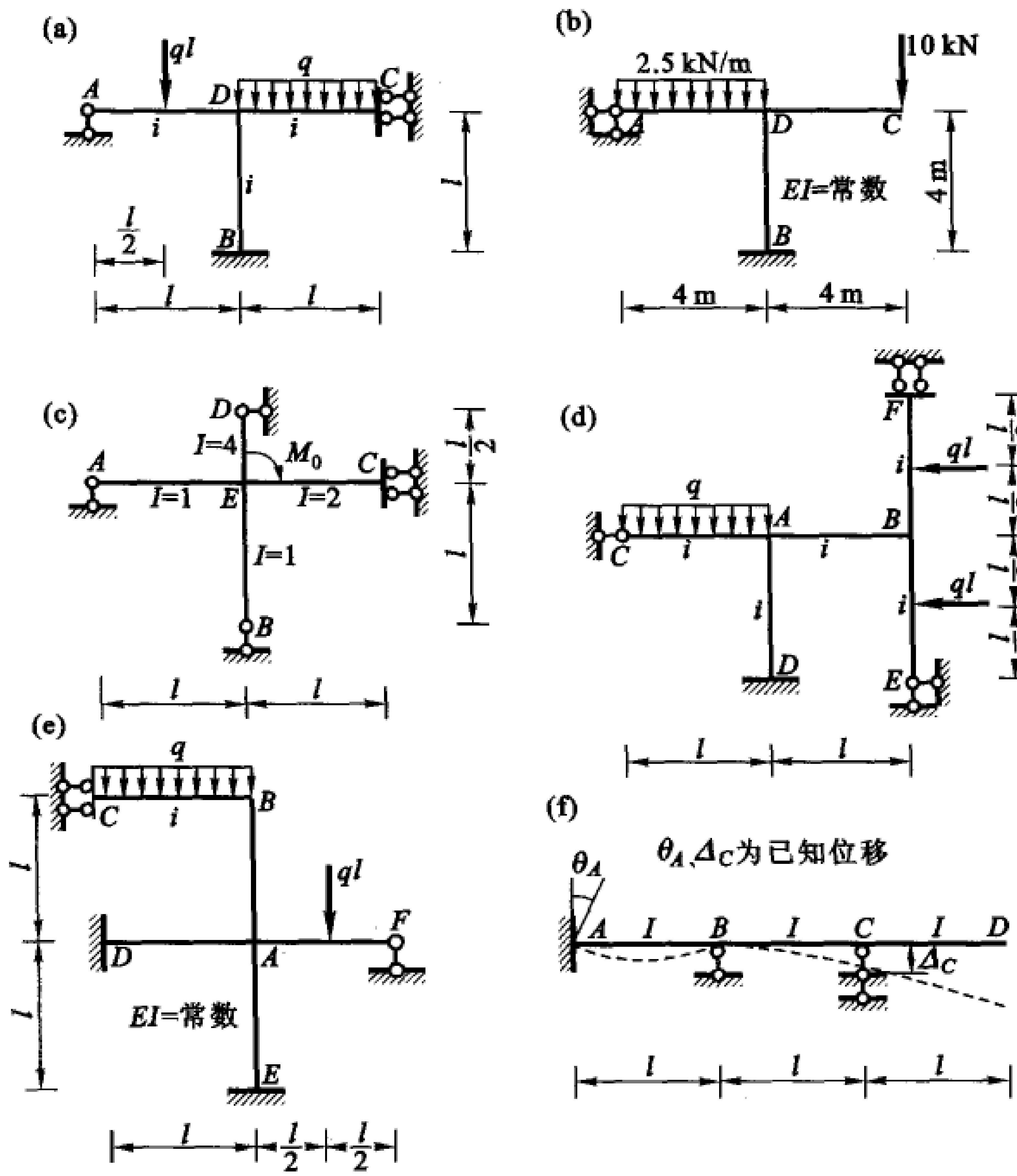
7－10　试作图示刚架的 M 图。

7－11　试作图示刚架的内力图。

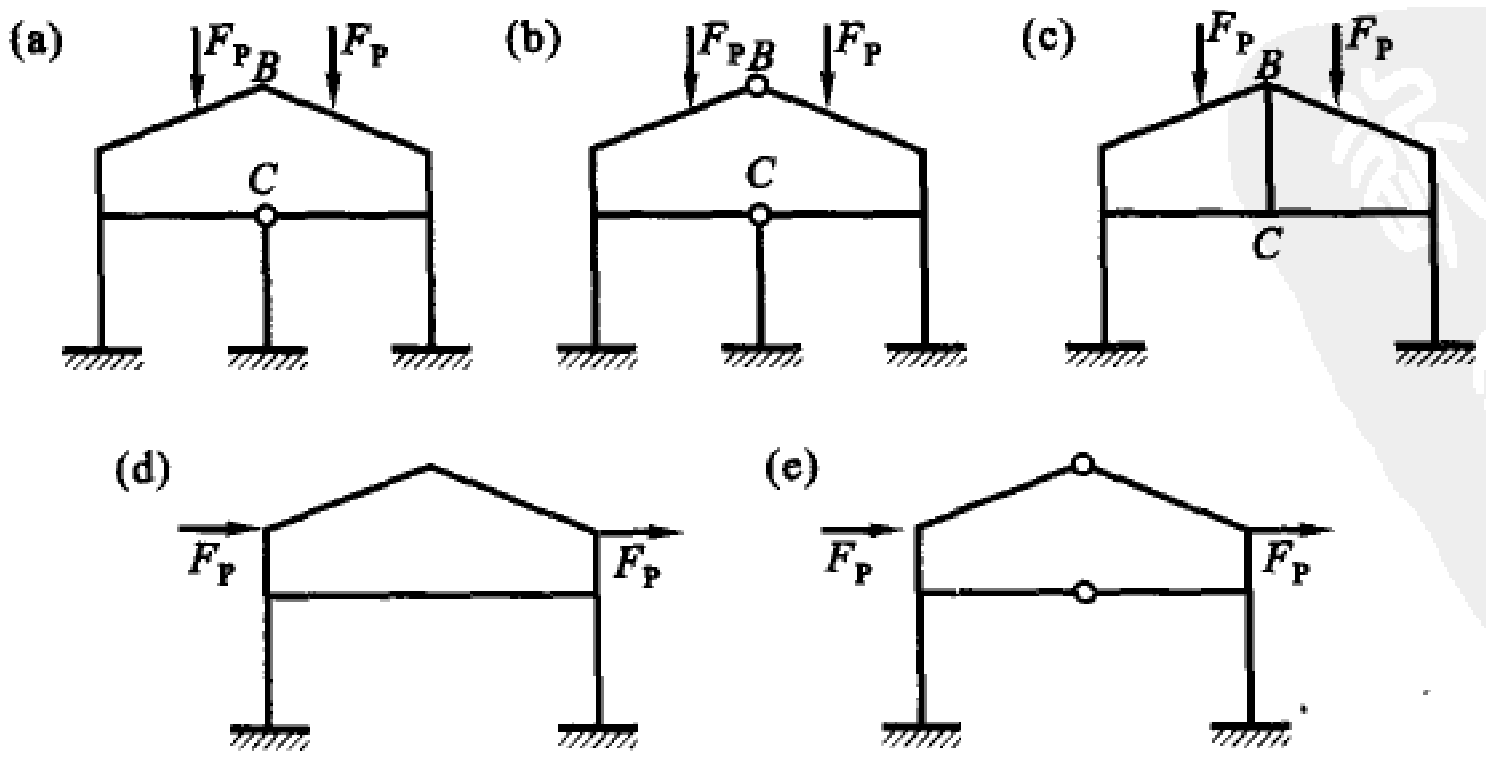
7－12　试利用对称，作图示刚架的 M 图。

7-13　试利用对称，作图示刚架的 M 图。

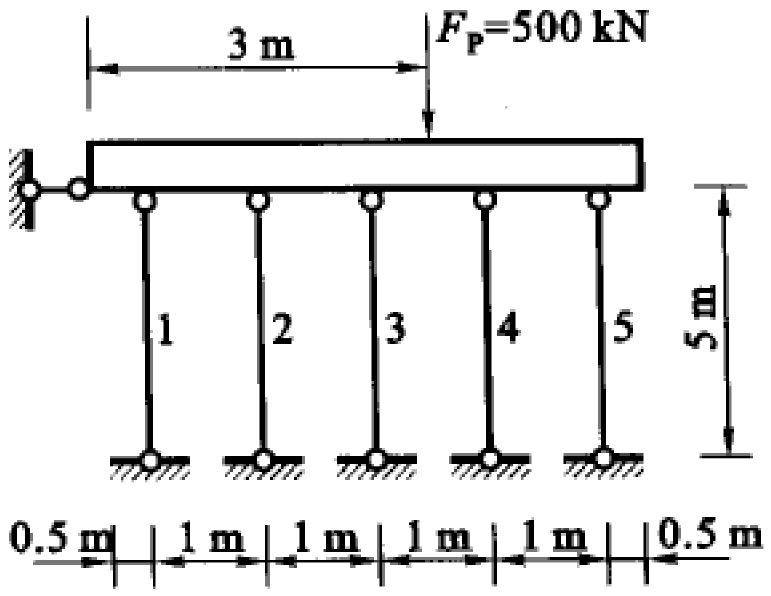
7-14　试作图示刚架的 M 图。$l=10$ m，E 为常数，均布荷载的集度为 q。



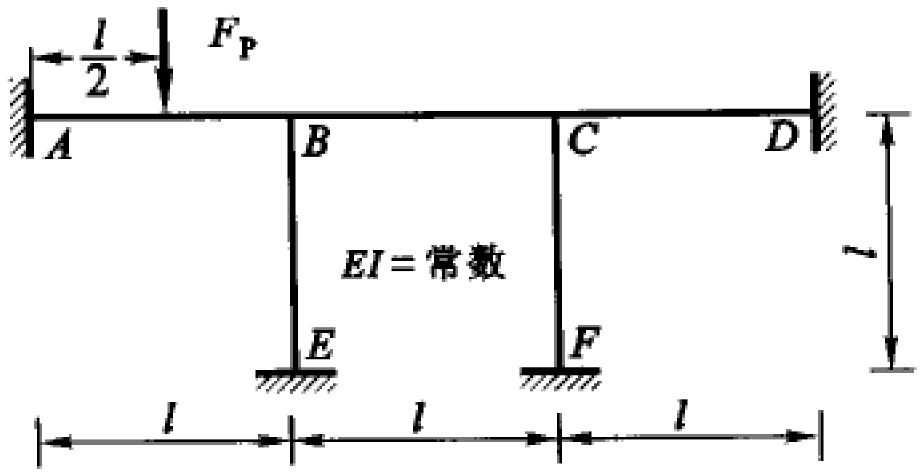
题 7-2 图



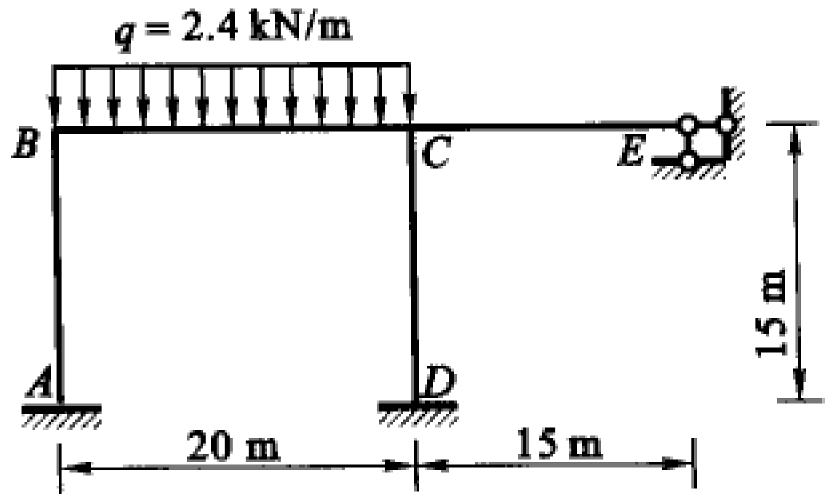
题 7-3 图



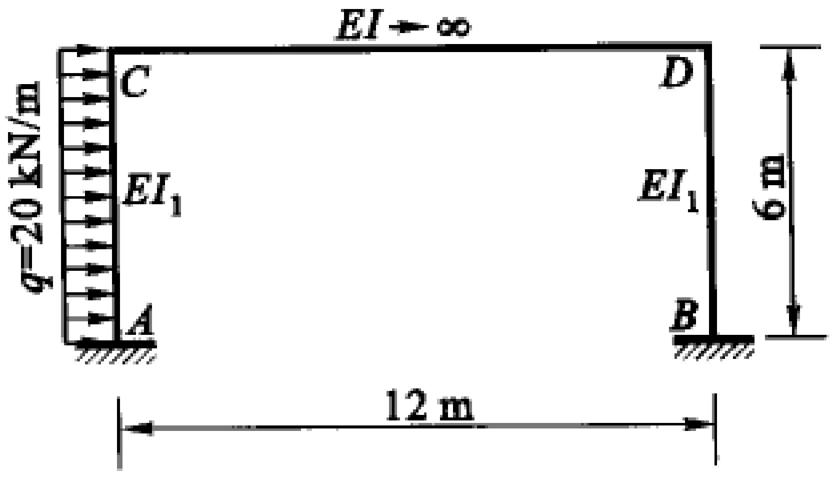
题 7-4 图



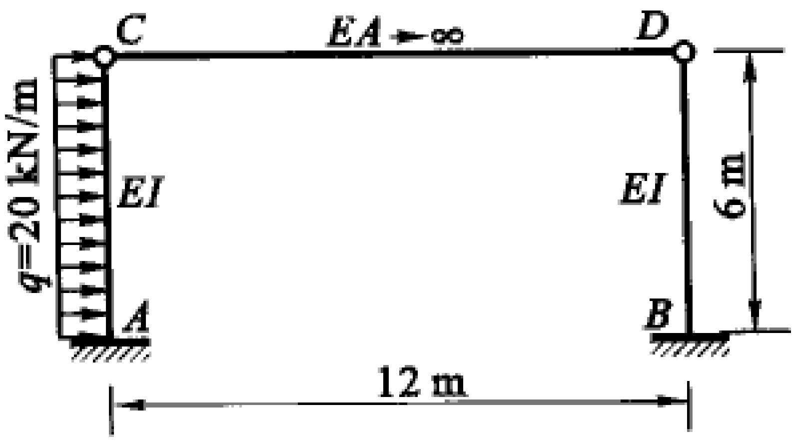
题 7-5 图



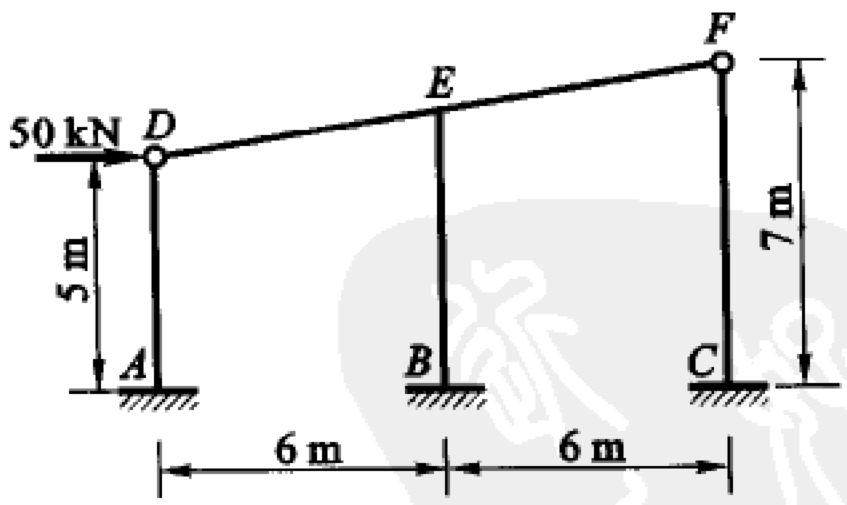
题 7-6 图



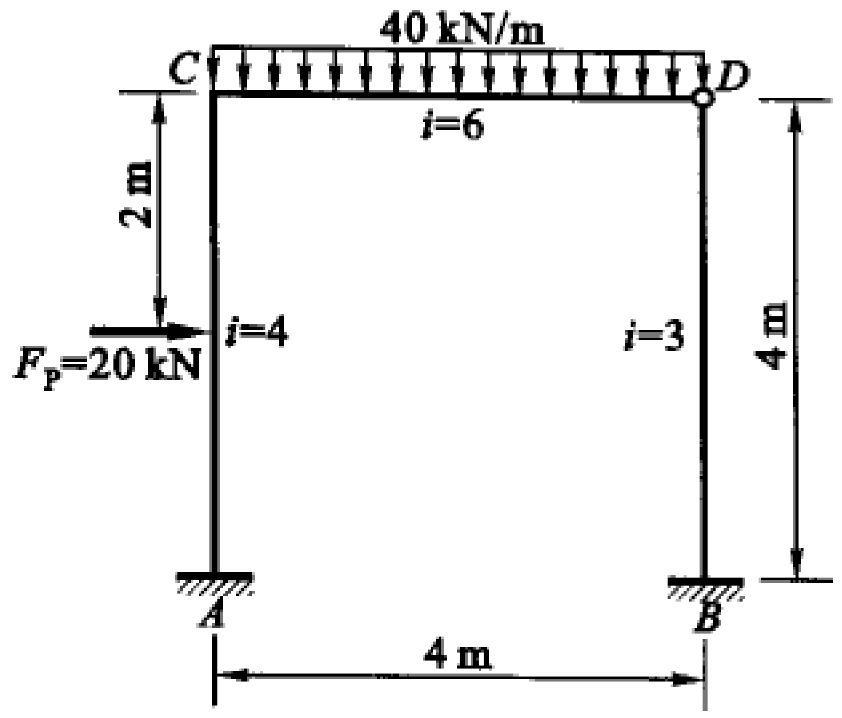
题 7-7 图



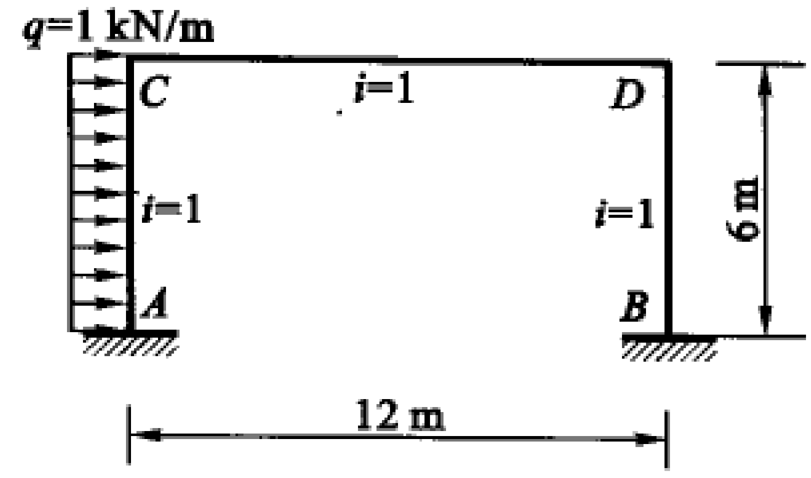
题 7-8 图



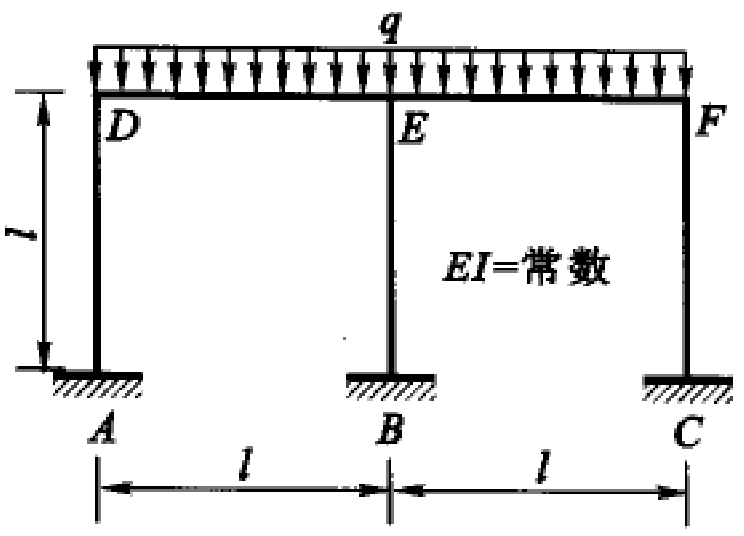
题 7-9 图



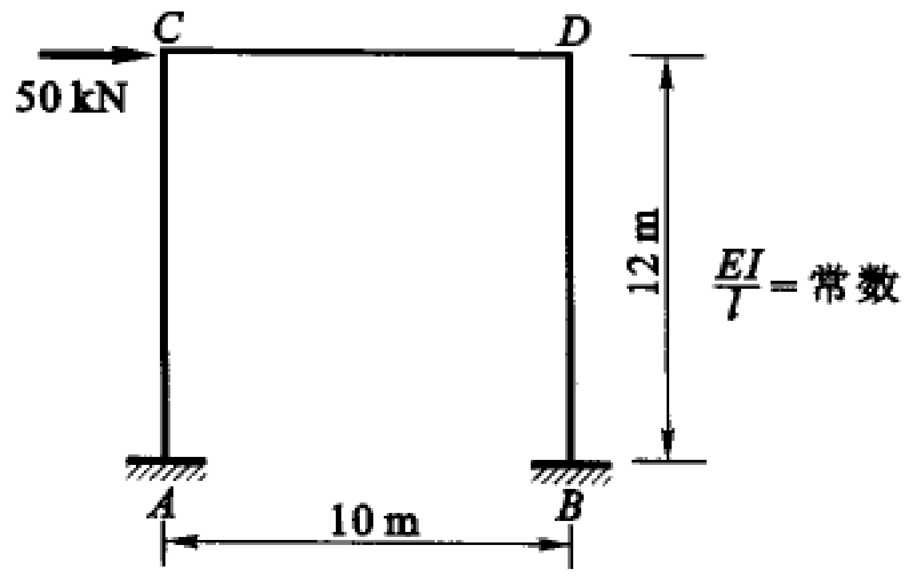
题 7－10 图



题 7－11 图

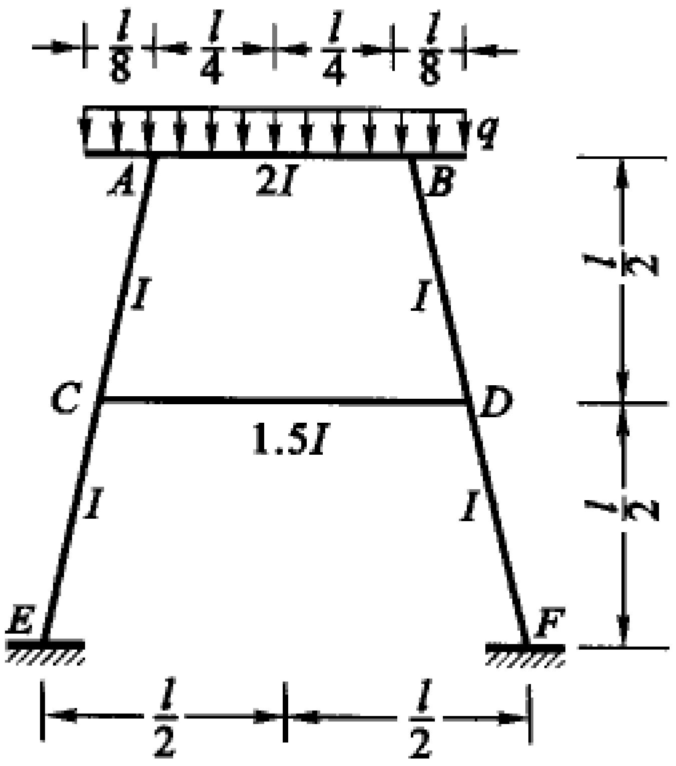


题 7－12 图

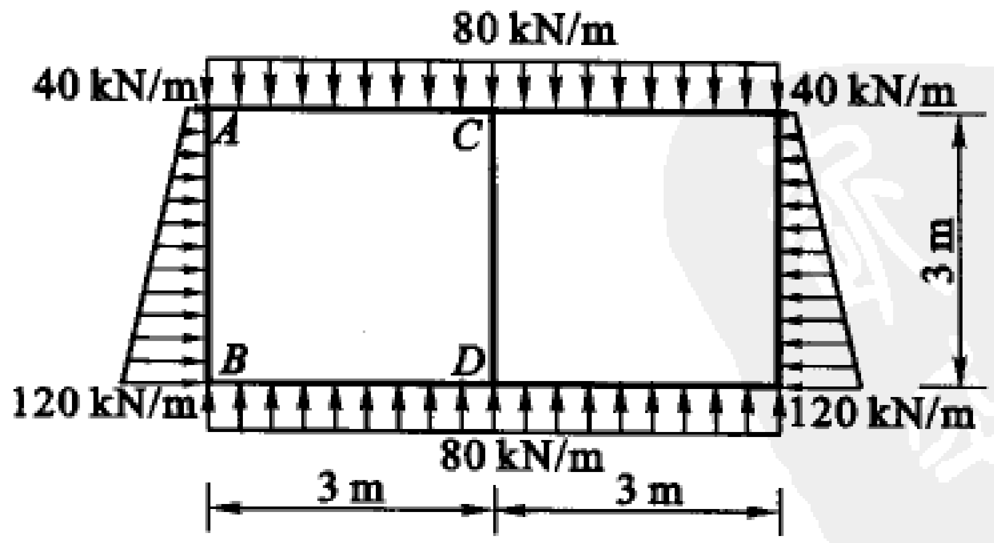


题 7－13 图

7－15　试作图示刚架的 M 图。EI = 常数。

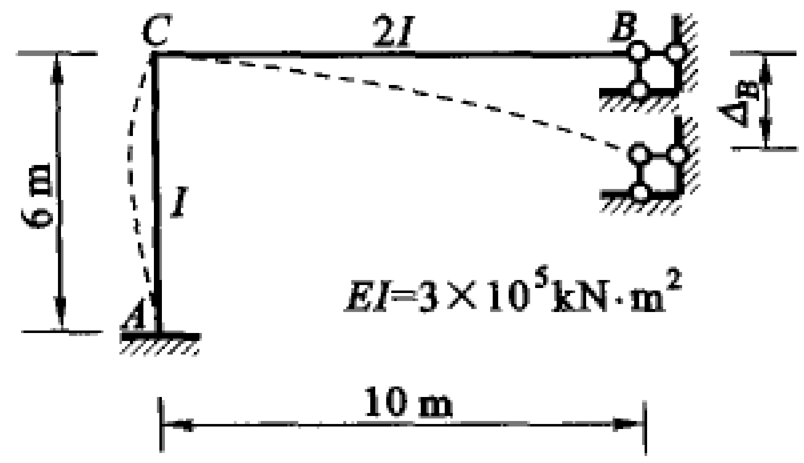


题 7－14 图



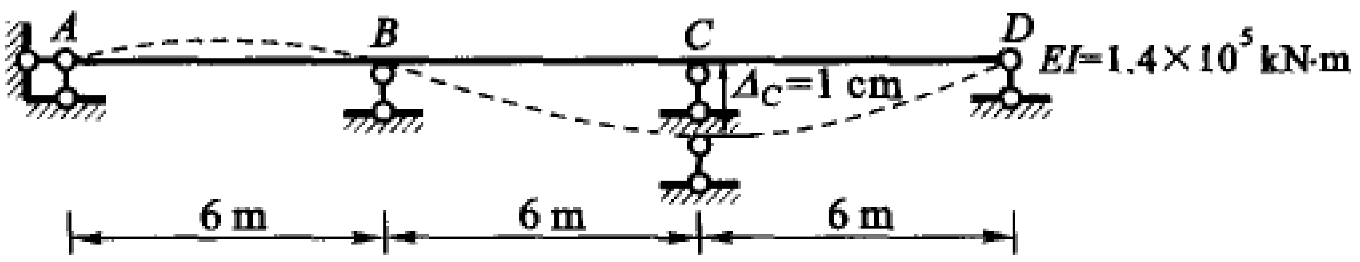
题 7－15 图

7-16　设支座 B 下沉 $\Delta_B = 0.5$ cm。试作图示刚架的 M 图。



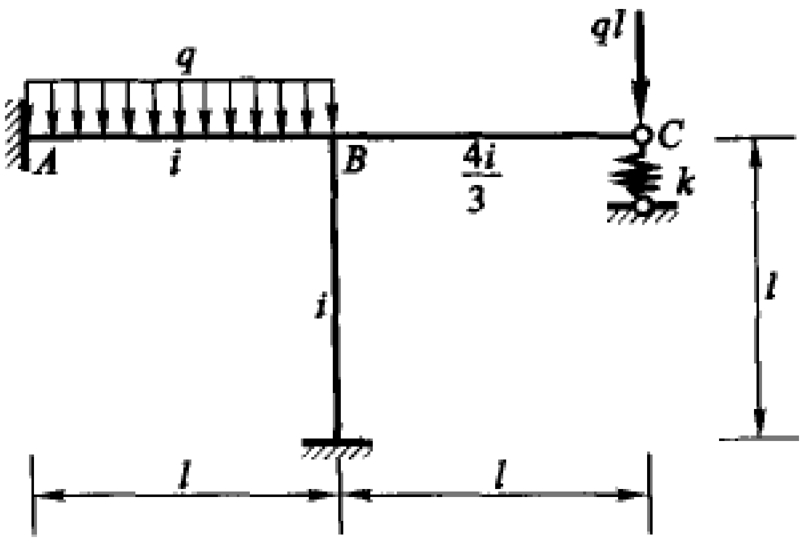
题 7-16 图

7-17　图示连续梁，设支座 C 下沉 1 cm。试作 M 图。



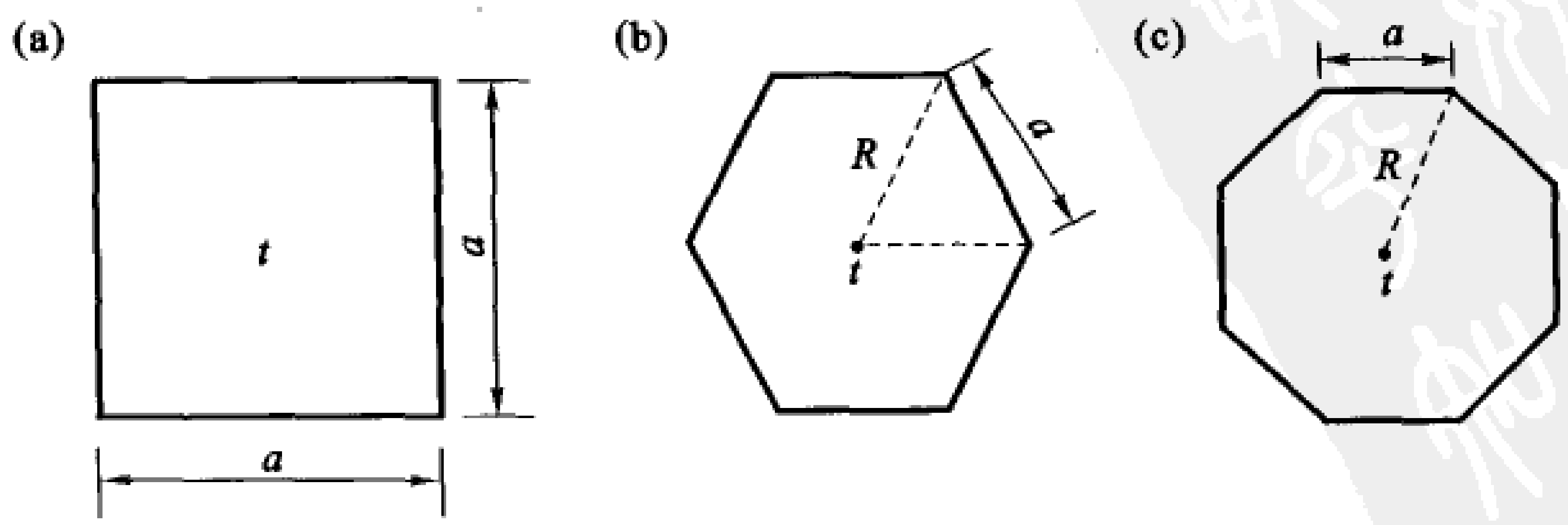
题 7-17 图

7-18　试作图示弹性支座上刚架的弯矩图。i 为杆的线刚度，弹性支座刚度 $k = 4i/l^2$。



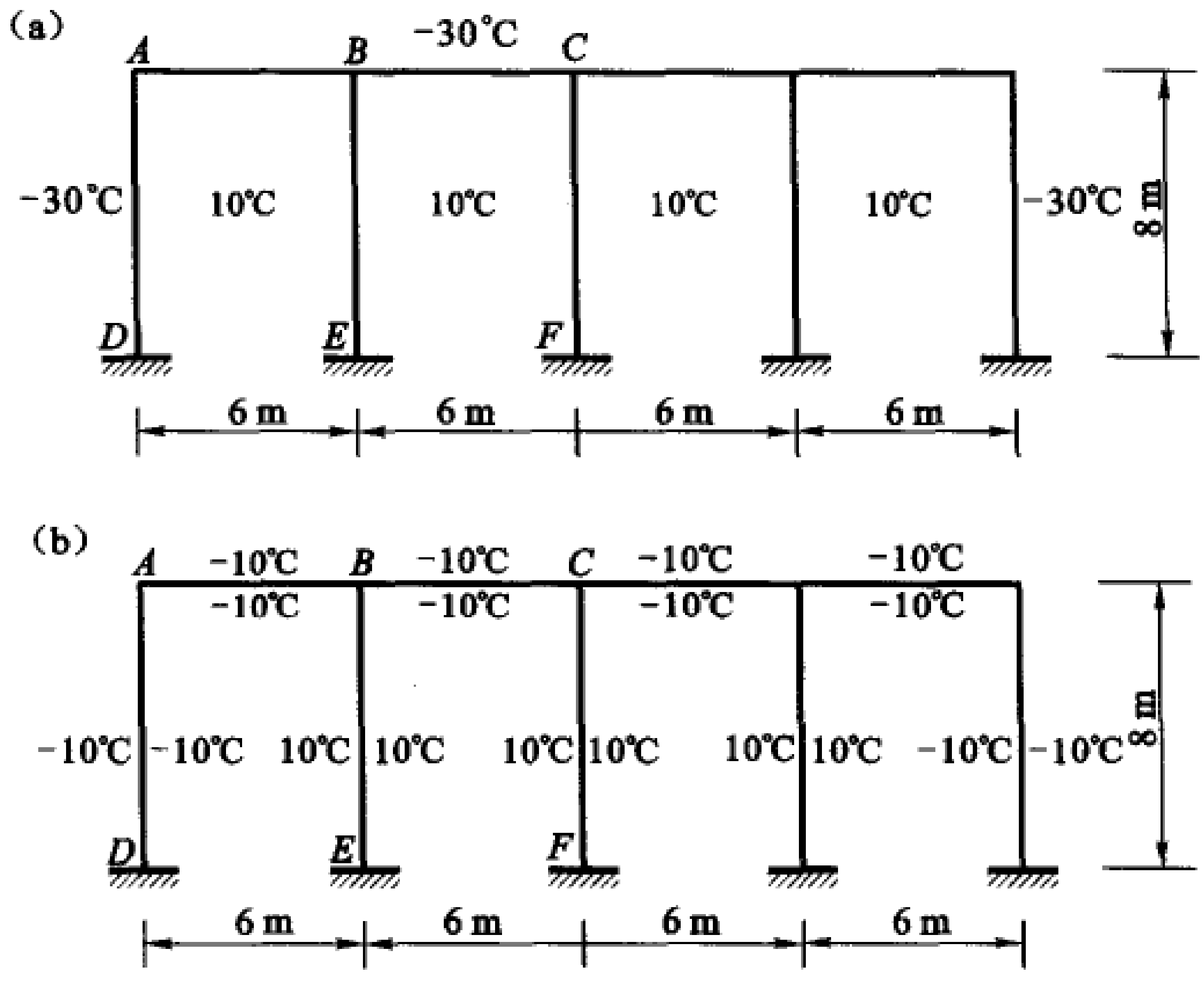
题 7-18 图

7-19　图示等截面正方形、正六边形、正八边形刚架，内部温度升高 t，杆截面厚度为 δ，温度膨胀系数为 α。试作 M 图。



题 7-19 图

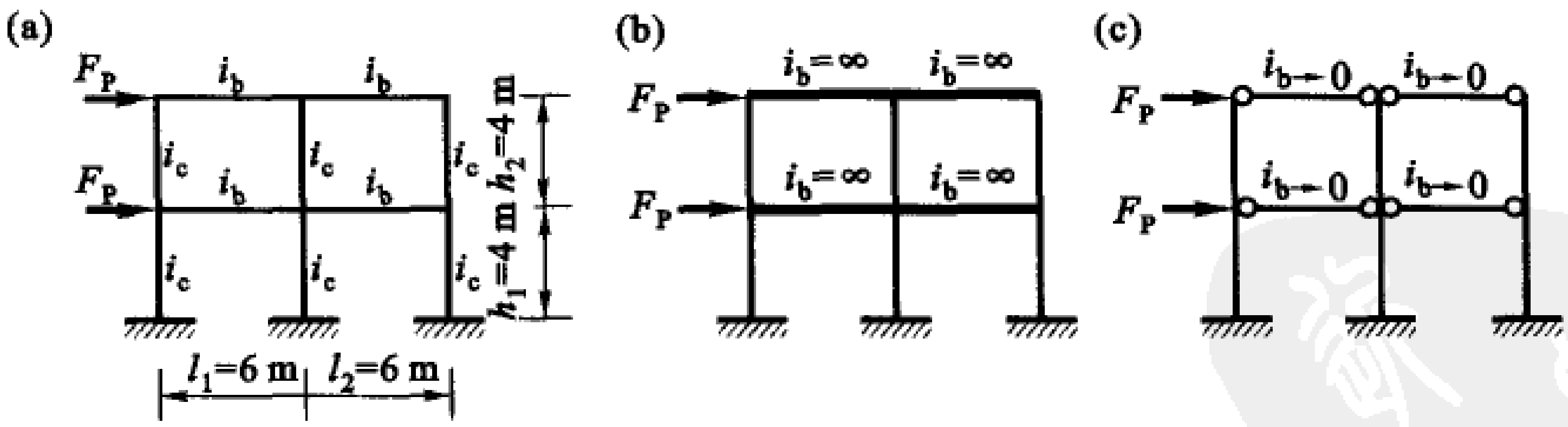
7-20 试作图示刚架温度变化时的弯矩图。设 $E = 1.5\times10^3$ MPa，$\alpha = 1\times10^{-5}℃^{-1}$，各杆截面尺寸均为 500 mm×600 mm。



题 7-20 图

7-21 图 a 所示 2 跨 2 层刚架，梁的线刚度 i_b 为柱的线刚度 i_c 的 s 倍，即 $i_b = si_c$。试求 $s = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$ 五种 s 情况时，柱的侧向位移和弯矩。

图 b 是 $s\to\infty$ 时的极限情况，图 c 是 $s\to0$ 时的极限情况。试问 s 的数值大(或小)到什么程度时，即可认为趋向极限值？



题 7-21 图

7-22 上题图 a 所示 2 跨 2 层刚架，试比较以下三种情况(均为杆线刚度相对值)的计算结果。

(a) $i_b = 1$，$i_c = 1$ (正常比较情况)。

(b) $i_b = 1$，$i_c = 10$ (加大柱刚度情况)。

(c) $i_b = 10$，$i_c = 1$ (加大梁刚度情况)。

试问为了减小刚架的侧向位移，哪种情况较好？为了改善刚架的受力情况，哪种情况较有利？

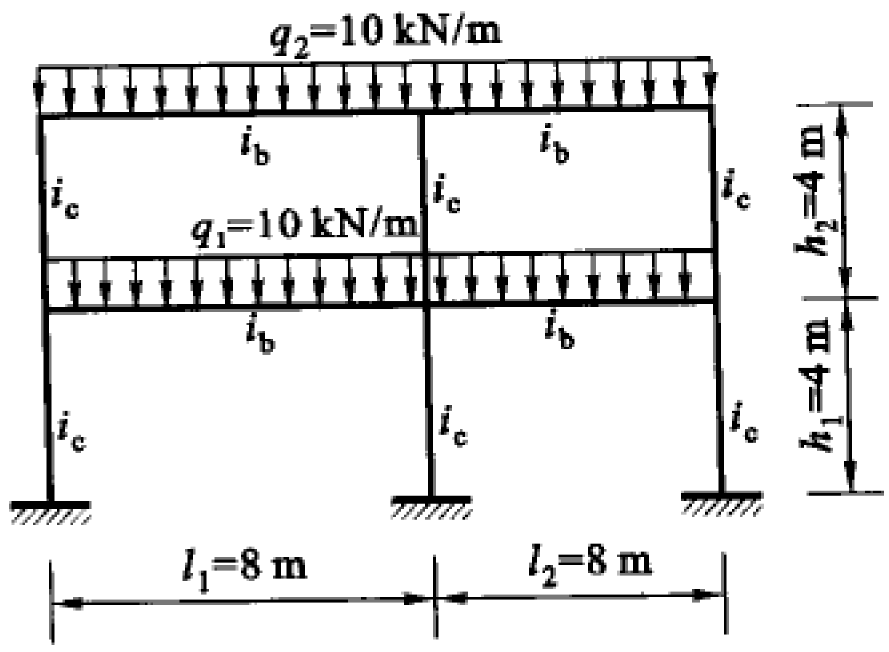
7－23 图示2跨2层刚架，梁的线刚度 i_b，柱的线刚度 i_c。在以下三种情况下（均为杆线刚度相对值）：

（1）$i_b=1$，$i_c=1$；

（2）$i_b=1$，$i_c=10$；

（3）$i_b=10$，$i_c=1$。

试求：(a) 忽略结点侧移时，刚架的弯矩图。



题7－23图

(b) 考虑结点侧移时，刚架的弯矩图。

(c) 比较以上三种情况下，忽略结点侧移与考虑结点侧移内力的差别。

第8章
渐近法及其他算法简述

本章介绍属于位移法类型的渐近解法——力矩分配法和无剪力分配法。力矩分配法适用于连续梁和无结点线位移的刚架；无剪力分配法适用于刚架中除杆端无相对线位移的杆件外，其余杆件都是剪力静定杆件的情况，它是力矩分配法的一种特殊的形式。对于一般有结点线位移的刚架，可用力矩分配法和位移法联合求解。

渐近法是本章讨论的重点，此外，还简略地介绍了联合法、近似法、各类方法比较及利用挠度图作超静定力影响线的方法。

§8－1　力矩分配法的基本概念

力矩分配法的理论基础是位移法，解题方法采用渐近法，适用范围是无结点线位移的刚架和连续梁。下面先解释力矩分配法中使用的几个名词。杆端弯矩的正负号规定与位移法相同。

1．名词解释

(1) 转动刚度

转动刚度表示杆端对转动的抵抗能力。杆端的转动刚度以 S 表示，它在数值上等于使杆端产生单位转角时需要施加的力矩。图 8－1a、b、c、d 给出了等截面杆件在 A 端的转动刚度 S_{AB} 的数值。关于 S_{AB} 应当注意下列几点：

1) 在 S_{AB} 中 A 点是施力端，B 点称为远端。当远端为不同支承情况时，S_{AB} 数值也不同。

2) S_{AB} 是指施力端 A 在没有线位移的条件下的转动刚度。在图 8－1 中，A 端画成铰支座，其目的是为了强调 A 端只能转动、不能移动这个特点。

如果把 A 端改成辊轴支座，则 S_{AB} 的数值不变，也可以把 A 端看作可转动(但不能移动)的刚结点。这时 S_{AB} 就代表当刚结点产生单位转角时在杆端 A 引起的杆端弯矩。

3) 图 8－1a、b、c、d 中的转动刚度可由位移法中的杆端弯矩公式导出。汇总如下：

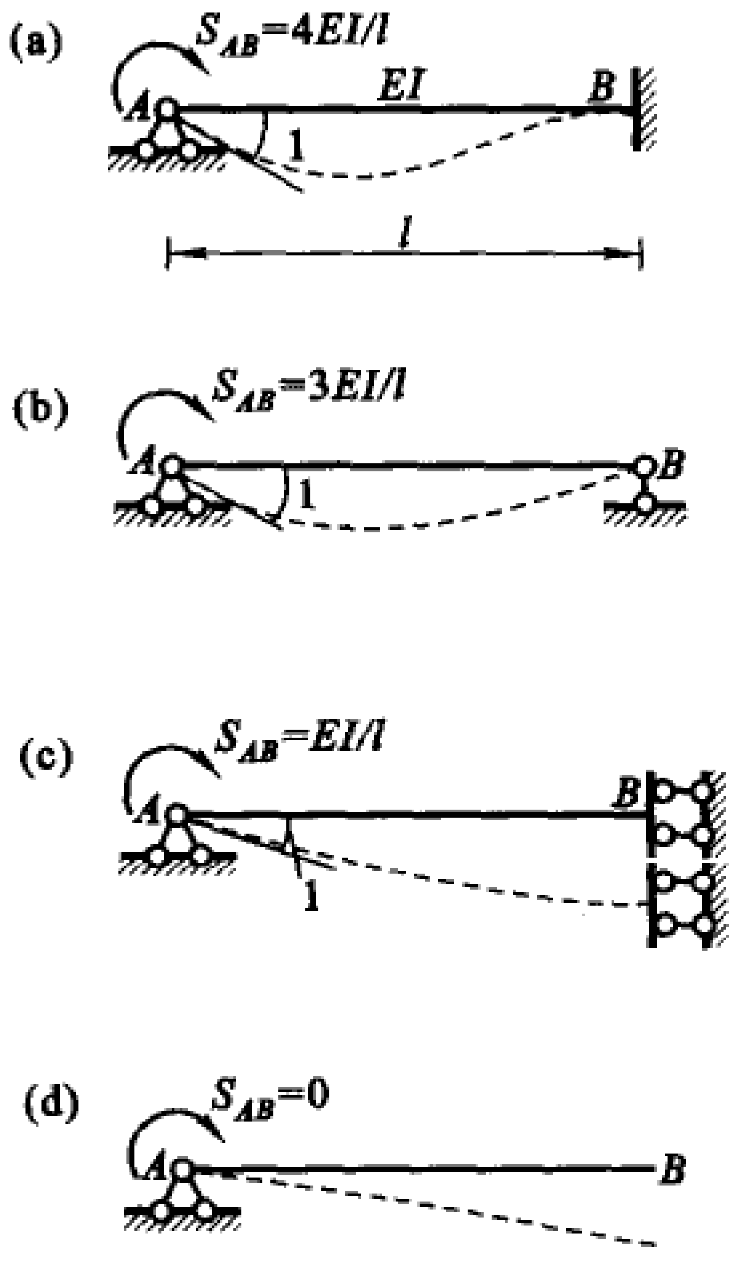


图 8-1

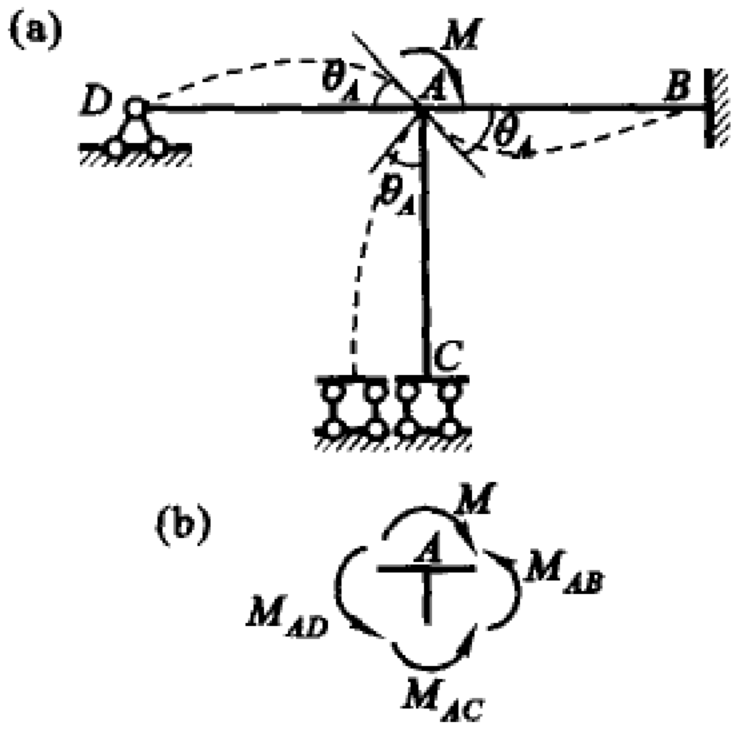


图 8-2

远端固定，　　$S=4i$　　(8-1)

远端简支，　　$S=3i$　　(8-2)

远端滑动，　　$S=i$　　(8-3)

远端自由，　　$S=0$　　(8-4)

式中 $i=\dfrac{EI}{l}$。

(2) 分配系数

图 8-2a 所示三杆 AB、AC 和 AD 在刚结点 A 连接在一起。为了便于说明问题，设 B 端为固定端，C 端为滑动支座，D 端为铰支座。

设有力偶 M 加于结点 A，使结点 A 产生转角 θ_A，然后达到平衡。试求杆端弯矩 M_{AB}、M_{AC} 和 M_{AD}。由转动刚度的定义可知：

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= S_{AB}\theta_A = 4i_{AB}\theta_A \\ M_{AC} &= S_{AC}\theta_A = i_{AC}\theta_A \\ M_{AD} &= S_{AD}\theta_A = 3i_{AD}\theta_A \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

取结点 A 作隔离体(图 8-2b)，由平衡方程 $\sum M=0$，得

$$M = S_{AB}\theta_A + S_{AC}\theta_A + S_{AD}\theta_A$$

$$\theta_A = \frac{M}{S_{AB} + S_{AC} + S_{AD}} = \frac{M}{\sum_A S}$$

式中$\sum_A S$ 表示各杆 A 端转动刚度之和。

将 θ_A 值代入式(a)，得

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{S_{AB}}{\sum_A S} M \\ M_{AC} &= \frac{S_{AC}}{\sum_A S} M \\ M_{AD} &= \frac{S_{AD}}{\sum_A S} M \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

由此看来，各杆 A 端的弯矩与各杆 A 端的转动刚度成正比。可以用下列公式表示计算结果：

$$M_{Aj} = \mu_{Aj} M \tag{8-5}$$

$$\mu_{Aj} = \frac{S_{Aj}}{\sum_A S} \tag{8-6}$$

μ_{Aj} 称为分配系数。其中 j 可以是 B、C 或 D，如 μ_{AB} 称为杆 AB 在 A 端的分配系数。杆 AB 在结点 A 的分配系数 μ_{AB} 等于杆 AB 的转动刚度与交于 A 点的各杆的转动刚度之和的比值。

同一结点各杆分配系数之间存在下列关系：

$$\sum \mu_{Aj} = \mu_{AB} + \mu_{AC} + \mu_{AD} = 1$$

总之，加于结点 A 的力偶 M，按各杆的分配系数分配于各杆的 A 端。

(3) 传递系数

在图 8-2a 中，力偶 M 加于结点 A，使各杆近端产生弯矩，同时也使各杆远端产生弯矩。由位移法中的刚度方程可得杆端弯矩的具体数值如下：

$$\begin{aligned} &M_{AB} = 4 i_{AB} \theta_A \qquad M_{BA} = 2 i_{AB} \theta_A \\ &M_{AC} = i_{AC} \theta_A, \qquad M_{CA} = - i_{AC} \theta_A \\ &M_{AD} = 3 i_{AD} \theta_A, \qquad M_{DA} = 0 \end{aligned}$$

由上述结果可知：

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = C_{AB} = \frac{1}{2}$$

这个比值 $C_{AB} = \frac{1}{2}$ 称为传递系数。传递系数表示当近端有转角时，远端弯矩与近端

弯矩的比值。对等截面杆件来说,传递系数 C 随远端的支承情况而异,数值如下:

远端固定, $$C=\frac{1}{2} \tag{8-7}$$

远端滑动, $$C=-1 \tag{8-8}$$

远端铰支, $$C=0 \tag{8-9}$$

用下列公式表示传递系数的应用:

$$M_{BA}=C_{AB}M_{AB} \tag{8-10}$$

系数 C_{AB} 称为由 A 端至 B 端的传递系数。

现在把图 8-2a 所示问题的计算方法归纳如下:

结点 A 作用的力偶 M,按各杆的分配系数分配给各杆的近端;远端弯矩等于近端弯矩乘以传递系数。

2. 基本运算(单结点的力矩分配)

力矩分配法的物理概念可用实物模型来说明。图 8-3 所示为一连续梁的模型。连续梁 ABC 为薄钢片,用砝码加荷载 F_P 后,连续梁的变形如图8-3a中虚线所示。伴随着这个变形出现的杆端弯矩,是计算的目标。

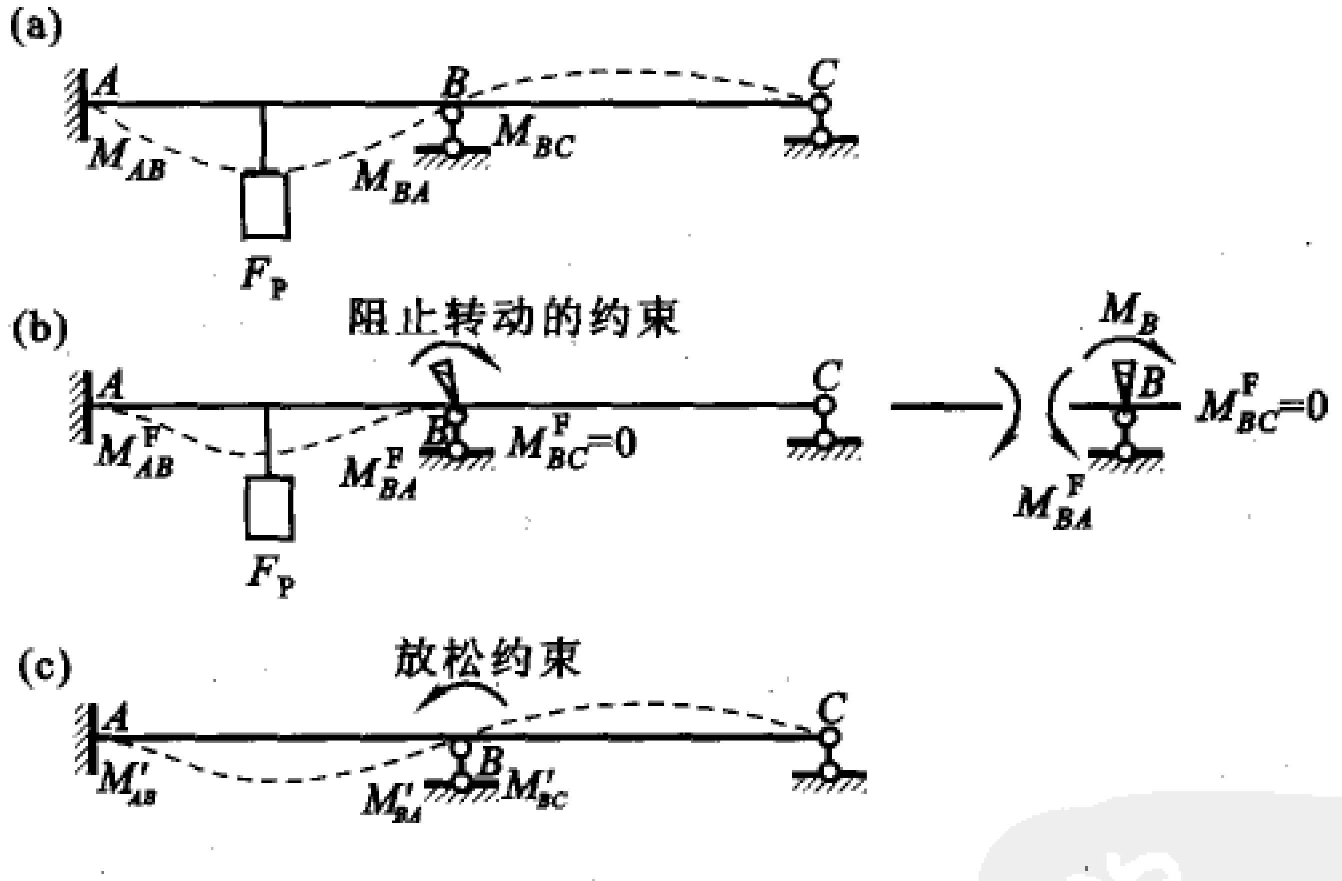


图 8-3

在力矩分配法中,我们直接计算各杆的杆端弯矩。杆端弯矩以顺时针转向为正。计算步骤表述如下:

(1) 设想先在结点 B 加一个阻止转动的约束(如用螺栓夹紧)阻止结点 B 转动,然后再加砝码。这时,只 AB一跨有变形,如图 8-3b 中虚线所示。这表明结点约束把连续梁 ABC 分成为两个单跨梁 AB 和 BC。AB一段受荷载 F_P 作用后产生变形,相应地产生固端弯矩。结点 B 的约束施加的力矩 M_B(称为约束力矩)可以通过结点 B 的平衡方程求得。从图 8-3b 可以看出,杆 BC 的固端

弯矩 $M^{F}_{BC}=0$，杆 BA 的固端弯矩为 M^{F}_{BA}。由 $\sum M_B=0$，可知结点 B 的约束力矩 $M_B=M^{F}_{BC}+M^{F}_{BA}=M^{F}_{BA}$。约束力矩等于固端弯矩之和，以顺时针转向为正。

(2) 连续梁的结点 B 本来没有约束，也不存在约束力矩 M_B。因此，图8-3b所示的解答必须加以修正。为了达到这个目的，我们放松结点 B 处的约束，梁即回复到原来的状态(图 8-3a)，结点 B 处的约束力矩即由 M_B 回复到零，这相当于在结点 B 原有约束力矩 M_B 的基础上再新加一个力偶($-M_B$)。力偶 $-M_B$ 使梁新产生的变形如图 8-3c 中虚线所示。这时，结点 B 处各杆在 B 端新产生弯矩 M'_{BA} 和 M'_{BC}，称为分配力矩；在远端 A 新产生弯矩 M'_{AB}，称为传递力矩。

(3) 把图 8-3b、c 所示两种情况叠加，就得到图 8-3a 所示情况。因此，把图 8-3b、c 中的杆端弯矩叠加，就得到实际的杆端弯矩(图 8-3a)，例如 $M^{F}_{BA}+M'_{BA}=M_{BA}$。

现在把力矩分配法的物理概念简述如下：先在刚结点 B 加上阻止转动的约束，把连续梁分为单跨梁，求出杆端产生的固端弯矩。结点 B 各杆固端弯矩之和即为约束力矩 M_B。去掉约束(即相当于在结点 B 新加 $-M_B$)，求出各杆 B 端新产生的分配力矩和远端新产生的传递力矩。叠加各杆端记下的力矩就得到实际的杆端弯矩。

下面通过例题说明力矩分配法的基本运算步骤。

例 8-1 图 8-4 所示为一连续梁，试用力矩分配法作弯矩图。

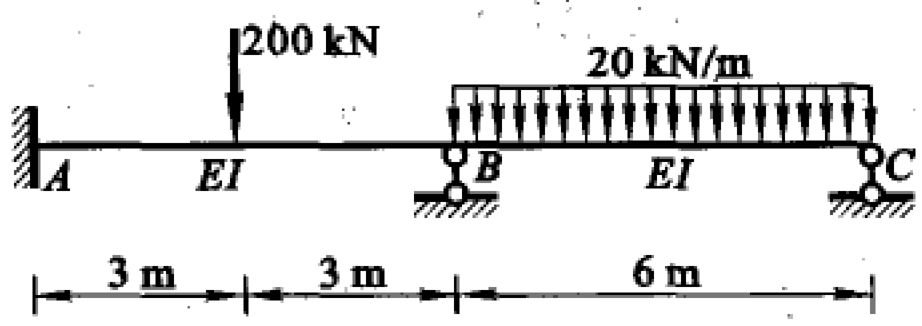


图 8-4

解 (1) 先在结点 B 加上约束(图 8-5a)

计算由荷载产生的固端弯矩(顺时针转向为正号)，写在各杆端的下方：

$$M^{F}_{AB}=-\frac{200\ \text{kN}\times 6\ \text{m}}{8}=-150\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M^{F}_{BA}=\frac{200\ \text{kN}\times 6\ \text{m}}{8}=150\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M^{F}_{BC}=-\frac{20\ \text{kN/m}\times(6\ \text{m})^2}{8}=-90\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

在结点 B 处，各杆端弯矩总和为 $M_B=150\ \text{kN}\cdot\text{m}-90\ \text{kN}\cdot\text{m}=60\ \text{kN}\cdot\text{m}$。$M_B$ 即为结点 B 的约束力矩。

(2) 放松结点 B

这等于在结点 B 新加一个外力偶矩 $-60\ \text{kN·m}$(图 8-5b)。此力偶按分配系数分配于两杆的 B 端,并使 A 端产生传递力矩。具体演算如下:

杆 AB 和 BC 的线刚度相等,$i=\dfrac{EI}{l}$。

转动刚度:

$$S_{BA}=4i$$
$$S_{BC}=3i$$

分配系数:

$$\mu_{BA}=\frac{4i}{4i+3i}=0.571$$
$$\mu_{BC}=\frac{3i}{4i+3i}=0.429$$

校核:

$$\mu_{BA}+\mu_{BC}=1$$

分配系数写在结点 B 上面的方框内。

分配力矩:

$$M'_{BA}=0.571\times(-60\ \text{kN·m})=-34.3\ \text{kN·m}$$
$$M'_{BC}=0.429\times(-60\ \text{kN·m})=-25.7\ \text{kN·m}$$

分配力矩下面画一横线,表示结点已经放松,达到平衡。

传递力矩(远端固定时,传递系数为 1/2;远端为铰支时,传递系数为零):

$$M'_{AB}=\frac{1}{2}M'_{BA}=\frac{1}{2}\times(-34.3\ \text{kN·m})=-17.2\ \text{kN·m}$$
$$M'_{CB}=0$$

将结果按图 8-5b(图中弯矩、力矩单位为 kN·m)写出,并用箭头表示力矩传递的方向。

(3) 将以上结果叠加,即得到最后的杆端弯矩,其单位为 kN·m(图 8-5c)。

实际演算时,可将以上计算步骤汇集在一起,按图 8-5c 的格式演算。下面画双横线表示最后结果。注意在结点 B 应满足平衡条件:

$$\sum M=115.7\ \text{kN·m}-115.7\ \text{kN·m}=0$$

根据杆端弯矩,可作出 M 图,如图 8-5d 所示。

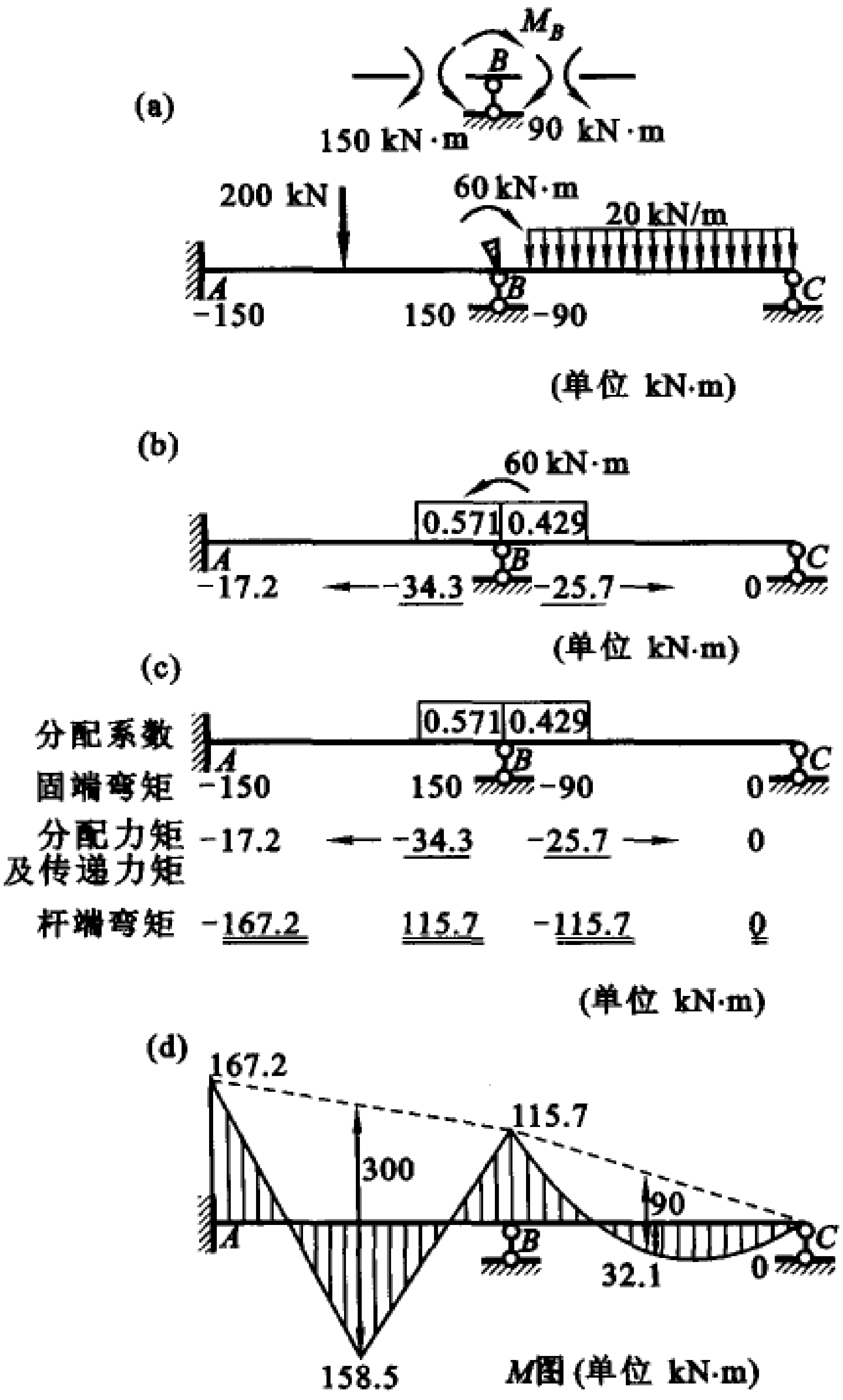


图　8－5

§8－2　多结点的力矩分配

上节已经说明了力矩分配法的基本概念。对于有多个结点的连续梁和无侧移刚架，只要逐次对每一个结点应用上节的基本运算，就可求出杆端弯矩。

先用一个三跨连续梁的模型来说明逐次渐近的过程。连续梁 $ABCD$ 在中间跨加砝码后的变形曲线如图 8－6a 所示，相应于此变形的弯矩是要计算的目标。下面说明渐近过程。

第一步，先在结点 B 和 C 加约束，阻止结点转动，然后再加砝码（图

8-6b)。这时,约束把连续梁分成了三根单跨梁,仅 BC 一跨有变形,如图中虚线所示。

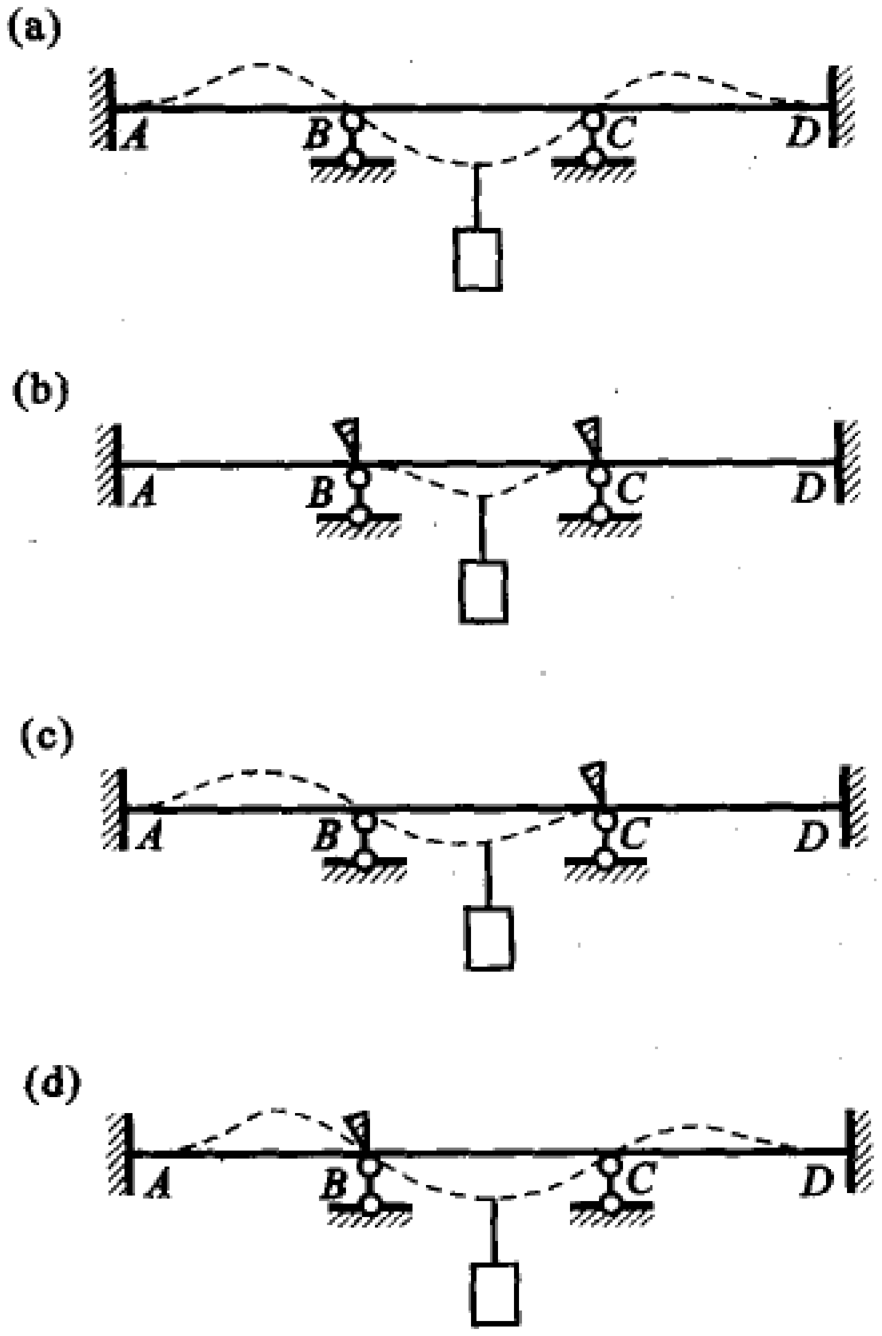


图　8-6

第二步,去掉结点 B 的约束(图 8-6c,注意此时结点 C 仍夹紧),这时结点 B 将有转角,累加的总变形如图 8-6c 中虚线所示。

第三步,重新将结点 B 夹紧,然后去掉结点 C 的约束。累加的总变形将如图 8-6d 中虚线所示。从模型中可以看出,此时变形已比较接近实际变形。

以此类推,再重复第二步和第三步,即轮流去掉结点 B 和结点 C 的约束。连续梁的变形和内力很快就达到实际状态,但每次只放松一个结点,故每一步均为单结点的分配和传递运算。最后,将各项步骤所得的杆端弯矩(弯矩增量)叠加,即得所求的杆端弯矩(总弯矩)。实际上,只需对各结点进行两到三个循环的运算,就能达到较好的精度。

例 8-2　试作图 8-7a 所示连续梁的弯矩图。

解　通过此例给出多结点力矩分配法的演算格式,如图 8-7b 所示。

现按演算程序说明如下:

(1) 求各结点的分配系数

由于在计算中只在 B、C 两个结点施加约束并进行放松,所以只需计算 B、

C 两结点的分配系数。

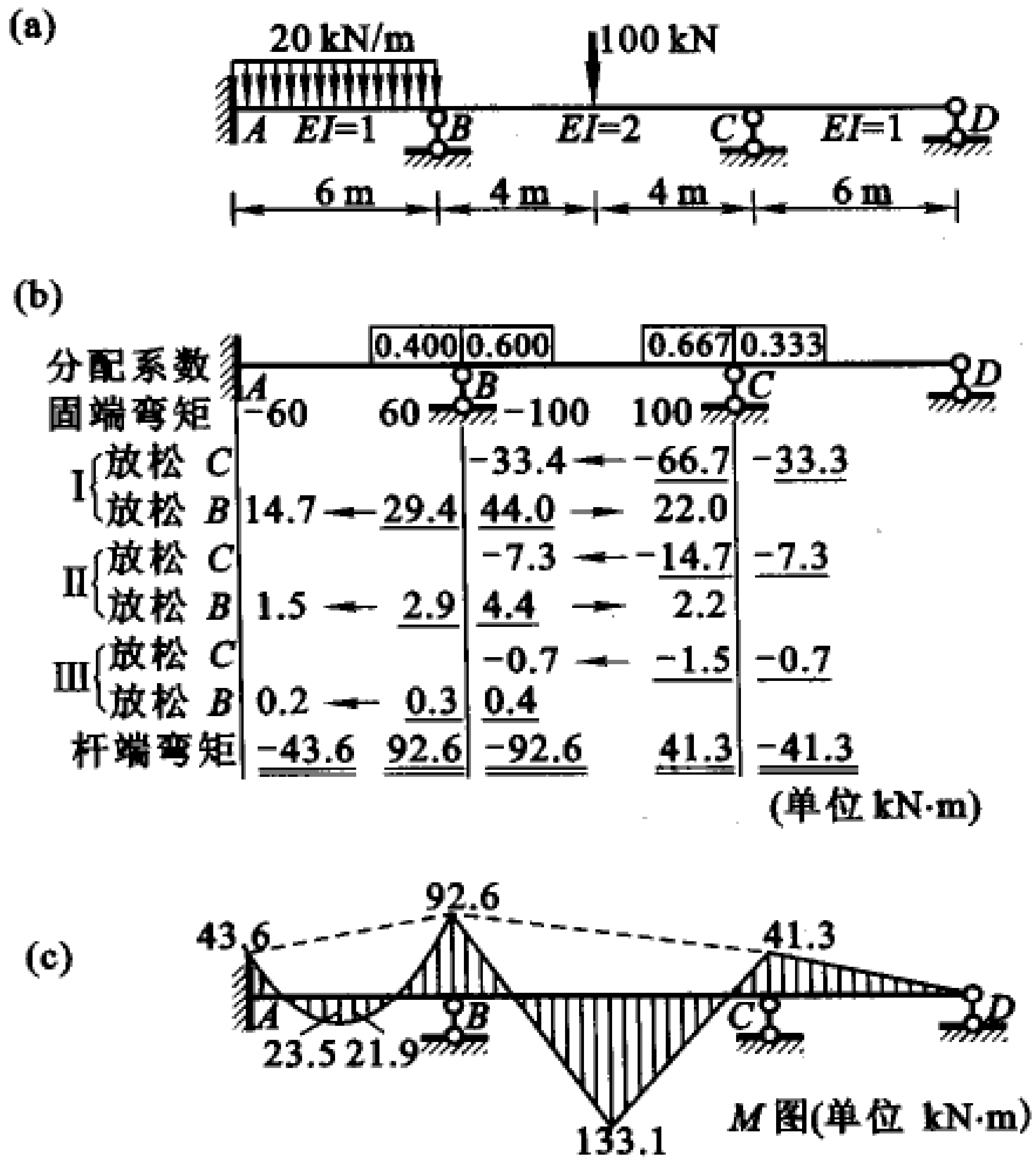


图　8－7

结点 B：①

$$S_{BA}=4i_{BA}=4\times\frac{1}{6}=0.667$$

$$S_{BC}=4i_{BC}=4\times\frac{2}{8}=1$$

所以

$$\mu_{BA}=\frac{0.667}{1+0.667}=0.4$$

$$\mu_{BC}=\frac{1}{1+0.667}=0.6$$

结点 C：

$$S_{CB}=4i_{CB}=4\times\frac{2}{8}=1$$

$$S_{CD}=3i_{CD}=3\times\frac{1}{6}=0.5$$

① 本例中 EI 用的是相对值，故转动刚度 S 已非真值，只是一个比例关系，故不注明单位。下同。

所以

$$\mu_{CB}=\frac{1}{1+0.5}=0.667$$

$$\mu_{CD}=\frac{0.5}{1+0.5}=0.333$$

分配系数分别写在图 8－7b 中结点上端的方格内。

(2) 锁住结点 B、C,求各杆的固端弯矩：

$$M_{AB}^{F}=-\frac{ql^2}{12}=-\frac{20\ \text{kN/m}\times(6\ \text{m})^2}{12}=-60.0\ \text{kN·m}$$

$$M_{BA}^{F}=60.0\ \text{kN·m}$$

$$M_{BC}^{F}=-\frac{F_P l}{8}=-\frac{100\ \text{kN}\times 8\ \text{m}}{8}=-100.0\ \text{kN·m}$$

$$M_{CB}^{F}=100.0\ \text{kN·m}$$

将计算结果记于图 8－7b 中第一行。

(3) 放松结点 C(此时结点 B 仍被锁住),按单结点问题进行分配和传递；结点 C 的约束力矩为 100.0 kN·m,放松结点 C,等于在结点 C 新加力偶荷载(－100.0 kN·m),CB、CD 两杆的相应分配力矩为

$$0.667\times(-100)\ \text{kN·m}=-66.7\ \text{kN·m}$$

$$0.333\times(-100)\ \text{kN·m}=-33.3\ \text{kN·m}$$

杆 BC 的传递力矩为

$$\frac{1}{2}\times(-66.7)\ \text{kN·m}=-33.4\ \text{kN·m}$$

经过分配和传递,结点 C 已经平衡,可在分配力矩的数字下画一横线,表示横线以上的结点力矩总和已等于零。

(4) 重新锁住结点 C,并放松结点 B

结点 B 的约束力矩为

$$60.0\ \text{kN·m}-100.0\ \text{kN·m}-33.4\ \text{kN·m}=-73.4\ \text{kN·m}$$

放松结点 B,等于在结点 B 新加一力偶(73.4 kN·m)。BA、BC 两杆的分配力矩为

$$0.4\times 73.4\ \text{kN·m}=29.4\ \text{kN·m}$$

$$0.6\times 73.4\ \text{kN·m}=44.0\ \text{kN·m}$$

传递力矩为

$$\frac{1}{2}\times 29.4\ \text{kN·m}=14.7\ \text{kN·m},\quad \frac{1}{2}\times 44.0\ \text{kN·m}=22.0\ \text{kN·m}$$

此时,结点 B 已经平衡,但结点 C 又不平衡了。以上完成了力矩分配法的第一个循环。

(5) 进行第二个循环

再次先后放松结点 C 和 B,相应的结点约束力矩分别为 22 kN·m, -7.3 kN·m

(6) 进行第三个循环

相应的结点约束力矩分别为 2.2 kN·m, -0.7 kN·m

由此可以看出,结点约束力矩的衰减过程是很快的。进行三次循环后,结点约束力矩已经很小,结构已接近恢复到实际状态,故计算工作可以停止。

(7) 将固端弯矩,历次的分配力矩和传递力矩相加,即得最后的杆端弯矩,其单位为 kN·m(图 8-7b)。

(8) 根据杆端弯矩,可画出 M 图,如图 8-7c 所示。

例 8-3 试作图 8-8 所示刚架的弯矩图、剪力图和轴力图。

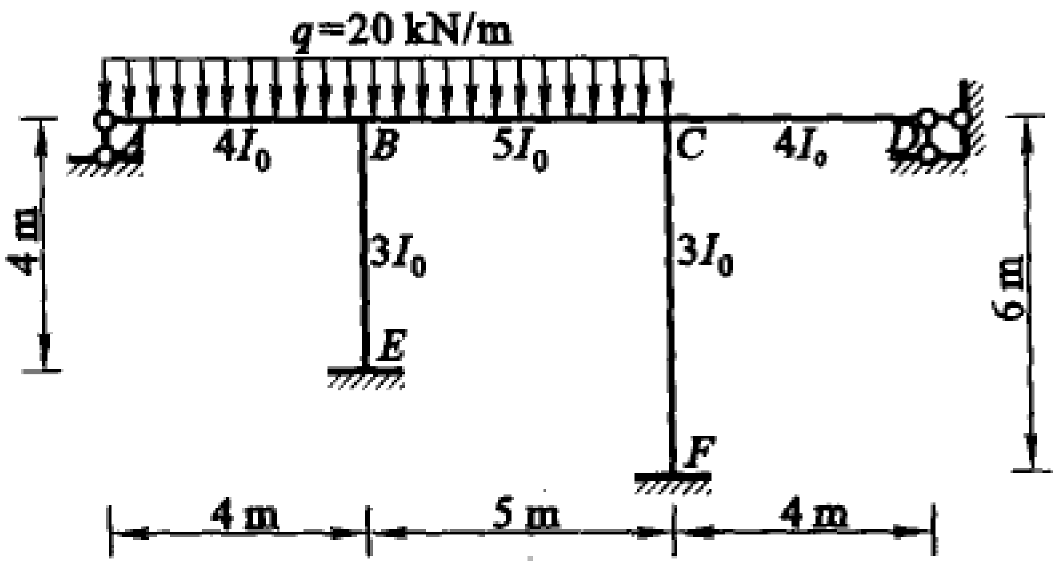


图 8-8

解 (1) 转动刚度

取相对值计算,设 $EI_0=1$①,

$$i_{BA}=\frac{4EI_0}{4}=1,\qquad S_{BA}=3i_{BA}=3$$

$$i_{BC}=\frac{5EI_0}{5}=1,\qquad S_{BC}=S_{CB}=4i_{BC}=4$$

$$i_{CD}=\frac{4EI_0}{4}=1,\qquad S_{CD}=3i_{CD}=3$$

$$i_{BE}=\frac{3EI_0}{4}=\frac{3}{4},\qquad S_{BE}=4i_{BE}=4\times\frac{3}{4}=3$$

$$i_{CF}=\frac{3EI_0}{6}=\frac{1}{2},\qquad S_{CF}=4i_{CF}=4\times\frac{1}{2}=2$$

(2) 分配系数

① 超静定结构在荷载作用下的内力只与各杆 EI 的相对值有关,与各杆 EI 的绝对值(真值)无关,为了计算的简单,常采用相对值,本例题中的有关刚度均是相对值,故不注明其单位。下同。

结点 B：
$$\sum S = S_{BA} + S_{BC} + S_{BE} = 3 + 4 + 3 = 10$$
$$\mu_{BA} = \frac{3}{10} = 0.3, \quad \mu_{BC} = \frac{4}{10} = 0.4$$
$$\mu_{BE} = \frac{3}{10} = 0.3$$

结点 C：
$$\sum S = S_{CB} + S_{CD} + S_{CF} = 4 + 3 + 2 = 9$$
$$\mu_{CB} = \frac{4}{9} = 0.445, \qquad \mu_{CD} = \frac{3}{9} = 0.333$$
$$\mu_{CF} = \frac{2}{9} = 0.222$$

（3）固端弯矩
$$M_{BA}^{F} = \frac{ql^2}{8} = \frac{20\ \text{kN/m} \times (4\ \text{m})^2}{8} = 40\ \text{kN·m}$$
$$M_{BC}^{F} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{20\ \text{kN/m} \times (5\ \text{m})^2}{12} = -41.7\ \text{kN·m}$$
$$M_{CB}^{F} = 41.7\ \text{kN·m}$$

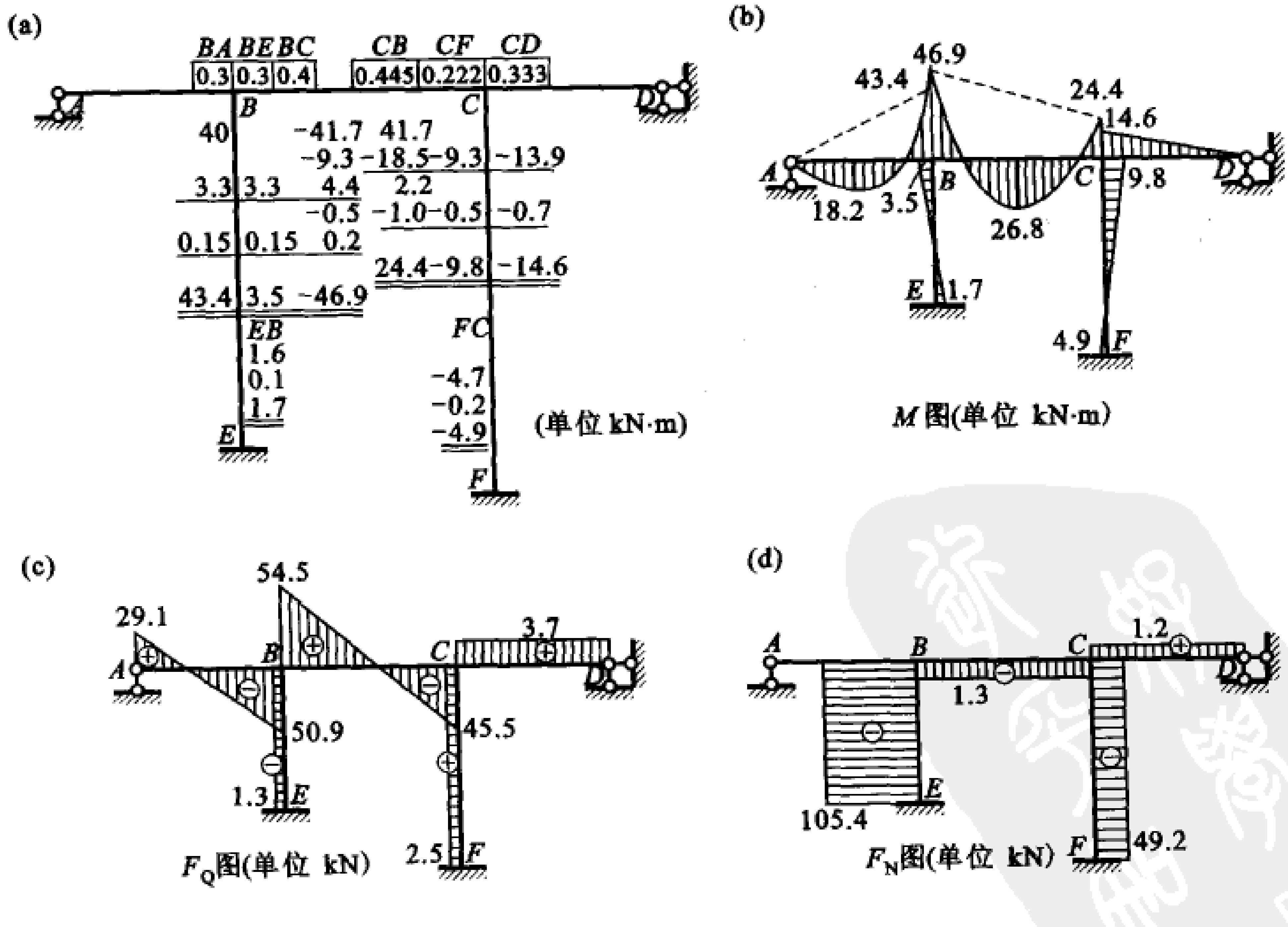


图 8-9

（4）力矩分配

按 C、B 顺序分配两轮，计算如图 8－9a 所示。放松结点的次序可以任取，并不影响最后的结果。但为了缩短计算过程，最好先放松约束力矩较大的结点。在本例中，先放松结点 C 较好。

(5) 作弯矩图如图 8－9b 所示。

(6) 作 F_Q 图

取各杆为隔离体，用平衡方程求杆端剪力。利用杆端剪力可作每杆的 F_Q 图。F_Q 图如图 8－9c 所示。

(7) 作 F_N 图

取结点为隔离体，已知各杆对结点的剪力，根据平衡条件可求出各杆对结点的轴力。轴力图如图 8－9d 所示。

例 8－4　图 8－10a 所示为一带悬臂的等截面连续梁，试作 M 图。

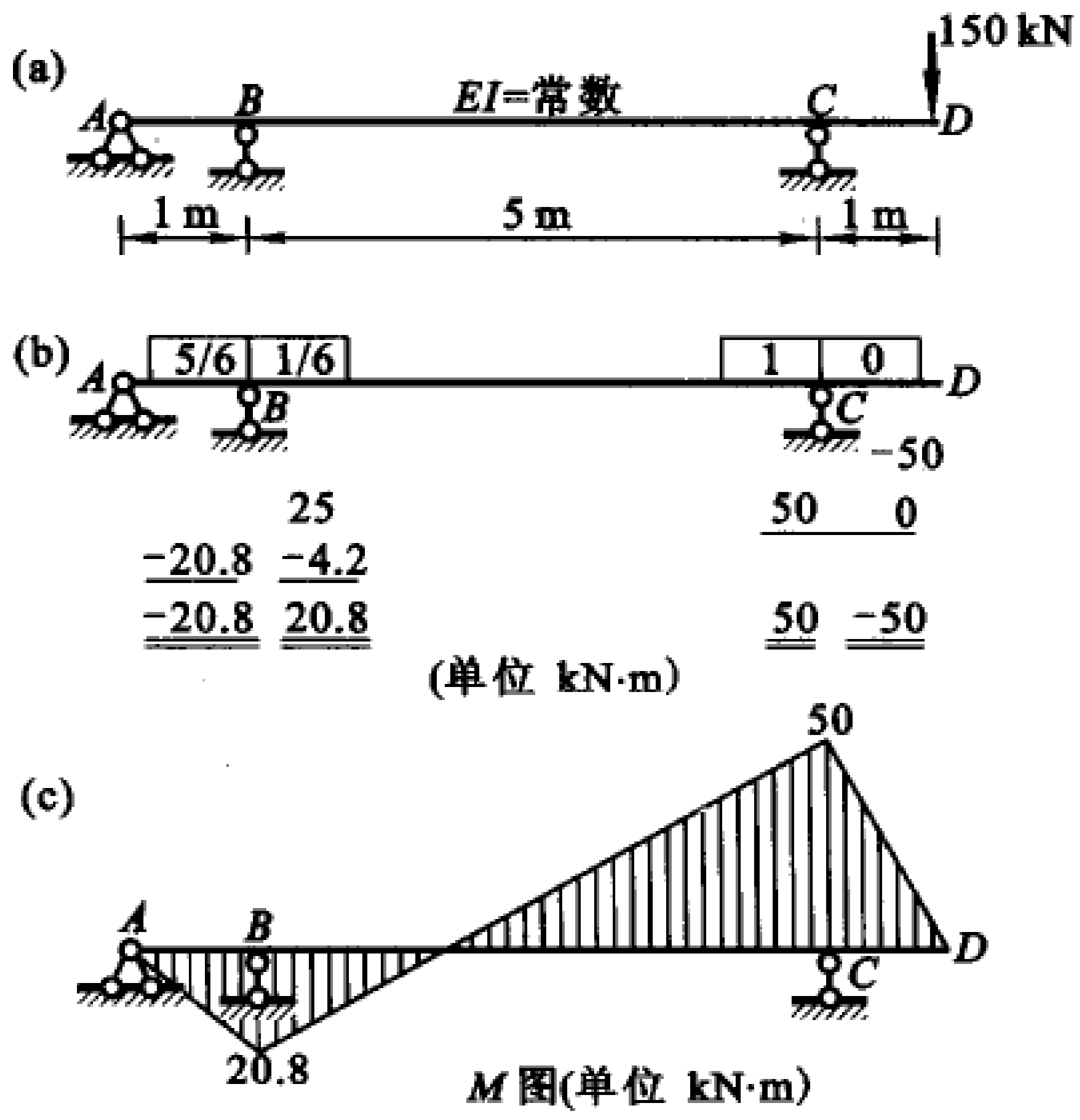


图　8－10

解　(1) 锁住结点 B 和 C，写出固端弯矩。

悬臂梁的固端弯矩是静定的，$M_{CD}^{F}=-50\ \text{kN·m}$

(2) 放松结点 C

$$S_{CB}=4\,\frac{EI}{5},\quad S_{CD}=0$$

$$\mu_{CB}=1,\quad \mu_{CD}=0$$

记下分配力矩和传递力矩(图 8－10b)。

(3) 结点 C 不再锁住，保持为铰支端

放松结点 B：

$$S_{BA}=3\frac{EI}{1},\quad S_{BC}=3\frac{EI}{5}$$

$$\mu_{BA}=\frac{5}{6},\quad \mu_{BC}=\frac{1}{6}$$

只记分配力矩，无传递力矩。至此力矩分配过程即告结束。

（4）画弯矩图

弯矩图如图8－10c所示。

图8－10a所示的梁，也可以将伸臂 CD 部分及其荷载简化为一个作用于结点 C 的力偶 $M=50.0\ \mathrm{kN\cdot m}$（这时 C 为铰结点）进行计算。读者可按这种计算程序重算此例题。

本节介绍了多结点力矩分配法计算的全过程。

与上述方法相近的还有一种力矩迭代法（常简称为迭代法），也是以位移法为基础的一种渐近解法，也是以杆端弯矩作为运算对象。杆端弯矩也采用相同的正负号规定。二者的区别是：在每次渐近运算中，力矩分配法计算的是杆端弯矩新添的增量，力矩迭代法计算的是杆端弯矩全量的新一轮近似解。此外，力矩分配法一般只用于解无侧移刚架，力矩迭代法可用于解无侧移和有侧移的刚架。有关力矩迭代法的详细内容可参见龙驭球，包世华主编，《结构力学》，上册，第二版，高等教育出版社，1994年。

最后指出，无论力矩分配法还是力矩迭代法，都是线性方程组迭代解法在结构力学中的具体运用。按结构的受力状态，从开始时的近似状态，逐步调整，最后收敛于真实状态；把计算过程中的每个步骤都给以明确的物理（力学）意义，因而便于理解和掌握；是数学方法与力学应用问题结合得很好的一个范例。

§8－3　对称结构的计算

实际工程中的连续梁和刚架常是对称的。作用在对称结构上的任意荷载，可以分解为对称荷载和反对称荷载两部分分别计算。在对称荷载作用下，弯矩图和轴力图是对称的，而剪力图是反对称的；在反对称荷载作用下，弯矩图和轴力图是反对称的，而剪力图是对称的。利用这些性质，在对称结构中可只取半边结构进行计算。下面通过例题说明力矩分配法在对称结构中的应用。

例8－5　图8－11a所示刚架，试作 M 图。

解　（1）计算中取半边结构

如图8－11c所示，G 和 H 为滑动端。

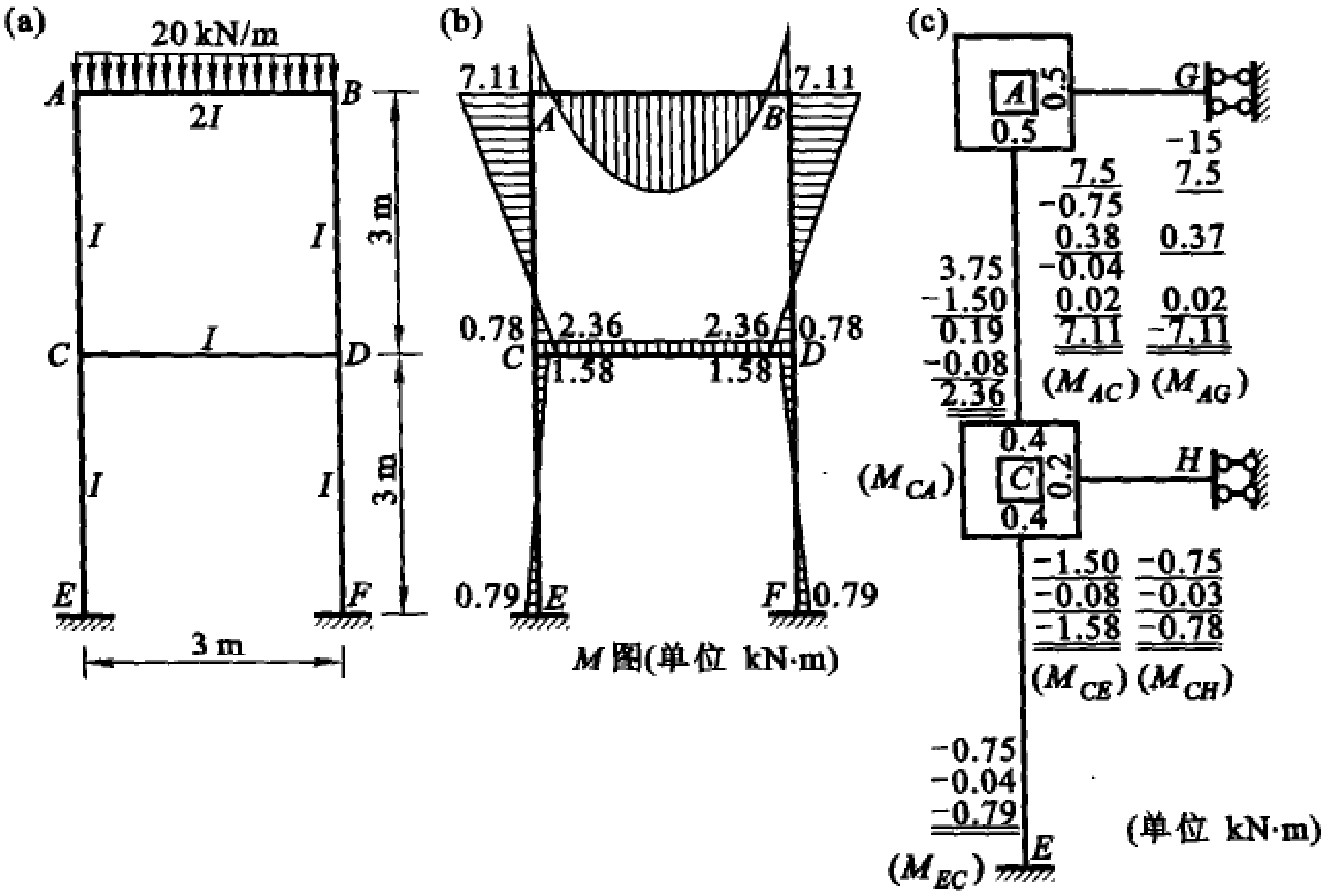


图　8-11

(2) 计算分配系数

$$S_{AG}=\frac{2EI}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}EI,\quad S_{AC}=S_{CA}=\frac{4}{3}EI$$

$$S_{CH}=\frac{2EI}{3},\quad S_{CE}=\frac{4EI}{3}$$

结点 A：

$$\mu_{AG}=0.5,\quad \mu_{AC}=0.5$$

结点 C：

$$\mu_{CH}=0.2,\quad \mu_{CA}=0.4\quad \mu_{CE}=0.4$$

各杆分配系数记于结点周围。

(3) 计算固端弯矩

梁 AB 的固端弯矩可以根据原结构或半边结构计算，见表 7-1。

据原结构，$M_{AB}^{F}=-\frac{1}{12}\times 20\ \mathrm{kN/m}\times(3\ \mathrm{m})^2=-15\ \mathrm{kN\cdot m}$

据半边结构，$M_{AG}^{F}=-\frac{1}{3}\times 20\ \mathrm{kN/m}\times(1.5\ \mathrm{m})^2=-15\ \mathrm{kN\cdot m}$

(4) 放松结点，按 A、C、A、C、A 次序进行

各杆端的固端弯矩，分配力矩和传递力矩，写于此杆端的一旁。注意：放松结点 C 时，分配力矩 M_{CA} 应向柱 AC 的上端传递。

(5) 作 M 图

图 8-11b 所示为刚架的 M 图。

例 8-6　试求图 8-12a 所示矩形衬砌在上部土压力作用下的弯矩图。

解　衬砌上部土压力为均匀分布,集度为 q kN/m。底面反力假设为均布,则由竖向平衡条件,竖向反力也为 q kN/m。计算简图如图 8-12b 所示。

本题中的结构和荷载对 x 轴和 y 轴都是对称的。对称轴 y 上面的 E 点只有竖向位移,没有水平位移和转角。同样对称轴 x 上面的 F 点只有水平位移,没有竖向位移和转角。因此,只需截取结构的 EAF 一段进行计算,在 E 点和 F 点取为滑动支座,如图 8-12c 所示。

本题只有一个结点 A,转动刚度和分配系数如下:

转动刚度:

$$S_{AE}=\frac{EI_1}{l_1/2}=2i_1,\quad S_{AF}=\frac{EI_2}{l_2/2}=2i_2$$

这里,i_1、i_2 为横梁和竖柱原来的线刚度。

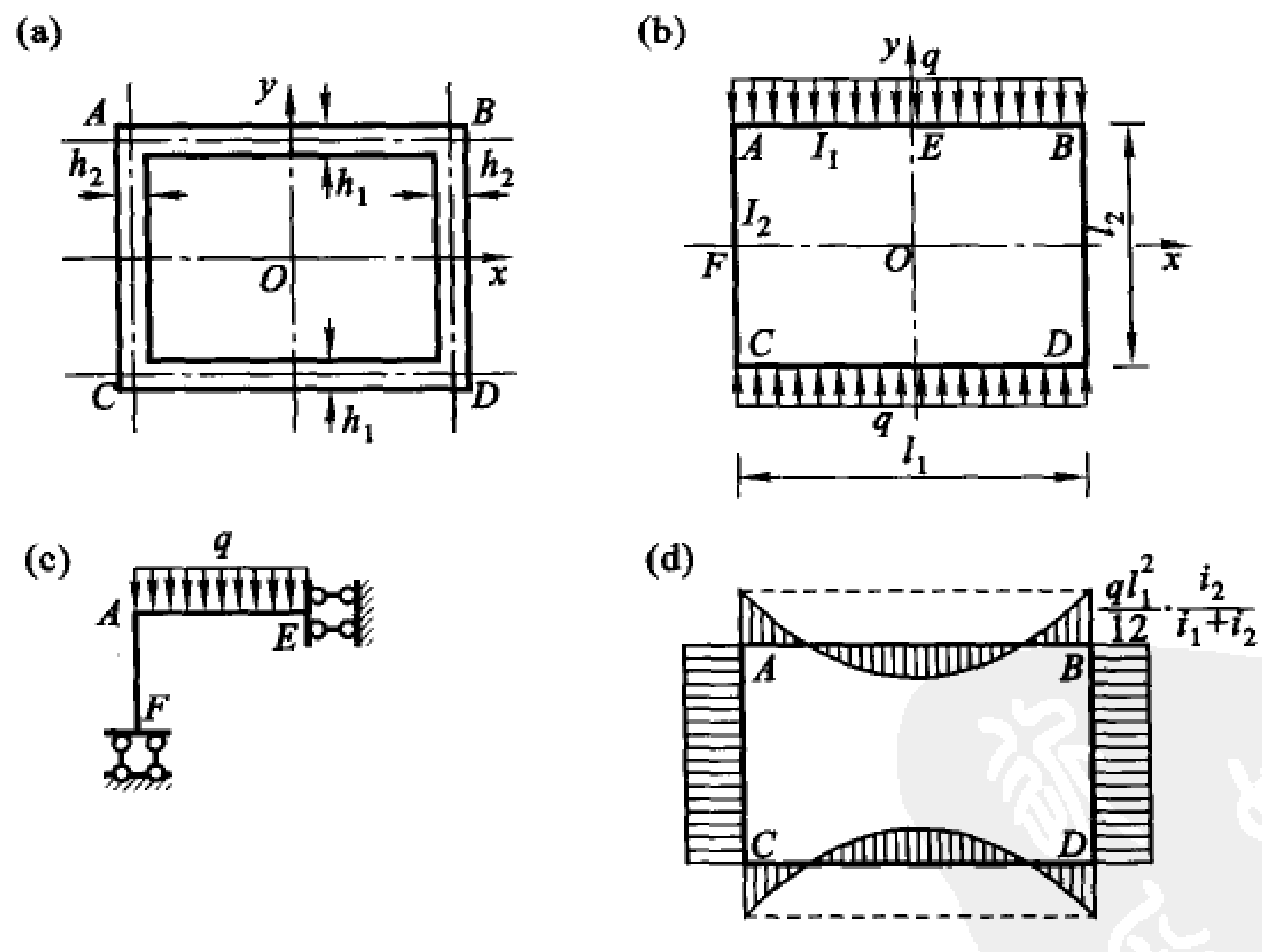


图　8-12

分配系数:

$$\mu_{AE}=\frac{2i_1}{2(i_1+i_2)}=\frac{i_1}{i_1+i_2}$$

$$\mu_{AF}=\frac{2i_2}{2(i_1+i_2)}=\frac{i_2}{i_1+i_2}$$

固端弯矩(见表 7-1):

$$M_{AE}^{F} = -\frac{1}{3}q\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{12}ql_1^2$$

分配过程如图 8-13 所示。

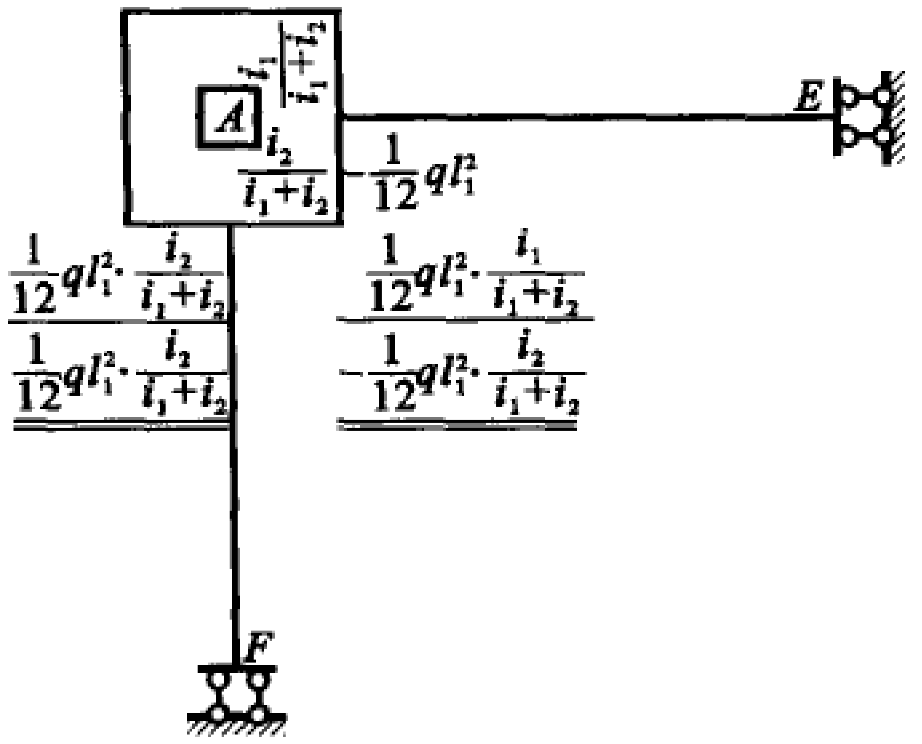


图　8-13

求得结点 A 的弯矩后，再利用对称性，可知其他结点弯矩也相同。最后的弯矩图如图 8-12d 所示。

讨论：

(1) 当竖柱比横梁的刚度大很多时，即 $i_2 \gg i_1$，则 $\frac{i_2}{i_1+i_2}$ 接近于 1（如 $i_2 \geqslant 20i_1$，误差在 5% 以内）。梁端弯矩接近于固端弯矩 $\frac{ql_1^2}{12}$。此时，竖柱对横梁而言，起固定支座的作用。

(2) 当横梁比竖柱的刚度大很多时，即 $i_1 \gg i_2$，则 $\frac{i_2}{i_1+i_2}$ 接近于零。梁端弯矩接近于零。此时，竖柱对横梁而言，起铰支座的作用。

从这个例子可以看出：结构中相邻部分（如这里的梁和柱）是互为支承的，支承的作用不仅决定于构造作法，也与相对刚度有关。在本例中，只要竖柱线刚度 i_2 超过横梁线刚度 i_1 的 20 倍，横梁即可按两端固定的梁计算，此时梁端弯矩的误差在 5% 以内。反之，只要横梁线刚度 i_1 超过竖柱线刚度 i_2 的 20 倍$\left(\text{如 } l_1 = l_2，\text{即} \frac{h_1^3}{h_2^3} \geqslant 20, h_1 \geqslant 2.7h_2\right)$横梁即可按简支梁计算，此时横梁跨中弯矩的误差在 5% 以内。

§8-4 无剪力分配法

在位移法中,刚架分为无侧移刚架与有侧移刚架两类。它们的区别是:在位移法的基本未知量中,前者只包含结点角位移,后者则还包含结点线位移。

力矩分配法是无侧移刚架的渐近法,不能直接用于有侧移刚架。但对某些特殊的有侧移刚架,可以用与力矩分配法类似的无剪力分配法进行计算。

1. 无剪力分配法的应用条件

无剪力分配法不能直接用于有侧移的一般刚架,而只能用于某些特殊刚架。图8-14a所示有侧移的半刚架是一个典型例子(单跨对称刚架在反对称荷载作用下的计算可归结为这类问题)。

在图8-14a中,各梁的两端结点没有相对线位移(即没有垂直杆轴的相对位移),这种杆件称为两端无相对线位移的杆件。各柱的两端结点虽然有侧移,但剪力是静定的(图8-14b所示为各柱的剪力图,可根据平衡条件直接求出),这种杆件称为剪力静定杆件。

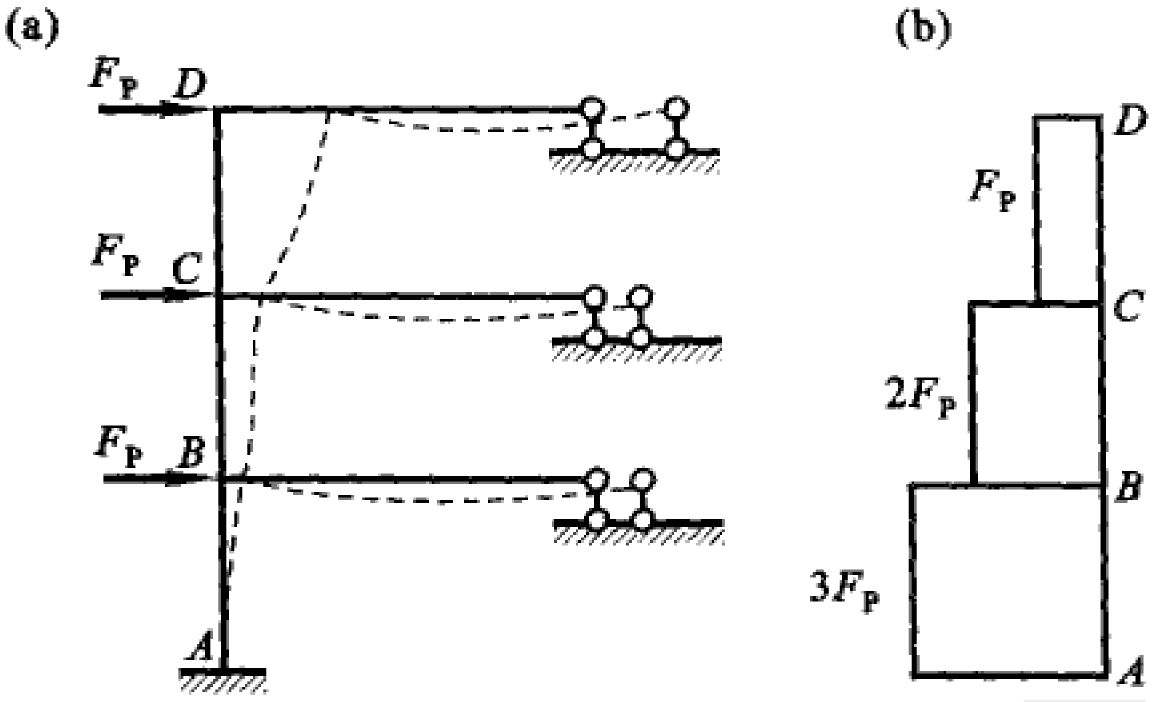


图 8-14

无剪力分配法的应用条件是:刚架中除杆端无相对线位移的杆件外,其余杆件都是剪力静定杆件。

在图8-15所示有侧移的刚架中,竖柱 AB 和 CD 既不是杆端无相对线位移的杆件,也不是剪力静定杆件。这种刚架不能直接用无剪力分配法求解。

在力矩分配法中,我们讨论过杆端无相对线位移的杆件,也讨论过剪力静定杆件的某些简单情况(例如图8-12c中的杆 AE 和 AF)。这里,将着重对剪力静定杆件的各种情况作更详细的讨论。

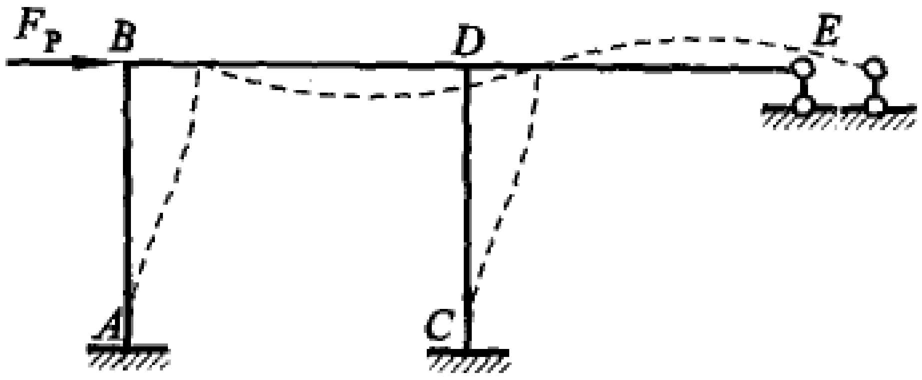


图 8-15

2. 剪力静定杆件的固端弯矩

采用无剪力分配法计算图 8-16a 所示半边刚架时，计算过程仍分两步：第一步是锁住结点（只阻止结点的角位移，但不阻止线位移），求各杆的固端弯矩（图 8-16b）。第二步是放松结点（结点产生角位移，同时也产生线位移），求各杆的分配弯矩和传递弯矩（图 8-16c）。将两步所得的结果叠加，即得出原刚架的杆端弯矩。

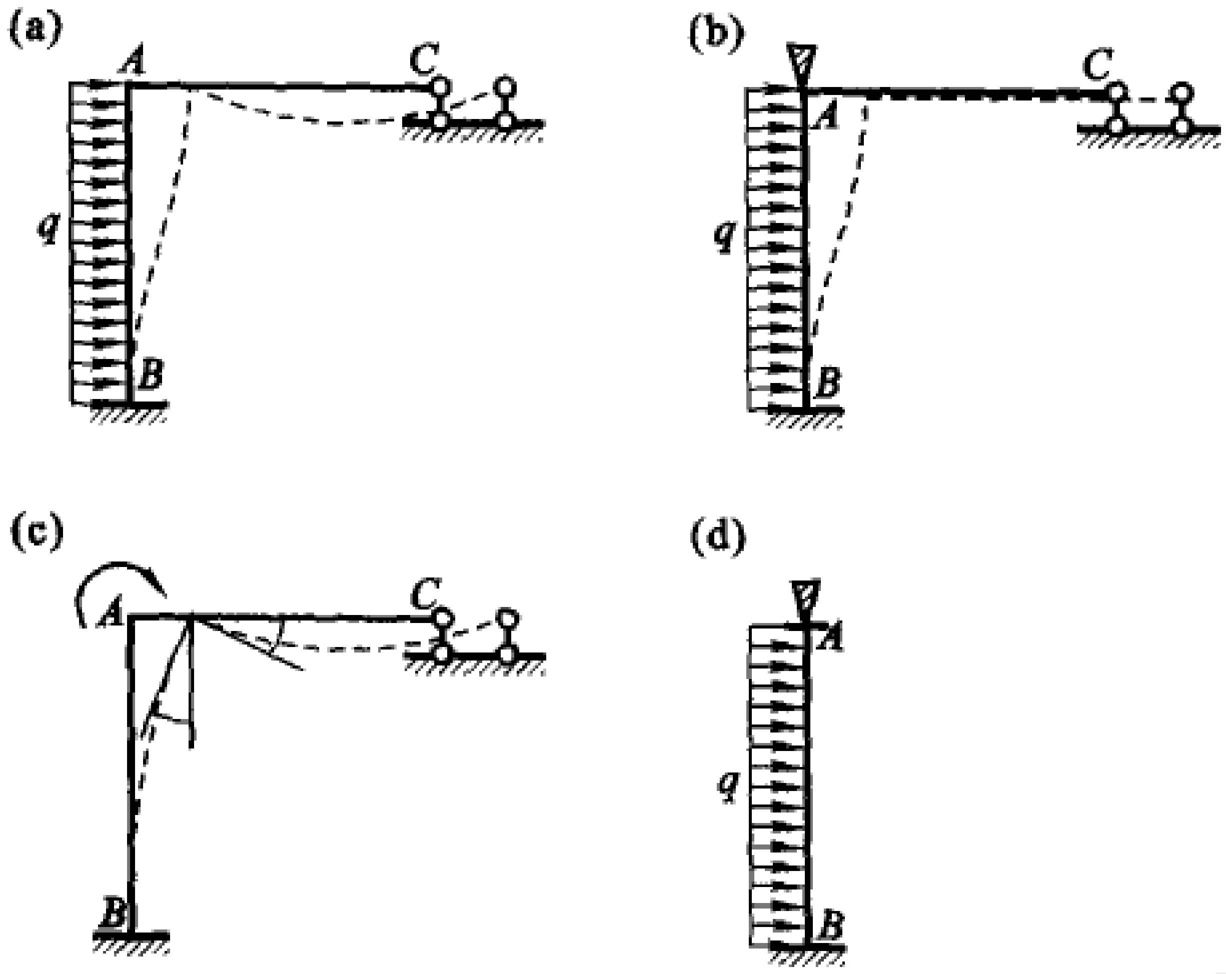


图 8-16

现在求图 8-16b 中杆 AB 的固端弯矩。此杆的变形特点是：两端没有转角，但有相对侧移。受力特点是：整根杆件的剪力是静定的，例如顶点 A 处的剪力已知为零。因此，图 8-16b 中杆 AB 的受力状态与图 8-16d 所示下端固定、上端滑动的杆 AB 相同。它的固端弯矩可根据表 7-1 查出。

图 8-17a 所示为两层半边刚架处于锁住状态。其中杆 ABC 的受力状态可用图 8-17b 表示。根据平衡条件可知，A 点下边截面的剪力为 F_{P1}，B 点下边截面的剪力为 $F_{P1}+F_{P2}$。因此，杆 AB 和 BC 的固端弯矩可分别由图8-17c和 d 所示情况求出。

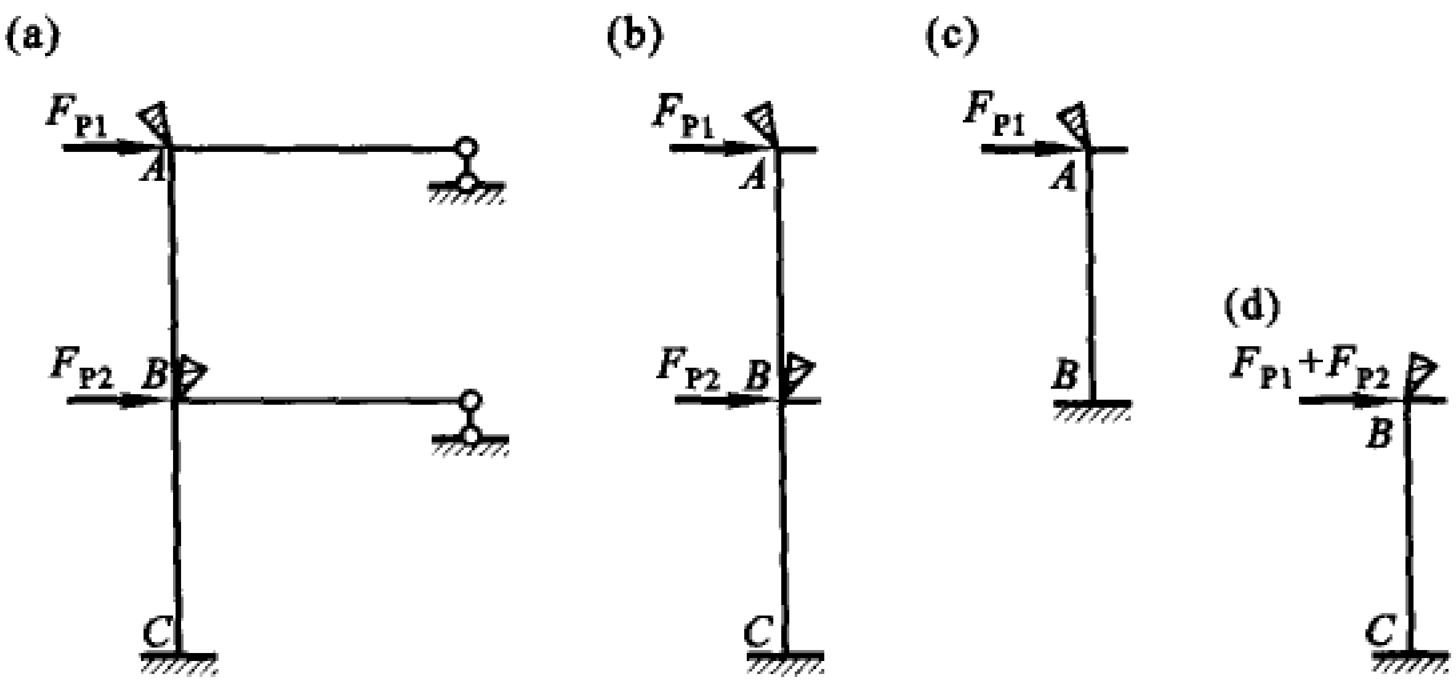


图　8-17

总之，对于刚架中任何形式的剪力静定杆件，求固端弯矩的步骤是：先根据静力条件求出杆端剪力，然后将杆端剪力看作杆端荷载，按该端滑动，另端固定的杆件进行计算。

3．零剪力杆件的转动刚度和传递系数

现在讨论图8-16c所示刚架在放松结点A时所引起的附加内力。放松结点A的约束，相当于在结点A加一个与图8-16b中约束力偶相反的力偶荷载（图8-18a）。

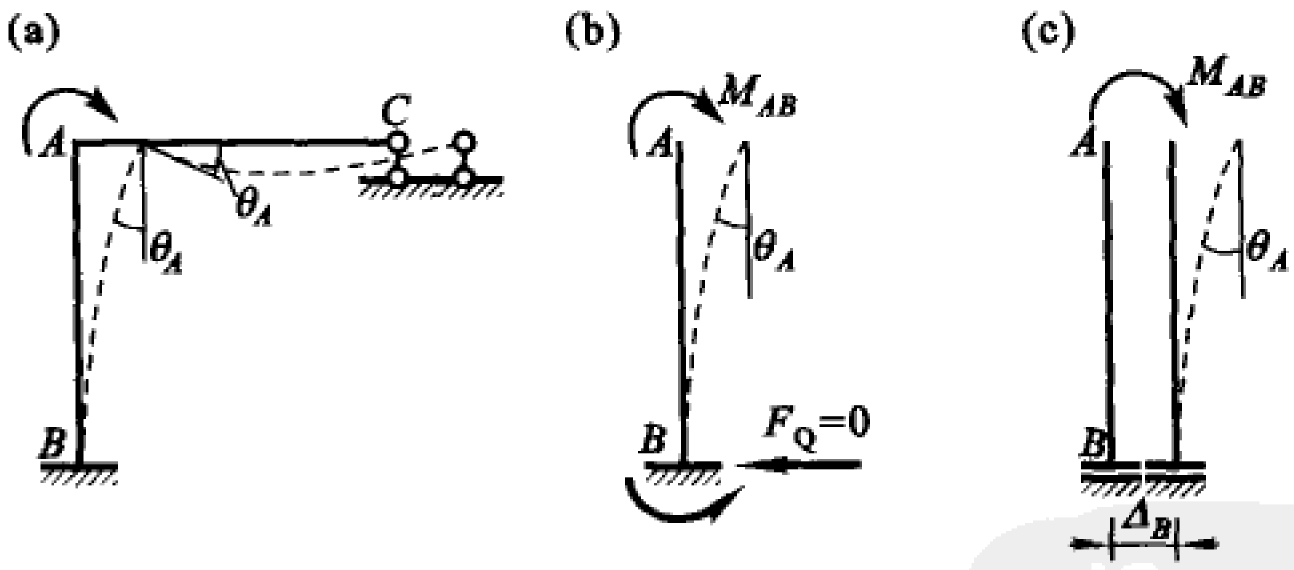


图　8-18

在图8-18a中，杆AB的变形特点是：结点A既有转角，同时也有侧移。受力特点是：各截面剪力都为零，因而各截面的弯矩为一常数。这种杆件称为零剪力杆件。因此，图8-18a所示杆AB受力状态与图8-18b所示悬臂杆相同。当A端转动θ_A时，杆端力偶为

$$M_{AB}=i_{AB}\theta_A,\quad M_{BA}=-M_{AB}$$

由此可知，零剪力杆件的转动刚度为

$$S_{AB}=i_{AB} \tag{8-11}$$

传递系数为

$$C_{AB}=-1 \tag{8-12}$$

应当指出，在图 8-18b 中，固定端 B 的水平反力为零。因此，不妨把固定端 B 换成滑动支座，如图 8-18c 所示。二者相比，内力状态、杆轴的弯曲形状和端点转角都彼此相同，只是水平位移可能相差一个常数 Δ_B。因此，二者的转动刚度和传递系数也是彼此相同的。（注意，图 8-18c 中 B 点的水平位移 Δ_B 是一个待定值，应考虑额外的位移条件才能确定。）

下面再考虑图 8-17 所示刚架在放松结点 B 时的情形。为此，考虑图 8-19a所示在结点 B 施加力偶荷载的情形。

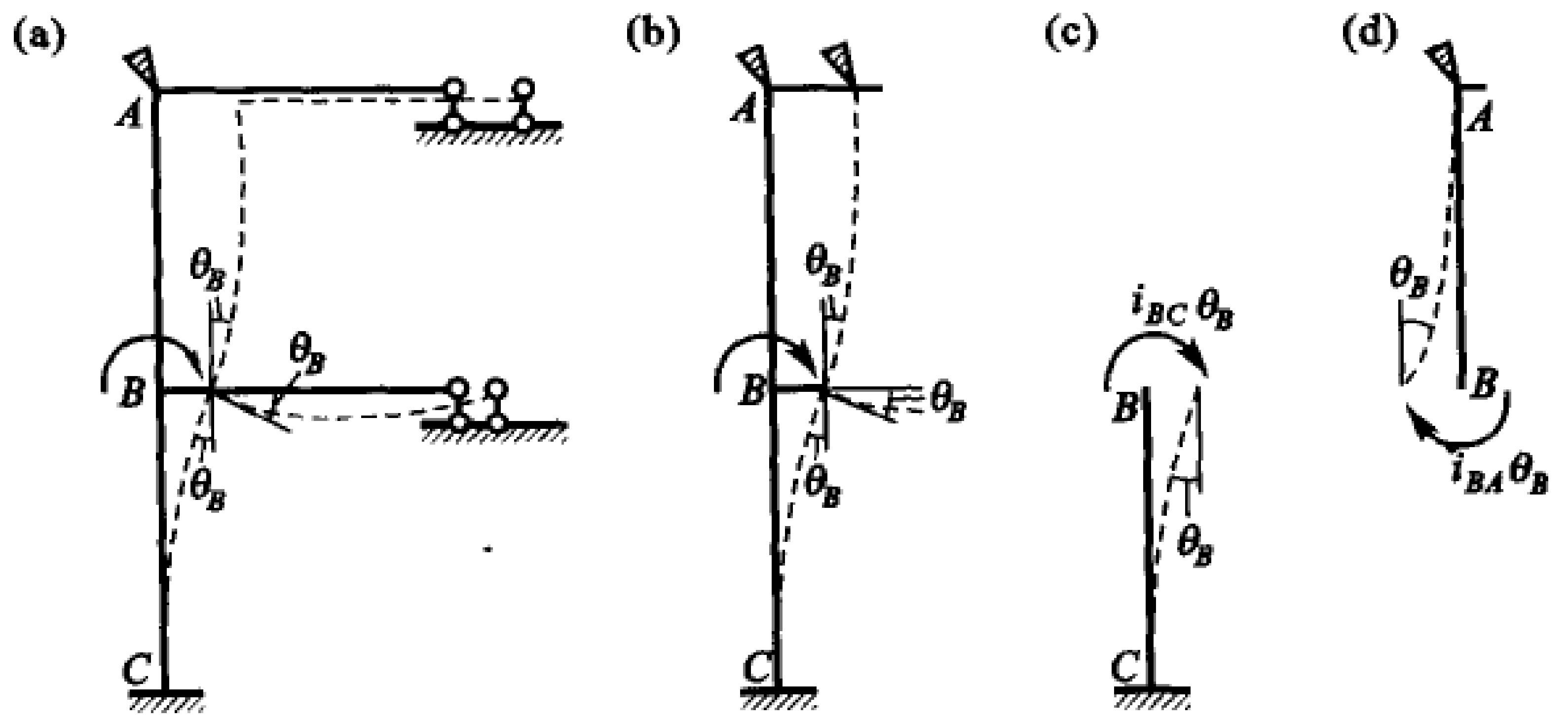


图 8-19

现只讨论图 8-19a 中杆 ABC 变形状态，它可用图 8-19b 来表示。由于杆 ABC 为零剪力杆件，因此其中 BC 段的受力情况如图 8-19c 所示，即，

$$S_{BC}=i_{BC}, \qquad C_{BC}=-1$$

同时，杆 ABC 中的 AB 段的受力状态如图 8-19d 所示，即，

$$S_{BA}=i_{BA}, \qquad C_{BA}=-1$$

至于图 8-19d 中的水平位移可根据图 8-19c 和 d 中 B 点水平位移彼此相等的条件来确定。

总之，在结点力偶作用下，刚架中的剪力静定杆件都是零剪力杆件。因此，当放松结点时（结点既转动、又侧移），这些杆件都是在零剪力的条件下得到分配弯矩和传递弯矩，故称为无剪力分配。它们的转动刚度和传递系数都按式(8-11)和式(8-12)确定。

例 8-7 试作图 8-20 所示刚架的弯矩图。

解 刚架中的杆 BC 为杆端无相对线位移杆件，杆 AB 为剪力静定杆件，可采用无剪力分配法计算。

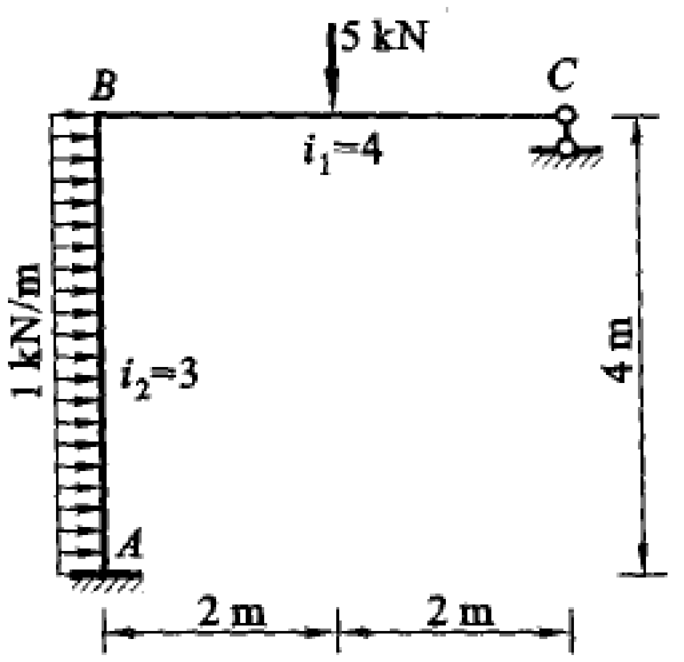


图 8-20

固端弯矩：

$$M^F_{BC}=-\frac{3}{16}\times5\ \text{kN}\times4\ \text{m}=-3.75\ \text{kN·m}$$

$$M^F_{BA}=-\frac{ql^2}{6}=-\frac{1\ \text{kN/m}\times(4\ \text{m})^2}{6}=-2.67\ \text{kN·m}$$

$$M^F_{AB}=-\frac{ql^2}{3}=-5.33\ \text{kN·m}$$

转动刚度和分配系数：

$$\begin{cases}S_{BC}=3i_1=12,\\S_{BA}=i_2=3,\end{cases}\qquad\begin{cases}\mu_{BC}=\dfrac{4}{5}\\\mu_{BA}=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

杆 BA 的传递系数为 -1。

无剪力分配的计算过程如图 8-21a 所示，M 图如图 8-21b 所示。

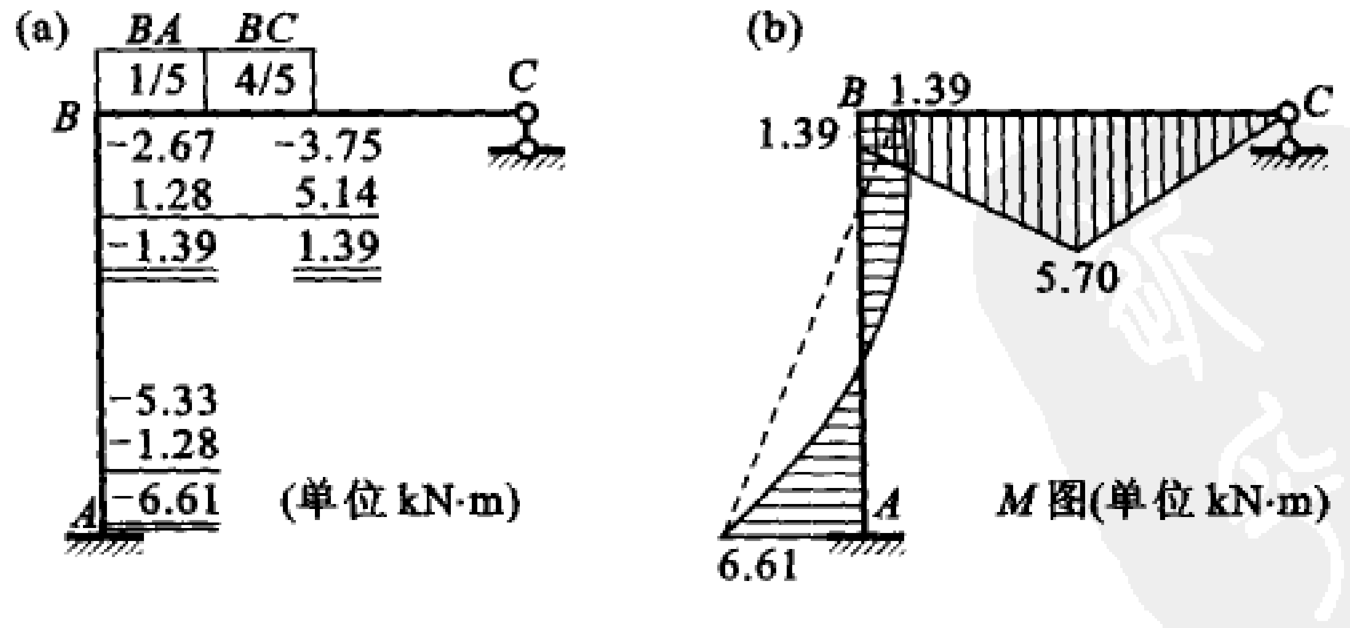


图 8-21

例 8-8 试作图 8-22a 所示刚架在水平力作用下的弯矩图。

解 由于刚架为对称结构，将荷载分成对称和反对称两部分。对称荷载对弯

矩无影响，不予考虑。在图 8－22b 所示反对称荷载作用下，可取图 8－22c 所示半边刚架计算。其中横梁长度减少一半，故线刚度 $i=\frac{I}{l}$ 增大 1 倍。

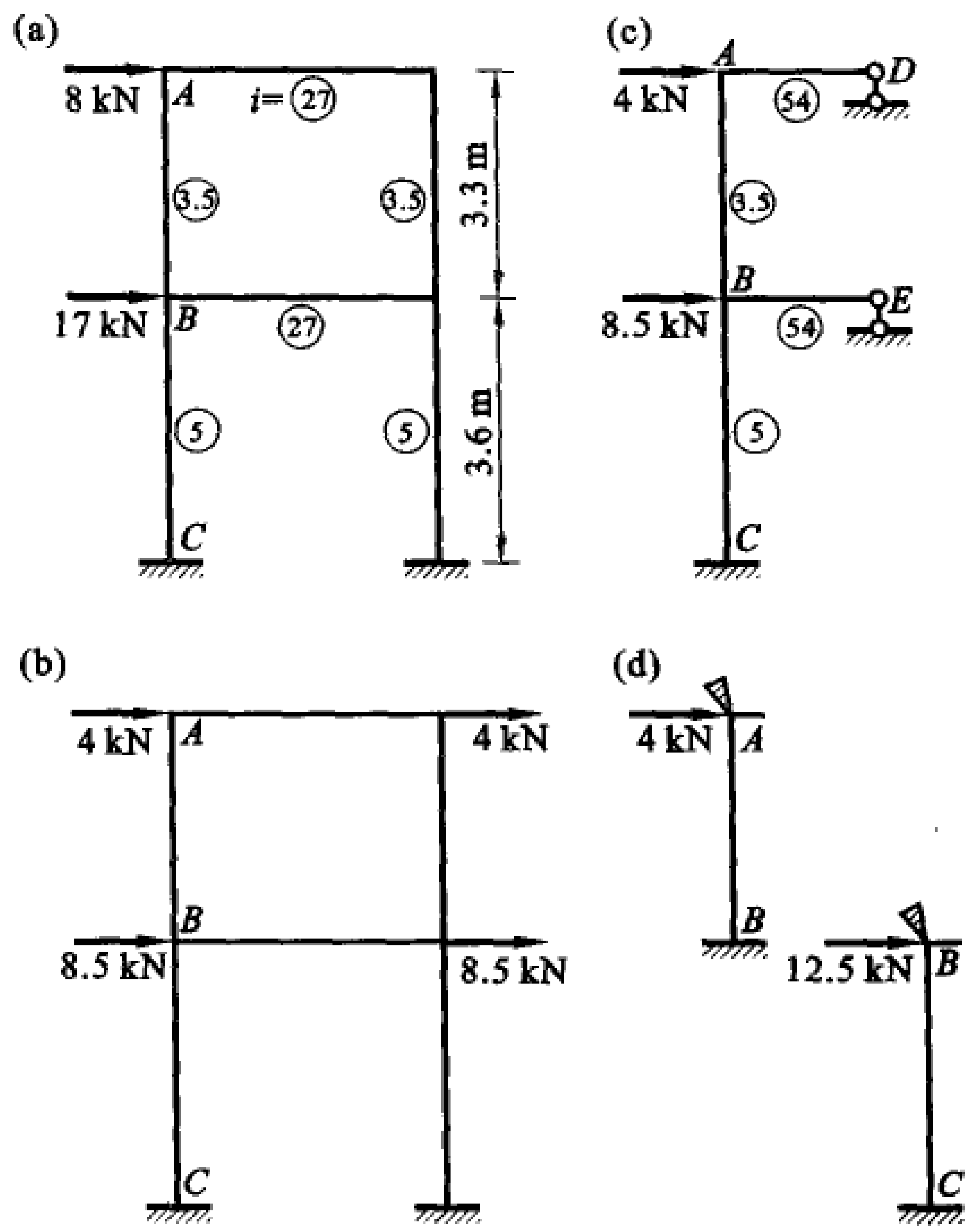


图　8－22

(1) 固端弯矩

立柱 AB 和 BC 为剪力静定杆，由平衡方程求得剪力为

$$F_{QAB}=4\ \text{kN},\quad F_{QBC}=12.5\ \text{kN}$$

将杆端剪力看作杆端荷载，按图 8－22d 所示杆件可求得固端弯矩如下(见表 7－1)：

$$M_{AB}^{F}=M_{BA}^{F}=-\frac{1}{2}\times4\ \text{kN}\times3.3\ \text{m}=-6.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^{F}=M_{CB}^{F}=-\frac{1}{2}\times12.5\ \text{kN}\times3.6\ \text{m}=-22.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 分配系数

以结点 B 为例，

$$S_{BA}=i_{BA}=3.5$$

$$S_{BC}=i_{BC}=5$$

$$S_{BE}=3i_{BE}=3\times 54=162$$
$$\sum S=170.5$$

故结点 B 的分配系数为

$$\mu_{BA}=\frac{3.5}{170.5}=0.020\,6$$
$$\mu_{BC}=\frac{5}{170.5}=0.029\,3$$
$$\mu_{BE}=\frac{162}{170.5}=0.950\,1$$

同理,可求出结点 A 的分配系数,写在图 8-23 的方格内。

(3) 力矩分配和传递

计算过程如图 8-23 所示。结点分配次序为 B、A、B、A。注意,立柱的传递系数为 -1。最后作 M 图,如图 8-24 所示。

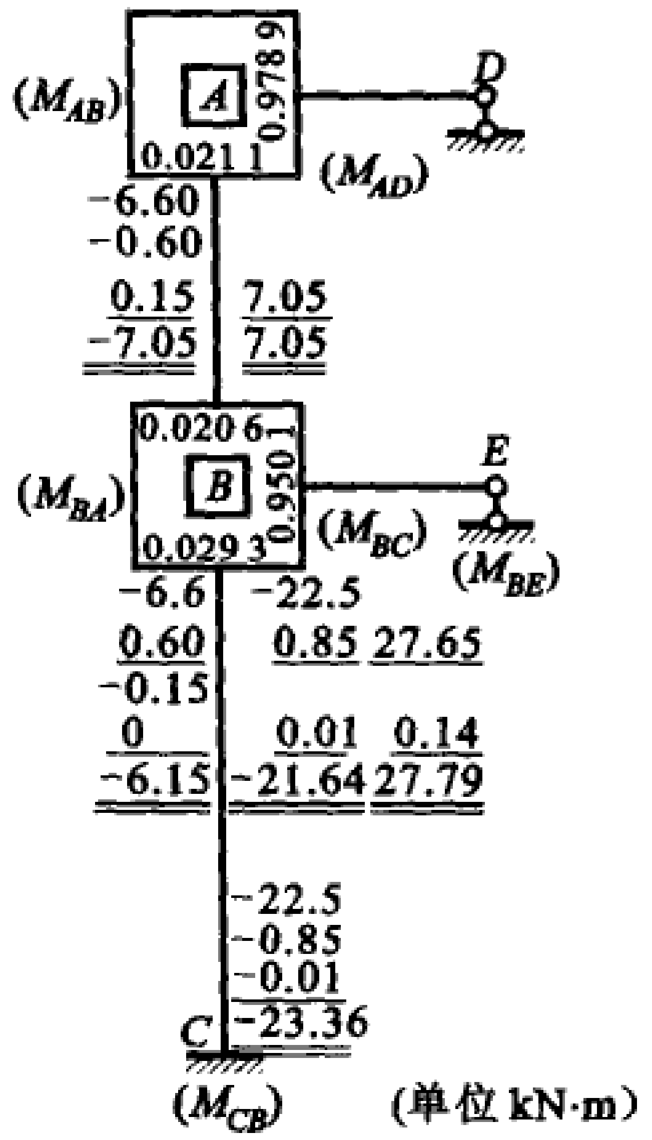


图 8-23

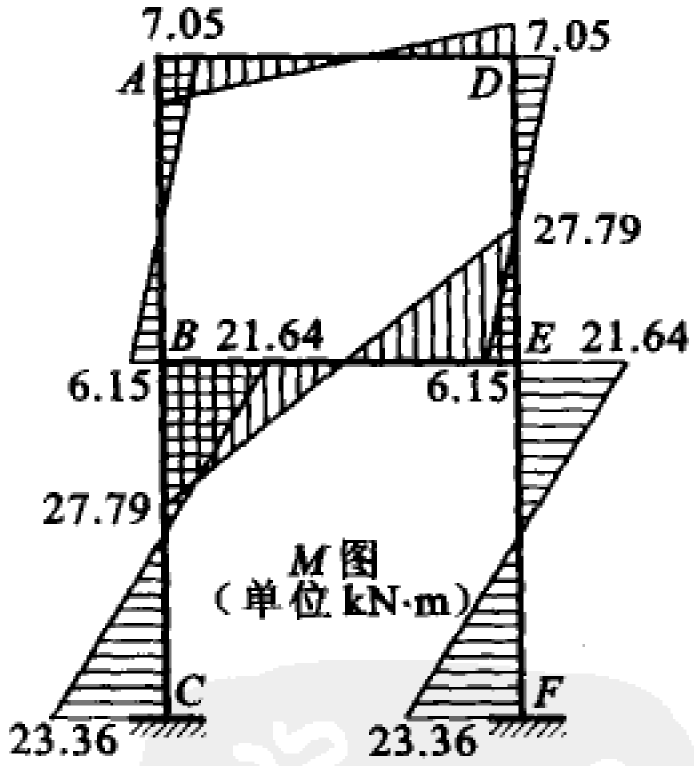


图 8-24

以上讨论了无剪力分配法及其在单跨对称刚架计算中的应用,对于其进一步的推广应用可参见龙驭球、包世华编,《结构力学教程》,高等教育出版社,1988年;龙驭球、包世华主编,《结构力学》,上册,第二版,高等教育出版社,1994年。

§8－5　力矩分配法与位移法的联合应用

对于一般有结点线位移的刚架，上述的力矩分配法和无剪力分配法均不适用。为此，可联合应用力矩分配法与位移法求解，用力矩分配法考虑角位移的影响，用位移法考虑线位移的影响。现在以图 8－25a 所示刚架为例说明计算的原理。

首先，用位移法求解，但所取的基本体系只控制结点线位移，而不控制角位移，基本体系的两个分解状态示于图 8－25c、d。基本结构如图 8－25b 所示。换句话说，这里只取结点线位移 Δ_1 作基本未知量，至于结点角位移则不算作基本未知量。此时，相应的位移法方程为

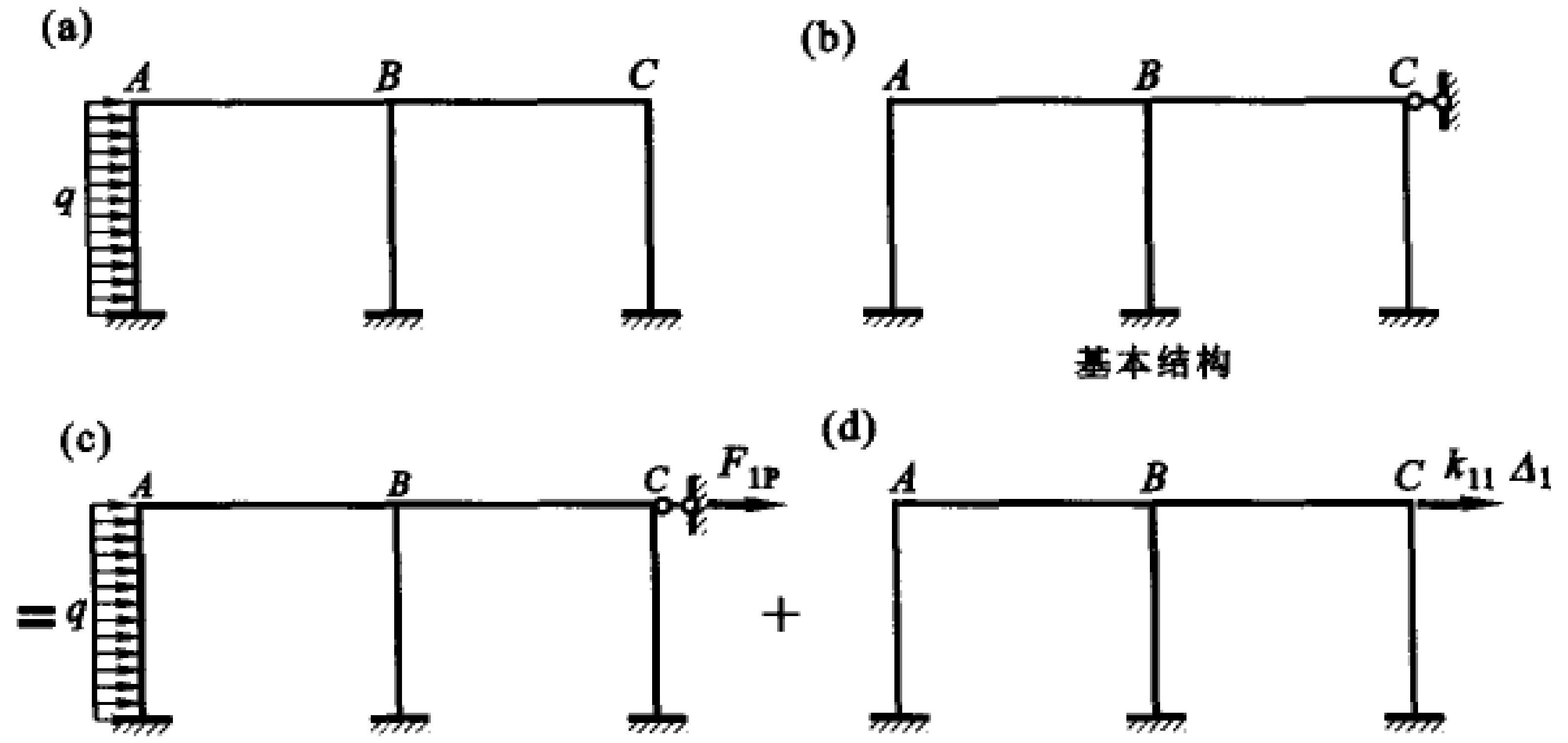


图　8－25

$$k_{11}\Delta_1 + F_{1P} = 0 \qquad \text{(a)}$$

而弯矩可表示为

$$M = \overline{M}_1\Delta_1 + M_P \qquad \text{(b)}$$

式中 F_{1P}、M_P 是基本结构在荷载作用下的附加反力和弯矩，k_{11}、$\overline{M}_1$ 是基本结构由于单位位移 $\Delta_1 = 1$ 而产生的附加反力和弯矩。

其次，用力矩分配法计算基本结构，求出 k_{11}、F_{1P}、$\overline{M}_1$、M_P。由于在基本结构中，结点线位移是给定的，只有结点角位移是未知量，因此用力矩分配法求解是很方便的。

按式(a)求出结点线位移 $\Delta_1 = -\dfrac{F_{1P}}{k_{11}}$，然后按式(b)可求得弯矩图。

例 8－9　试求图 8－26 所示刚架的内力。

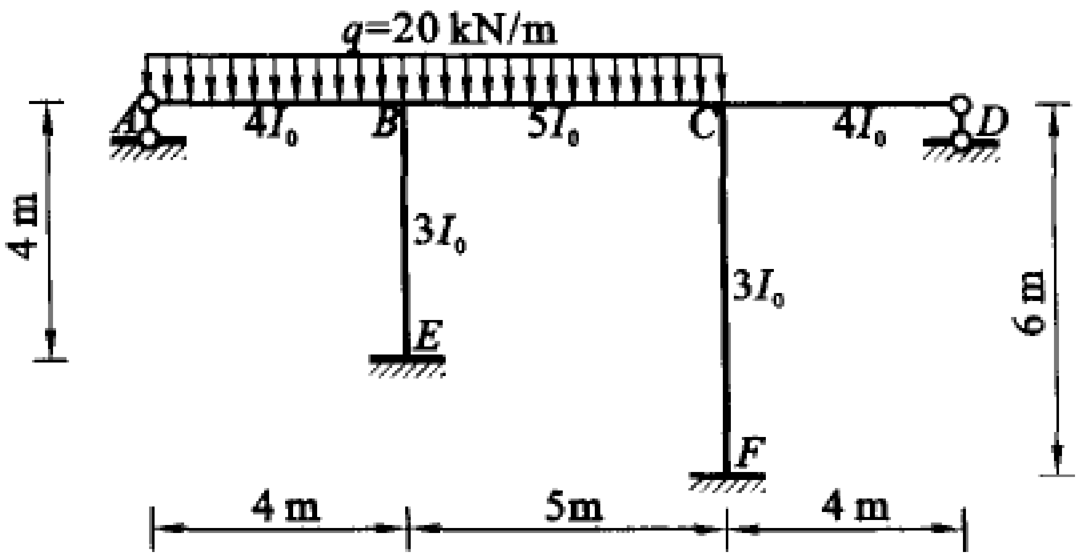
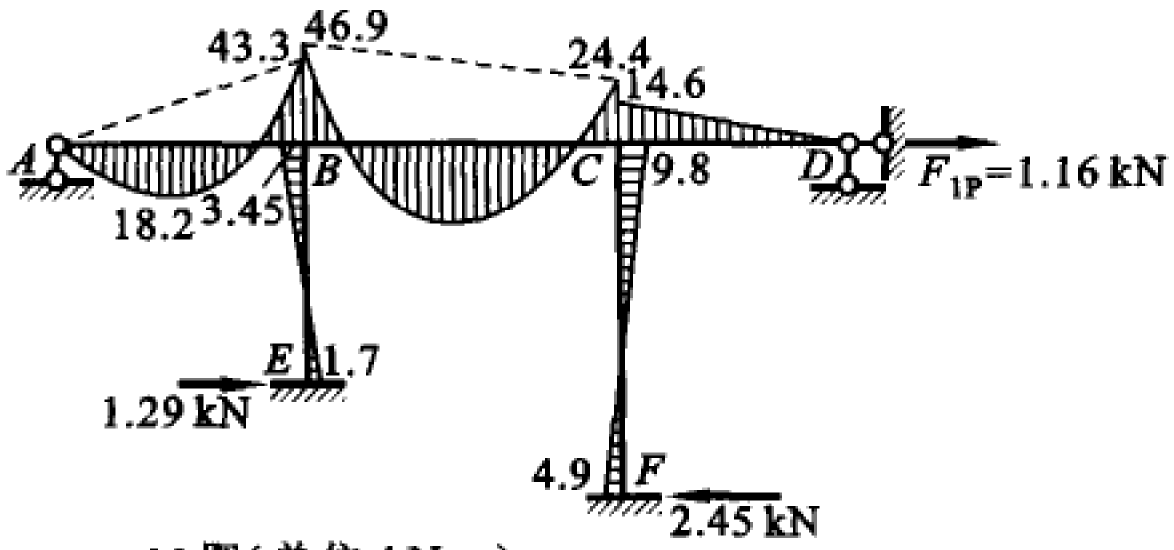


图 8-26

解 (1) 在 D 处加水平链杆，然后作荷载作用下的弯矩图 M_P

这时，由于没有结点线位移，可用力矩分配法计算，得出的弯矩图如图8-27所示(参见例 8-3)。



M_P图(单位 kN·m)

图 8-27

由杆端弯矩可求出柱底剪力:

$$F_{QEB} = -\frac{3.45\ \text{kN·m} + 1.7\ \text{kN·m}}{4\ \text{m}} = -1.29\ \text{kN}$$

$$F_{QFC} = \frac{9.8\ \text{kN·m} + 4.9\ \text{kN·m}}{6\ \text{m}} = 2.45\ \text{kN}$$

再由整个刚架的平衡条件 $\sum F_x = 0$，求得

$$F_{1P} = (2.45 - 1.29)\ \text{kN} = 1.16\ \text{kN}\ (\rightarrow)$$

(2) 作支座 D 向右产生单位位移时刚架的弯矩图 $\overline{M}_1$

这时结点线位移已知为 $\Delta_1 = 1$①，可用力矩分配法计算，设 $EI_0 = 1$，得到的弯矩图如图 8-28 所示。

---

① 这里，$\Delta_1 = 1$，并非真值；相应的 $\overline{M}_1$、F_Q、k_{11} 及 Δ_1 也均非真值，故在运算中均不注单位。

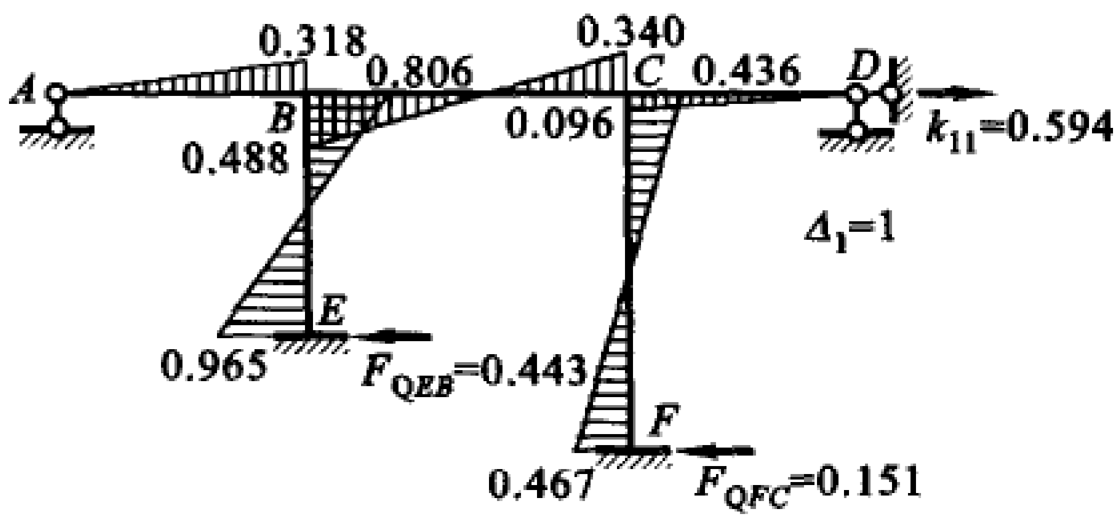


图　8-28

由杆端弯矩求出的柱底剪力为：

$$F_{QEB}=\frac{0.965+0.806}{4}=0.443$$

$$F_{QFC}=\frac{0.467+0.436}{6}=0.151$$

再由整体平衡条件求出 k_{11}：

$$k_{11}=0.443+0.151=0.594\ (\rightarrow)$$

(3) 求结点水平位移 Δ_1

由位移法方程求得

$$\Delta_1=-\frac{F_{1P}}{k_{11}}=-\frac{1.16}{0.594}=-1.95$$

(4) 作弯矩图

将图 8-28 中 $\overline{M}_1$ 图的标距乘以 $\Delta_1=-1.95$，再与图 8-27 中 M_P 图的标距叠加，即得出最后弯矩图 M，如图 8-29 所示。

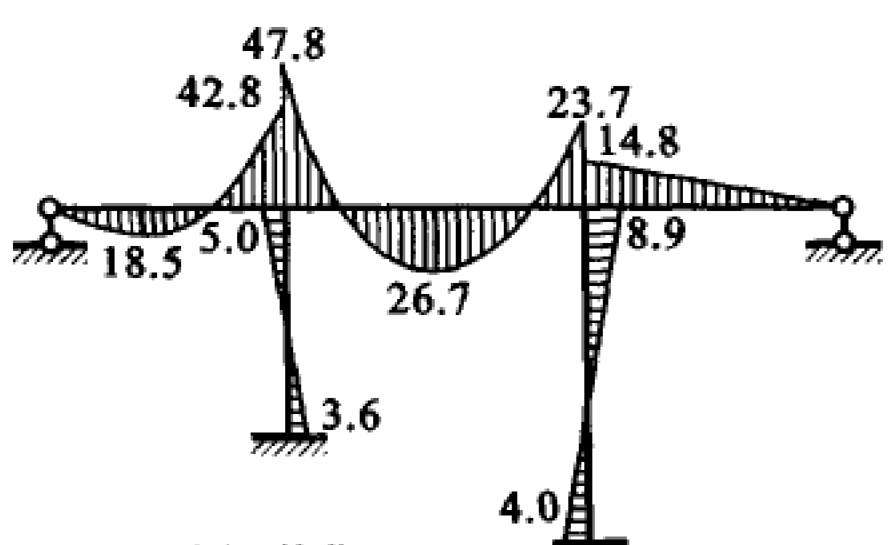


图　8-29

当结点线位移多于一个时，也可用类似的方法进行计算。现在以具有两个线位移未知量 Δ_1、Δ_2 的刚架为例，写出其计算步骤如下：

（1）在原结构上设置两个附加支杆，以控制线位移 Δ_1、Δ_2，并以这个无线位移的体系作为基本结构。

（2）用力矩分配法求出基本结构在荷载作用下的 M_P、F_{1P}、F_{2P}。

（3）在基本结构中令 $\Delta_1=1$，用力矩分配法求出 $\overline{M}_1$、k_{11}、k_{21}。

（4）在基本结构中令 $\Delta_2=1$，用力矩分配法求出 $\overline{M}_2$、k_{12}、k_{22}。

（5）位移法方程为

$$k_{11}\Delta_1+k_{12}\Delta_2+F_{1P}=0$$

$$k_{21}\Delta_1+k_{22}\Delta_2+F_{2P}=0$$

由此解出 Δ_1 和 Δ_2。

（6）用叠加公式 $M=\overline{M}_1\Delta_1+\overline{M}_2\Delta_2+M_P$ 作弯矩图。

§8-6 近 似 法

以前讨论的都是精确法。如果在计算中忽略一些次要影响，则可得到各种近似法。近似法以较小的工作量，取得较为粗略的解答，可用于结构的初步设计，也可用于对计算结果的合理性进行判断。下面举出近似法的一些例子。

1. 忽略剪力和轴力引起的变形

计算梁和刚架的位移时，经常略去剪力和轴力产生的变形，而只考虑弯矩产生的变形，计算拱的位移时，也常略去剪切变形。

超静定梁和超静定刚架的内力计算，由于只考虑弯矩引起的变形而大为简化。通常在位移法、力矩分配法中都采用这个简化假定。如不采用这个假定，计算方法将极为复杂。

计算中忽略轴力或剪力所引起的变形，实质上就是在计算简图中假设杆件的抗拉刚度或抗剪刚度为无限大。

在高层建筑结构中(例如结构的高宽比大于4时)，轴力引起的变形将不容忽视；在截面尺寸大而杆长很小的粗杆中，剪力引起的变形也不容忽视。

2. 在竖向荷载作用下忽略刚架的侧移

对于有结点线位移的刚架，虽然竖向荷载也可以引起侧移，但侧移数值一般比较小。多层多跨刚架在竖向荷载作用下的分层计算法就是忽略侧移影响的一种近似法，它采用了两个近似假设：

第一，忽略侧移的影响，用力矩分配法计算。

第二，忽略每层梁的竖向荷载对其他各层的影响，把多层刚架分解成一层一层地单独计算。

例如，图 8-30a 所示为一个四层刚架，可按层分为图 8-30b 所示的四个分层刚架分别计算。除底层外，每个柱同属于相邻两层刚架，因此柱的弯矩应由两部分叠加得出。

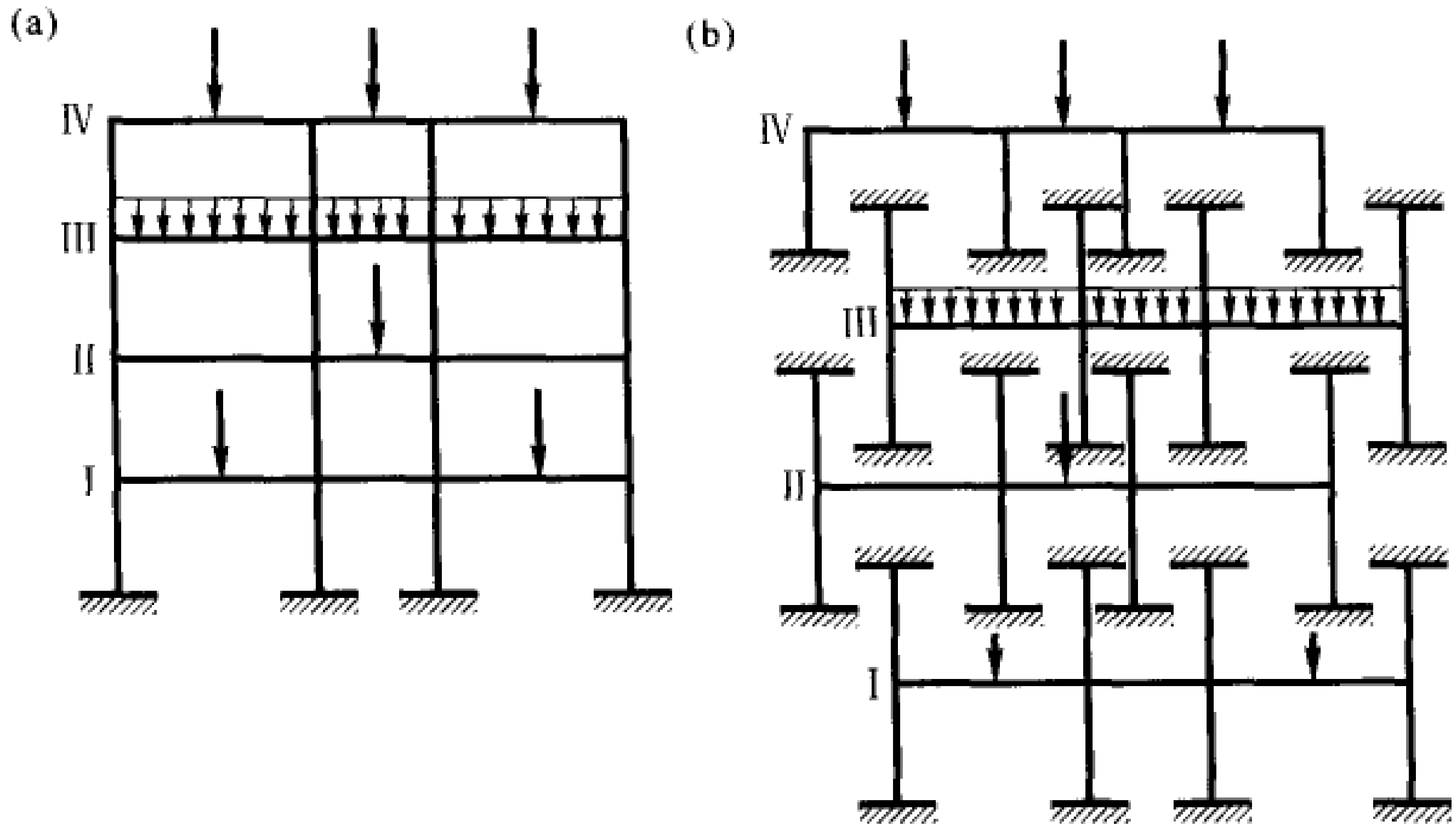


图 8-30

为了说明第二个假设，现来分析某层的竖向荷载对其他各层的影响问题。首先，荷载在本层结点产生不平衡力矩，经过分配和传递，才影响到本层柱的远端。然后，在柱的远端再经过分配，才影响到相邻的楼层，这里，经历了“分配—传递—分配”三道运算，余下的影响已经较小，因而可以忽略。

在各个分层刚架中，柱的远端都假设为固定端。除底层柱底外，其余各柱实际上应看作弹性固定端。为了反映这个特点，可将上层各柱的线刚度乘以折减系数 0.9，传递系数由$\frac{1}{2}$改为$\frac{1}{3}$。

分层计算的结果，在刚结点上弯矩是不平衡的，但一般误差不会很大。如有需要，可对结点的不平衡弯矩，再进行一次分配。

3. 在水平荷载作用下忽略刚架的结点转角

对于有结点线位移的刚架，如果梁的线刚度比柱的线刚度大得多，则在水平荷载作用下，结点侧移是主要位移，而结点转角是次要位移。在这种情况下，忽略结点转角，将使计算大为简化。多层多跨刚架在水平结点荷载作用下的反弯点法就是忽略刚架结点转角的一种近似法。

反弯点法的基本假设是把刚架中的横梁简化为刚性梁。

图 8-31a 所示横梁为刚性梁的理想刚架，刚架变形的特点是结点有侧移而无转角，弯矩图的特点是立柱中点的弯矩为零(图 8-31b)。图中左柱线刚度为 i_1，高度为 h_1；右柱线刚度为 i_2，高度为 h_2。由于两柱侧移 Δ 相等，因此两柱的

剪力应为(图 8-31c)：

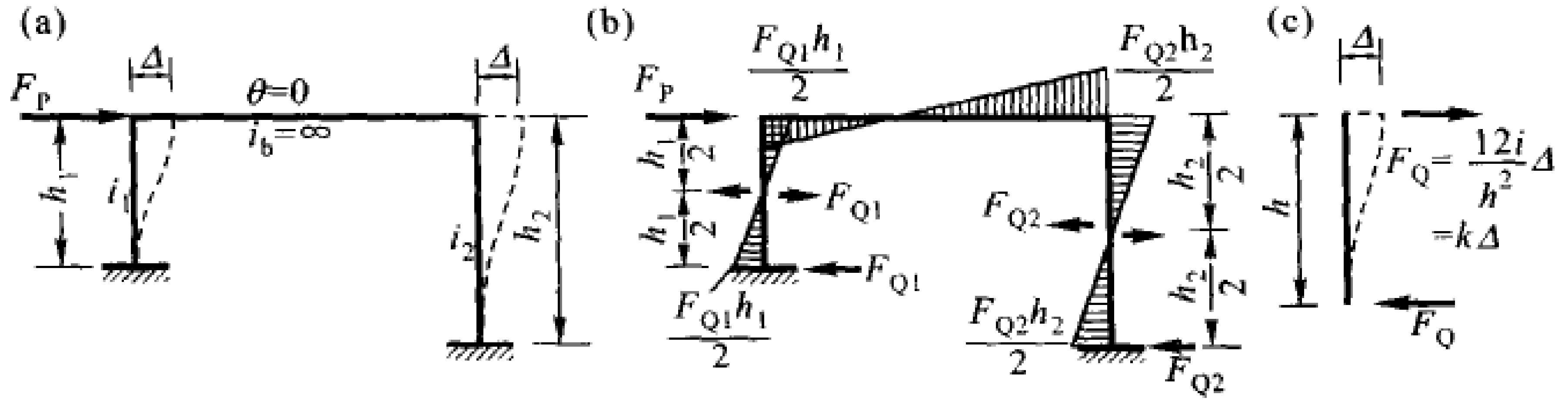


图 8-31

$$\left.\begin{aligned}F_{Q1}&=\frac{12i_1}{h_1^2}\Delta=k_1\Delta\\F_{Q2}&=\frac{12i_2}{h_2^2}\Delta=k_2\Delta\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

这里，$k=12\frac{i}{h^2}$是柱的侧移刚度系数，即柱顶有单位侧移时所引起的剪力。

由平衡条件，两柱剪力的和应等于 F_P，即

$$F_{Q1}+F_{Q2}=F_P\qquad\text{(b)}$$

由式(a)和式(b)可求出：

$$\left.\begin{aligned}F_{Q1}&=\frac{k_1}{\sum_{i=1}^{2}k_i}F_P\\F_{Q2}&=\frac{k_2}{\sum_{i=1}^{2}k_i}F_P\end{aligned}\right\}\qquad\text{(c)}$$

由此看出，各柱的剪力与该柱的侧移刚度系数 k_j 成正比，$\frac{k_j}{\sum k_i}$称为剪力分配系数。因此，荷载 F_P 按剪力分配系数分配给各柱。

求出各柱的剪力后，再利用反弯点在各柱中点这个特性，可知各柱两端弯矩为 $M=F_Q\cdot\frac{h}{2}$，由此可画出立柱的弯矩图。根据结点的力矩平衡条件，可求出梁端弯矩，画出横梁的弯矩图，如图 8-31b 所示。

综上所述，反弯点法的要点可归纳如下：

(1) 刚架在结点水平荷载作用下，当梁柱线刚度比值较大(例如$\frac{i_b}{i_c}\geqslant3$)时，可采用反弯点法计算。

(2) 反弯点法假设横梁相对线刚度为无限大，因而刚架结点不发生转角，只有侧移。

(3) 刚架同层各柱有同样侧移时，同层各柱剪力与柱的侧移刚度系数成正比。每层柱共同承受该层以上的水平荷载作用。各层的总剪力按各柱侧移刚度所占的比例分配到各柱。所以，反弯点法又可称为剪力分配法。

(4) 柱的弯矩是由侧移引起的，所以柱的反弯点在柱中点处。在多层刚架中，底层柱的反弯点常设在柱的$\frac{2}{3}$高度处。

(5) 柱端弯矩根据柱的剪力和反弯点位置确定。梁端弯矩由结点力矩平衡条件确定，中间结点的两侧梁端弯矩，按梁的转动刚度分配不平衡力矩求得。

例 8-10 用反弯点法计算图 8-32 所示刚架，并画出弯矩图。圆圈内数字为杆件线刚度的相对值。

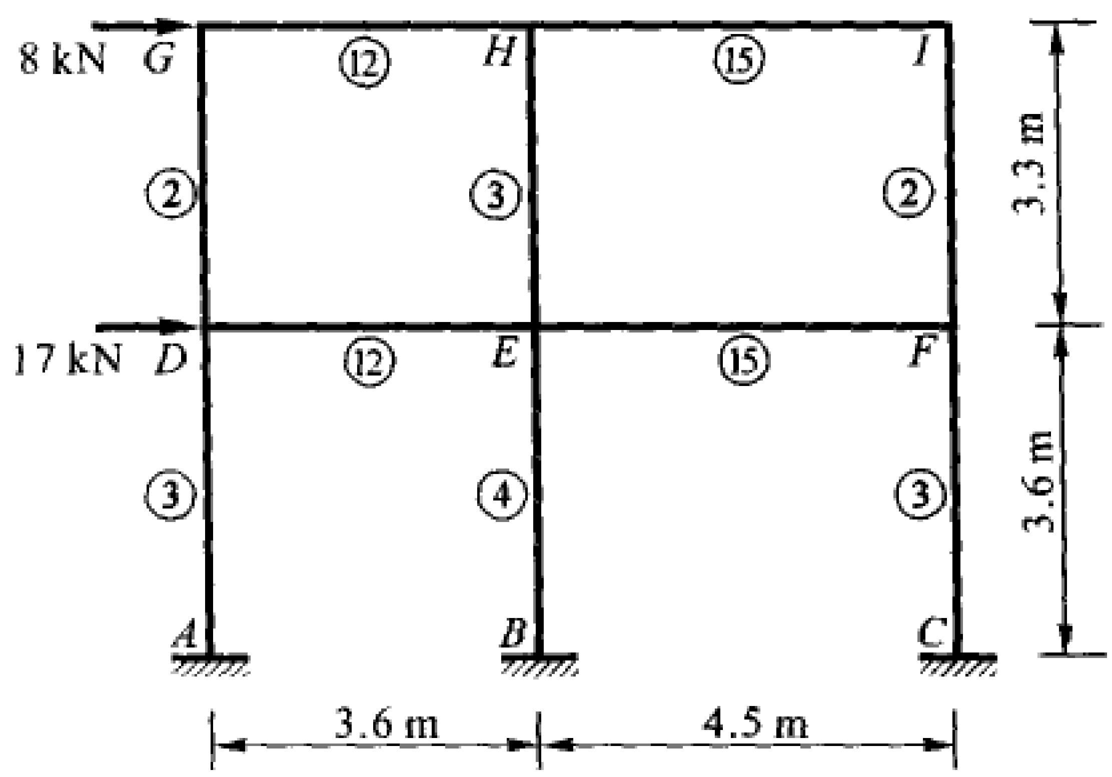


图 8-32

解 设柱的反弯点在高度中点。在反弯点处将柱切开，隔离体如图 8-33 所示。

(1) 求各柱剪力分配系数 $\mu_k = \frac{k_k}{\sum k_i}$

顶层：
$$\mu_{GD} = \mu_{IF} = \frac{2}{2\times2+3} = 0.286$$

$$\mu_{EH} = \frac{3}{2\times2+3} = 0.428$$

底层：
$$\mu_{AD} = \mu_{FC} = \frac{3}{3\times2+4} = 0.3$$

$$\mu_{EB} = \frac{4}{3\times2+4} = 0.4$$

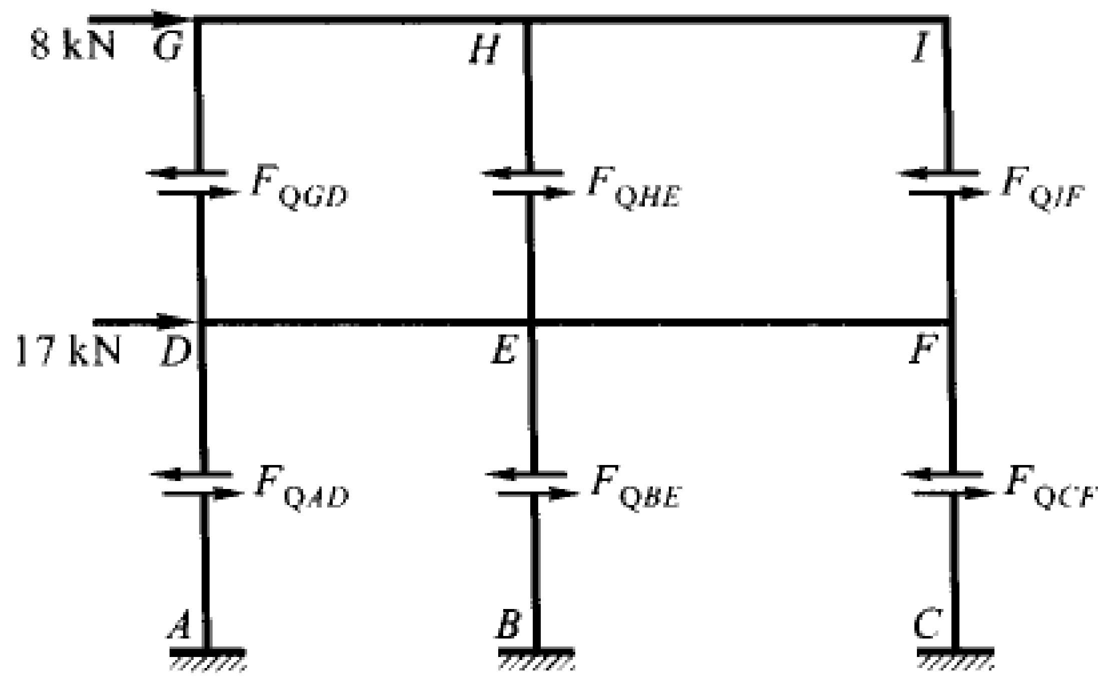


图 8-33

（2）计算各柱剪力

$$F_{QGD}=F_{QIF}=0.286\times 8\ \text{kN}=2.29\ \text{kN}$$

$$F_{QHE}=0.428\times 8\ \text{kN}=3.42\ \text{kN}$$

$$F_{QAD}=F_{QCF}=0.3\times 25\ \text{kN}=7.5\ \text{kN}$$

$$F_{QBE}=0.4\times 25\ \text{kN}=10\ \text{kN}$$

（3）计算杆端弯矩

以结点 E 为例说明杆端弯矩的计算。

柱端弯矩

$$M_{EH}=-F_{QHE}\times\frac{h_2}{2}=-3.42\ \text{kN}\times\frac{3.3\ \text{m}}{2}=-5.64\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EB}=-F_{QBE}\times\frac{h_1}{2}=-10\ \text{kN}\times\frac{3.6\ \text{m}}{2}=-18\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

计算梁端弯矩时，先求出结点柱端弯矩之和为

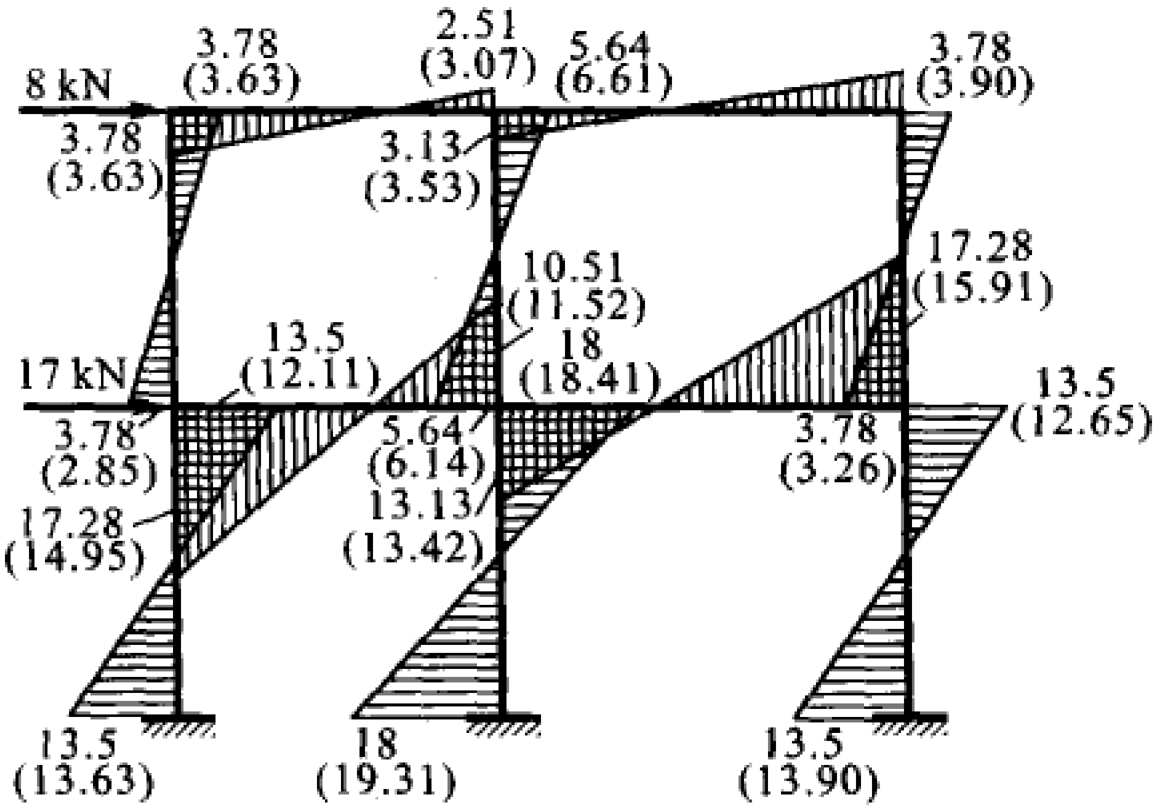
$$M=M_{EH}+M_{EB}=-23.64\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

按梁刚度分配：

$$M_{ED}=\frac{12}{27}\times 23.64\ \text{kN}\cdot\text{m}=10.51\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EF}=\frac{15}{27}\times 23.64\ \text{kN}\cdot\text{m}=13.13\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

图 8-34 是刚架弯矩图。括号内数值是精确法计算的杆端弯矩。



M 图(单位 kN·m)

图 8-34

§8-7 超静定结构各类解法的比较和合理选用

超静定结构问题的解法可以从不同角度加以分类和比较。下面列出四种:

从选取基本未知量的方案来看,可分为力法和位移法两类。

从基本方程的表述形式来看,可分为传统形式(直接用平衡方程和几何协调方程表述的形式)和能量形式(见本书卷Ⅱ)两类。

从线性方程组的解法来看,可分为直接解法和渐近解法两类。

从所采用的计算手段来看,可分为手算方法和计算机方法两类。

本节只就后两种分类和比较,作些补充讨论。此外,还对各种解法的合理选用问题加以简述。

1. 基本方程直接解法和渐近解法的比较

第6、7两章介绍的力法和位移法,都是首先建立基本方程,通常是一组线性代数方程,然后采用直接法求解这组线性代数方程。这种作法属于直接解法。

另一类解法是渐近解法。渐近解法又可分为两种:第一种作法仍是首先建立基本方程,但解方程组时却采用迭代解法,这是一种后半截的渐近法。第二种作法是不去建立线性代数方程组,而是根据力学概念,使结构的受力变形状态以渐近方式逼近真实的受力变形状态,这是一种全过程的渐近法。本章介绍的力矩分配法和无剪力分配法属于后一种渐近解法。

渐近过程既可按照位移法的思路进行,也可按照力法的思路进行。力矩分

配法和无剪力分配法是以位移法为基础的渐近法，实质上都是以独立的结点位移作为基本未知量，不过改用杆端力矩进行运算。在渐近过程中的每一步，结构的几何协调条件自始至终都得到满足，而结构的平衡条件则是以渐近方式在最后一步才在允许误差范围内得到满足。这种渐近过程是根据位移法思路进行的。此外，以力法为基础的渐近法在理论上是成立的，但在实际实施时，由于收敛速度一般较慢，没有得到广泛的应用。

2. 手算方法和计算机方法的比较

结构力学学科是在手算条件下逐步形成的，经典结构力学讲的都是手算方法。计算结构力学是20世纪中叶才逐步形成的，计算结构力学是借助计算机采用数值方法解决结构力学问题的一个分支学科。

经典结构力学的基本概念、原理和方法是学科的基础内容。这些基础内容通常是靠手算来理解和掌握的。因此，手算方法仍然是不可缺少的学习内容。但是，手算只能解算小型问题，要解算大型问题必须采用计算机和计算机方法。因此，计算机方法在结构力学中的地位日益显得重要。此外，在结构力学的学习过程中，计算机软件也有其独特作用。本书中引入结构力学求解器这个新工具，也是基于这个考虑。

手算方法和计算机方法有各自的着眼点：手算怕繁，机算怕乱。在手算方法中，总是希望计算工作量尽量少一点，而基本未知量的多少则是影响计算工作量的主要因素。凡是多余约束多而结点位移少的结构，位移法优于力法，势能法优于余能法（能量法见本书卷Ⅱ）；反之，则力法优于位移法，余能法优于势能法。在机算方法中，侧重点是着眼于计算过程的程序化并采用矩阵的形式。矩阵位移法有使计算过程易于实现程序化的优点，因而得到广泛的应用；反之，矩阵力法则应用较少。

3. 超静定结构中计算方法的合理选用

关于计算方法的合理选用问题，从手算和机算的角度看，观点并不相同。

从机算角度来看，一般都选用矩阵位移法，用一个通用程序就可对各种形式的静定和超静定结构进行计算。机算看重程序化和通用性。

从手算角度来看，省事且能满足精度要求的方法就是好方法，就是合理的方法。手算看重工作量，欣赏机智、灵气和多样性。

下面主要从手算角度，针对不同的结构形式，说明计算方法的合理选用方案。

(1) 超静定桁架

超静定桁架由于结点位移太多，宜于使用力法。但计算桁架次应力时，以力矩分配法为宜。

(2) 超静定拱

两铰拱和无铰拱需用力法计算。计算连续拱时,可取曲杆为单元,使用位移法或力矩分配法。

(3) 连续梁

刚性支座上的连续梁,最宜于采用力矩分配法。弹性支座上的连续梁,宜用力法或位移法。

(4) 刚架

无结点线位移的刚架(图 8－35a),可采用力矩分配法。无结点角位移的刚架(图 8－35b、c),可采用位移法或剪力分配法。超静定次数少而结点位移较多的刚架(图 8－35d)可采用力法。多层刚架可采用无剪力分配法、力矩分配法或近似法。

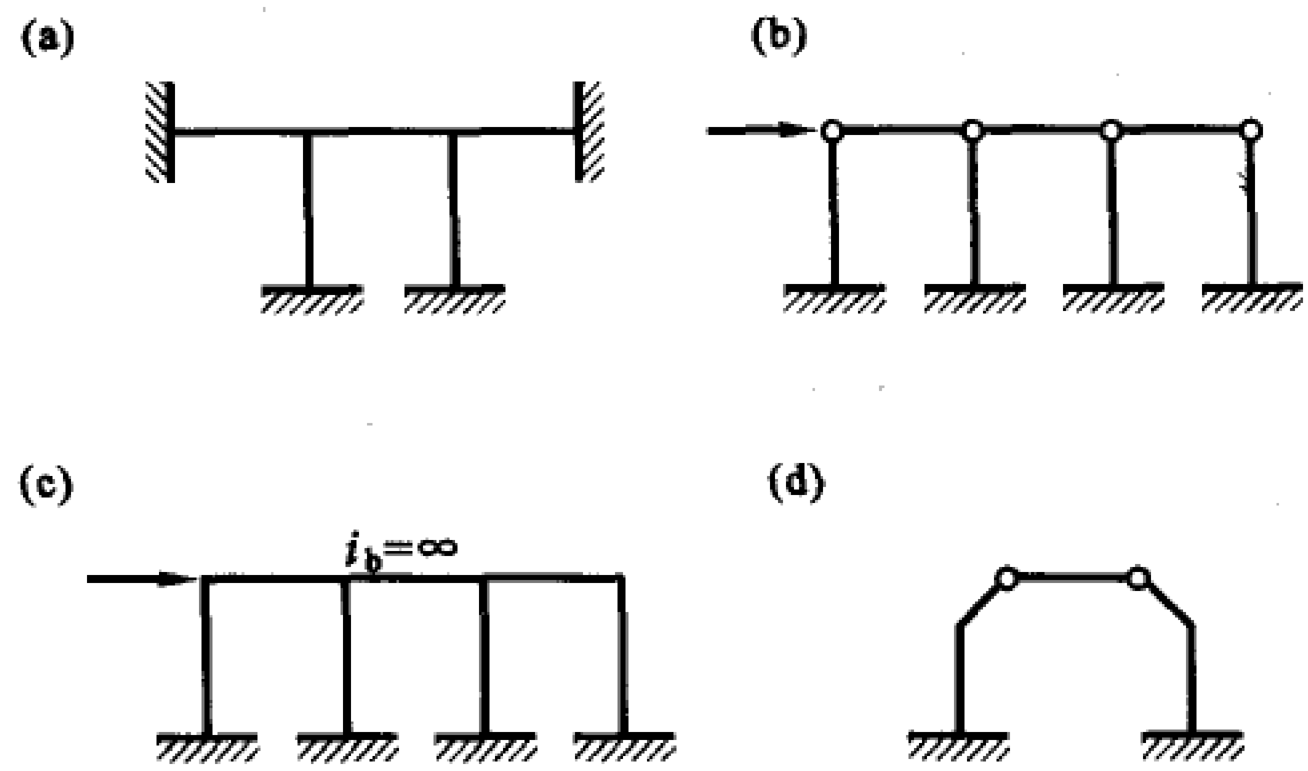


图　8－35

可以考虑几种方法的联合应用。例如,力法与位移法的联合应用,位移法与力矩分配法的联合应用(§8－5),力矩分配法与无剪力分配法的联合应用,力法与力矩分配法的联合应用,等等。

对称结构受任意荷载作用时,可以把荷载分为对称荷载和反对称荷载两部分。这时,在对称荷载和反对称荷载作用下的结构,可以采用各自适宜的方法进行计算。如图 8－36a 和图 8－37a 所示的结构,在对称荷载作用下(图 8－36b 和图 8－37b),可用力矩分配法进行计算;在反对称荷载作用下(图 8－36c 和图 8－37c),可用力法或无剪力分配法进行计算。这是几种方法联合应用的另一种例子。

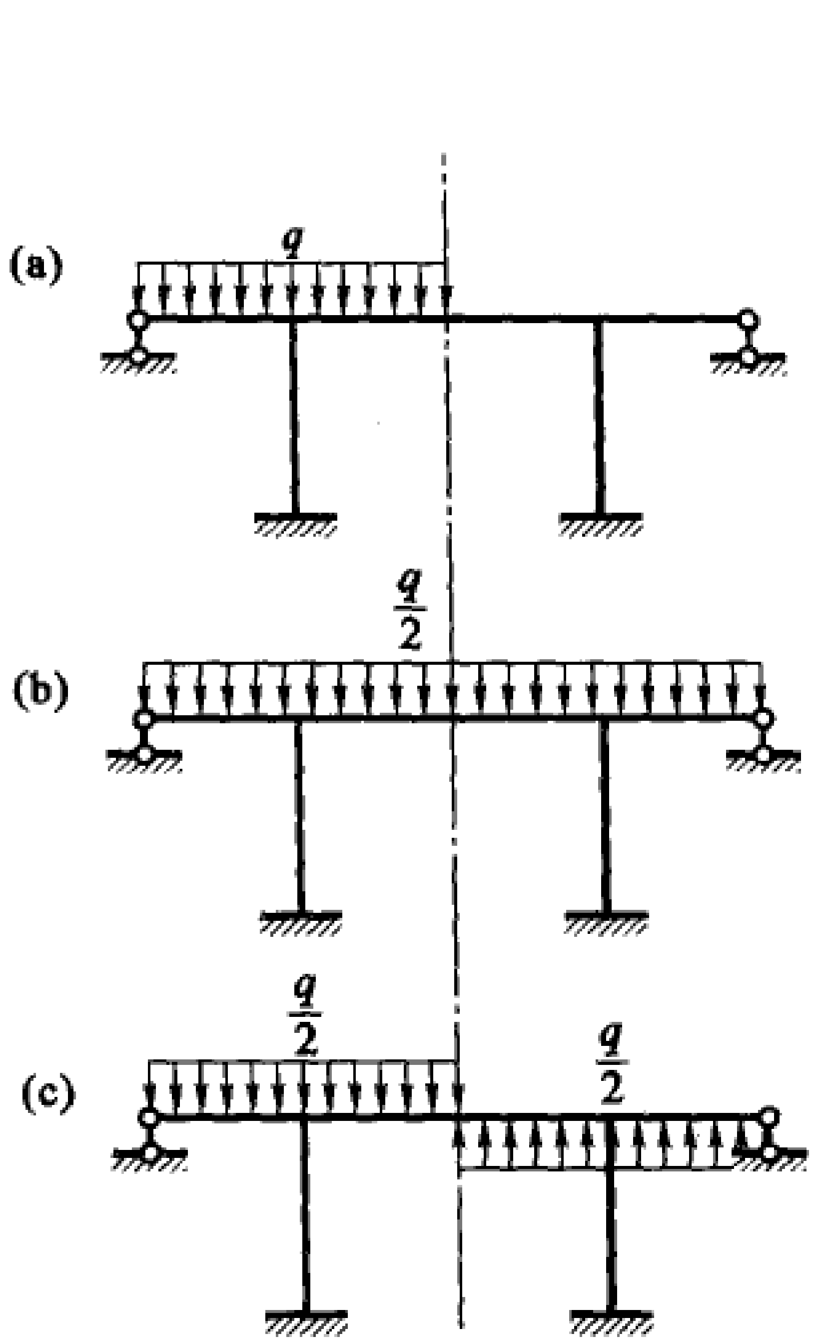


图 8-36

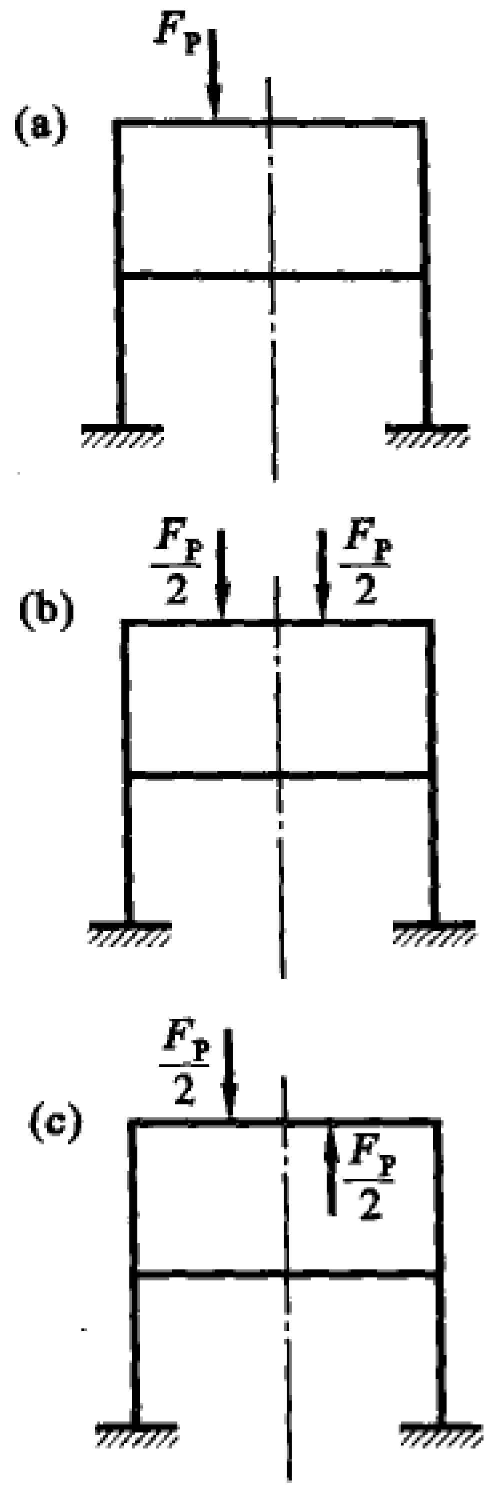


图 8-37

§8-8 超静定力的影响线

超静定力的影响线有两种作法：一种作法是用力法(或位移法、力矩分配法等)直接求出影响系数的方法，见例 6-7；另一种作法是利用超静定力影响线与挠度图间的比拟关系。它们分别与静定力影响线的静力法和机动法相应。

本节介绍后一种方法，因为它可以极方便地绘出影响线的形状，这对判断不利荷载的分布是很有用的。

图 8-38a 所示为一超静定梁。现以 B 点支座反力 Z_1 的影响线为例，说明影响线与挠度图之间的比拟关系。

设荷载 $F_P=1$ 作用于任一位置 x，采用力法求所引起的支座反力 Z_1。

取 Z_1 作基本未知力，基本体系如图 8-38b 所示。显然，这个基本体系仍是超静定的，是 $n-1$ 次超静定结构。基本结构如图 8-38c 所示。力法方程为

$$\delta_{11}Z_1+\delta_{1P}=0$$

由此解得

$$Z_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \qquad \text{(a)}$$

式中 δ_{1P} 和 δ_{11} 都是单位力在基本结构中产生的位移，在图 8－38d、e 中都已标明。

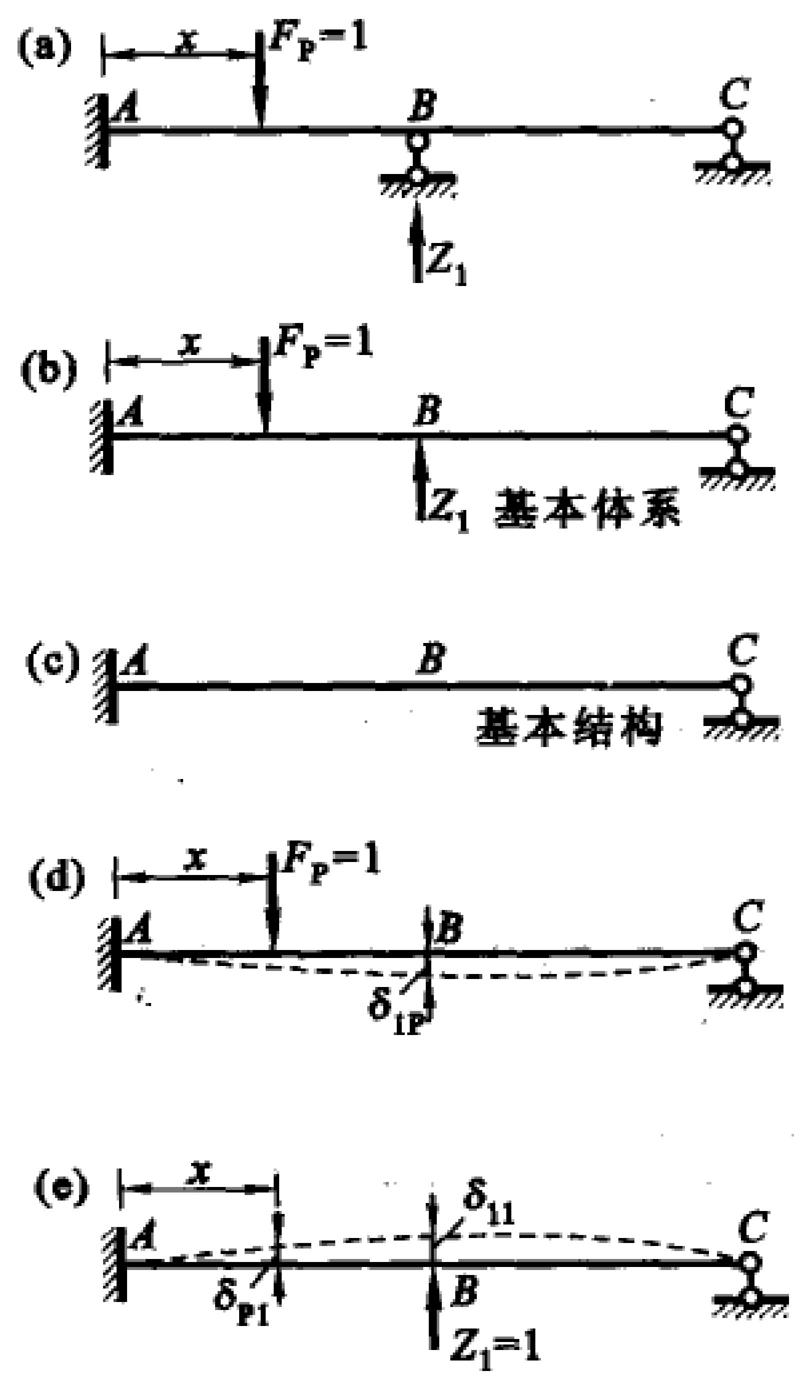


图 8－38

应用位移互等定理

$$\delta_{1P} = \delta_{P1}$$

式(a)可写为

$$Z_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}$$

δ_{P1} 所代表的位移如图 8－38e 所示，它是单位力 $Z_1=1$ 在基本结构中引起的沿荷载 F_P 作用点的竖向位移。

在上式中，支座反力 Z_1 和位移 δ_{P1} 都随荷载 F_P 的移动而变化，它们都是荷载位置参数 x 的函数。δ_{11} 则是一个常数，不随荷载位置 x 变化。因此，上式可以更明确地写成如下的形式：

$$Z_1(x) = -\frac{1}{\delta_{11}}\delta_{P1}(x) \tag{b}$$

式中当 x 变化时，函数 $Z_1(x)$ 的变化图形就是 Z_1 的影响线；而函数 $\delta_{P1}(x)$ 的变化图形就是由 $Z_1=1$ 引起的荷载作用点的挠度图。由此可以看出，影响线与挠度图之间的关系。根据这个关系，可利用挠度图来作超静定力的影响线。其步骤与用机动法作静定结构影响线是类似的，可归纳如下：

(1) 撤去与所求约束力 Z_1 相应的约束。

(2) 使体系沿 Z_1 的正方向发生位移，作出荷载作用点的挠度图，即为影响线的形状。

(3) 将 δ_{P1} 图除以常数 δ_{11}（或在 δ_{P1} 图中令 $\delta_{11}=1$），便确定了影响线的数值。

(4) 横坐标以上图形为正号，横坐标以下图形为负号。

图 8－39 为连续梁的几个影响线图形的形状。其中，图 8－39b 为铰 C 左右

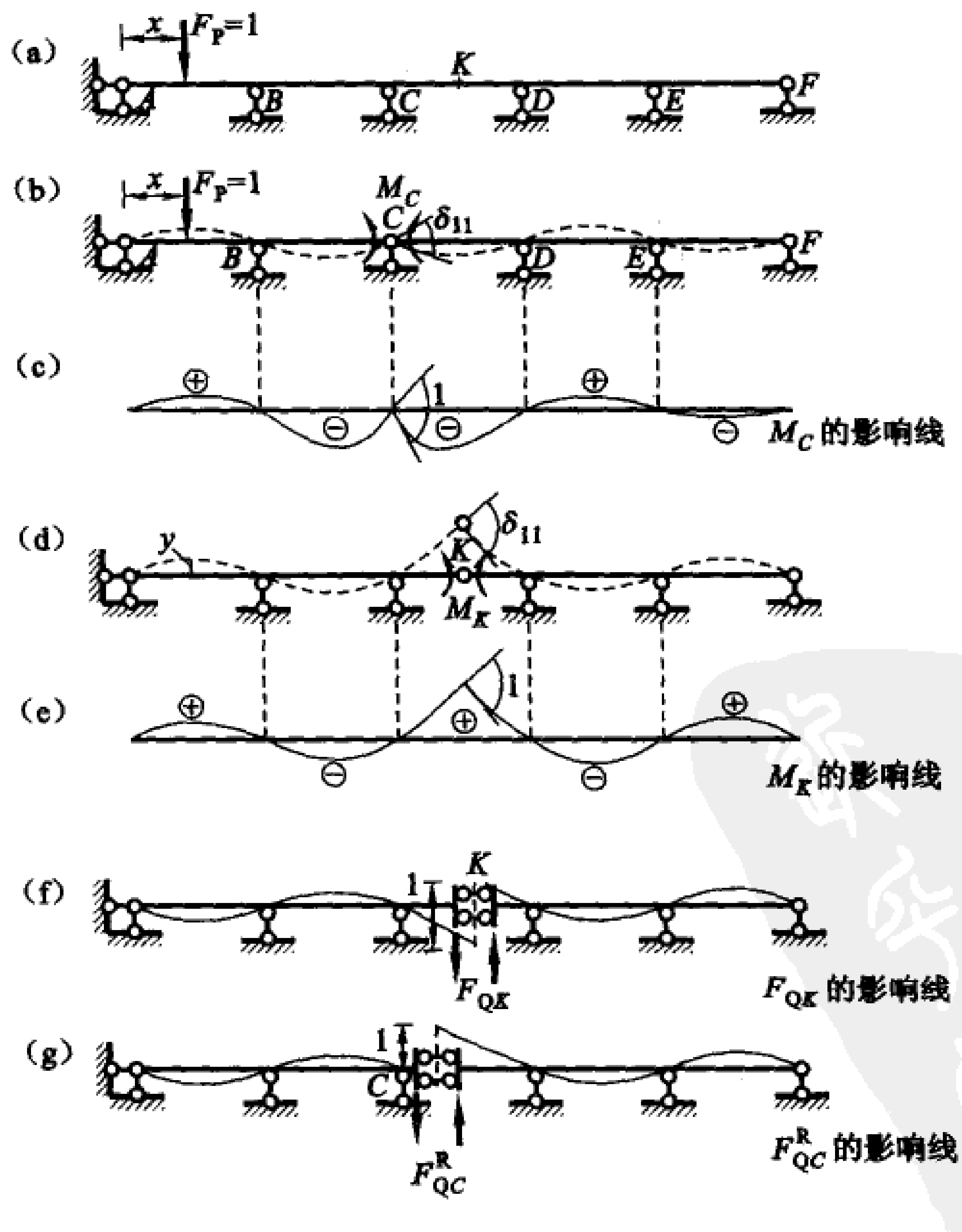


图 8－39

有相对转角时的挠度图，图 8-39c 为 M_C 的影响线；图 8-39d 为铰 K 左右有相对转角时的挠度图，图 8-39e 为 M_K 的影响线；图 8-39f 为 F_{QK} 影响线；图 8-39g 为 F_{QC}^{R} 的影响线。

应当指出：上述作法与机动法作静定内力（支座反力）影响线虽然相似，但它们之间也有区别：对静定内力（支座反力）来讲，位移图是几何可变体系的位移图，因而是折线图形。对超静定内力（支座反力）来讲，位移图是几何不变体系的挠度图，因而是曲线图形。

下面给出单跨梁的挠度和转角公式，以供计算 δ_{P1} 和 δ_{11} 时参考。

图 8-40 所示为一简支梁 AB，两端作用力偶 M_A 和 M_B，则两端转角 θ_A 和 θ_B 为

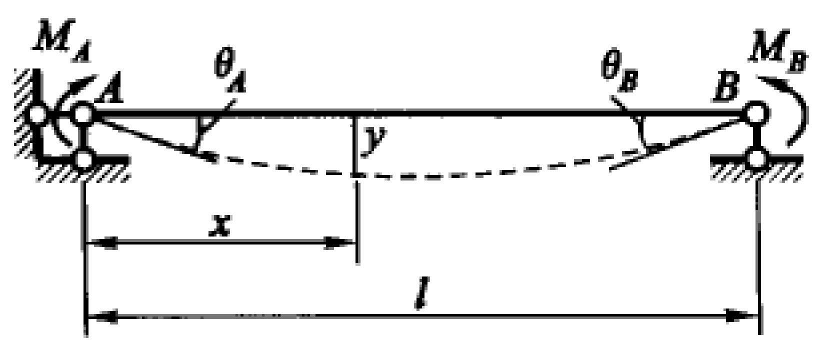


图 8-40

$$\left.\begin{aligned}\theta_A &= \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B)\\ \theta_B &= \frac{l}{6EI}(2M_B + M_A)\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

任一点 x 处的挠度为

$$y(x) = \frac{x(l-x)}{6EIl}[M_A(2l-x) + M_B(l+x)] \tag{d}$$

以上公式读者可用图乘法自行导出。

例 8-11 试求图 8-41a 所示连续梁支座弯矩 M_B 的影响线。

解 在截面 B 加铰，并施加一对力偶 $M_B = 1$ kN·m，这时挠度 δ_{P1} 图如图 8-41b 中的虚线所示。又 δ_{11} 为 B 点两侧截面转角 δ'_{11} 与 δ''_{11} 之和。

为了求 δ_{P1} 和 δ_{11}，可先用力矩分配法求出力偶 $M_B = 1$ kN·m 所引起的弯矩图，如图 8-41c 所示。然后，根据以下每跨的杆端弯矩即可求出各跨的挠度方程，并求出 δ_{11}。

第一跨：两端弯矩分别为 -0.5 kN·m 和 1.0 kN·m，代入式(d)，得

$$y(x_1) = \frac{x_1(6\ \text{m} - x_1)}{6\times 6\ \text{m}\cdot EI}\times[-0.5\ \text{kN}\cdot\text{m}\times(12\ \text{m} - x_1) + 1\ \text{kN}\cdot\text{m}\times(x_1 + 6\ \text{m})]$$

$$= \frac{1.5\ \text{kN}\times(6\ \text{m} - x_1)x_1^2}{36EI}$$

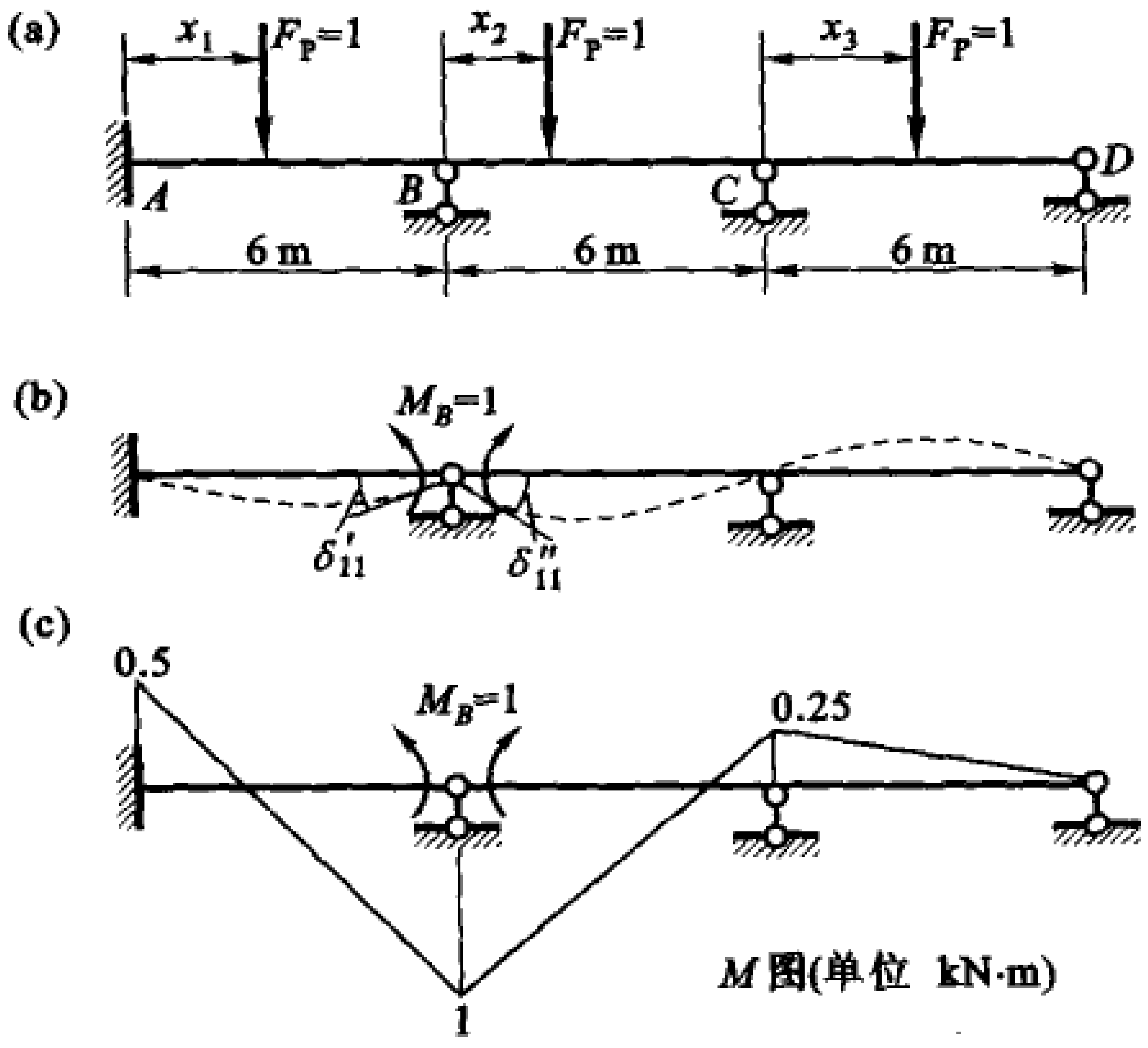


图 8-41

第二跨：两端弯矩分别为 1.0 kN·m 和 -0.25 kN·m，挠度方程为

$$y(x_2)=\frac{x_2(6\ \text{m}-x_2)}{6\times 6\ \text{m}\cdot EI}\times[1\ \text{kN}\cdot\text{m}\times(12\ \text{m}-x_2)-0.25\ \text{kN}\cdot\text{m}\times(x_2+6\ \text{m})]$$

$$=\frac{(6\ \text{m}-x_2)x_2}{36EI}\times(10.5\ \text{kN}\cdot\text{m}-1.25\ \text{kN}\cdot x_2)$$

第三跨：两端弯矩分别为 -0.25 kN·m 和 0，挠度方程为

$$y(x_3)=\frac{x_3(6\ \text{m}-x_3)}{6\times 6\ \text{m}\cdot EI}\times[-0.25\ \text{kN}\cdot\text{m}\times(12\ \text{m}-x_3)]$$

$$=-\frac{x_3(6\ \text{m}-x_3)\times 0.25\ \text{kN}\times(12\ \text{m}-x_3)}{36EI}$$

将相应的 x 值代入后，求得 $EIy(x)$图如图 8-42a 所示，此即 $EI\delta_{P1}$图。

由式(c)，可求得 δ_{11} 为

$$\delta_{11}=\delta'_{11}+\delta''_{11}=\frac{6\ \text{m}}{6EI}\times[(2\ \text{kN}\cdot\text{m}-0.5\ \text{kN}\cdot\text{m})+$$

$$(2\ \text{kN}\cdot\text{m}-0.25\ \text{kN}\cdot\text{m})]=\frac{3.25\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

将 δ_{P1} 除以 δ_{11} 即得 M_B 的影响线如图 8-42b 所示。

等跨度等截面连续梁各截面弯矩的影响线和支座截面剪力的影响线在一些设计手册中均有制成的表格，设计时可以直接查用。

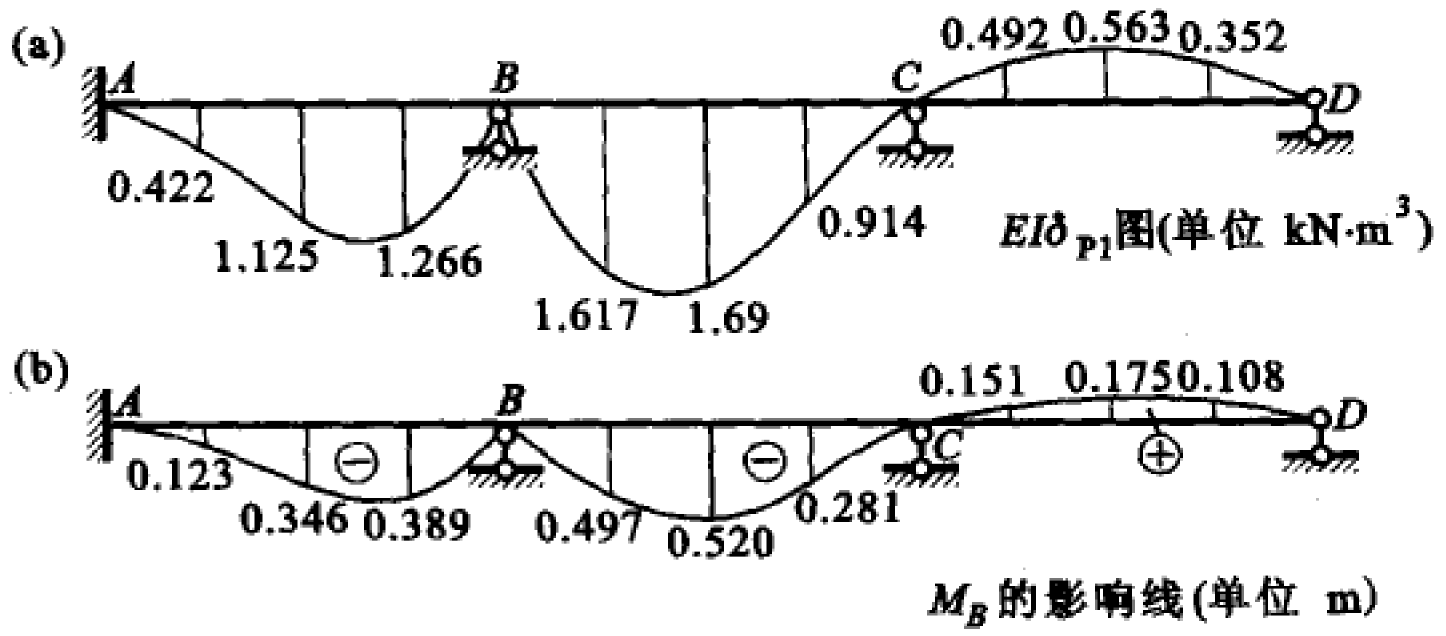


图 8-42

*§8-9 用求解器求解一般的超静定结构

对于一般的平面超静定结构,求解器不仅可以求解各种荷载下的位移和内力,而且可以包括弹性支座、支座移动、温度改变等因素,以及影响线的计算。本节具体介绍了求解器的这些功能。

详细内容见所附光盘相应章节。

§8-10 小 结

力矩分配法和无剪力分配法从原理上看,是位移法的一种渐近解法。从应用范围上看,前者适用于连续梁和无结点线位移的刚架,后者适用于刚架中除杆端无相对线位移的杆件外,其余杆件都是剪力静定杆件的情况。它们的优点是:无需建立和解算联立方程,收敛速度快(一般只需分配两轮或三轮),力学概念明确,直接以杆端弯矩进行运算等。因而,在工程计算中,被作为一种简便的实用解法而乐于使用。

在力矩分配法计算过程中,总是重复一个基本运算——单结点的力矩分配。其中又分三个环节:

(1) 根据荷载求各杆的固端弯矩和结点的约束力矩。

(2) 根据分配系数求分配力矩。

(3) 根据传递系数求传递力矩。

这三个环节的物理意义要了解透彻,然后才能灵活运用。在位移法和力矩

分配法中规定：杆端弯矩以顺时针转向为正，这是应该注意的。

对于一般有结点线位移的刚架，联合用力矩分配法和位移法求解，发挥了两个方法的长处。

多层多跨刚架在竖向荷载作用下的分层计算法和水平荷载作用下的反弯点法，是工程中常用的近似方法。

利用超静定力影响线与挠度图间的比拟关系，可以极方便地给出影响线的形状，可用来判断不利荷载的分布。这在工程中是很有用的方法。

习题 8-1～8-3 可供辅导课选用参考。习题 8-19 和 8-20 是综合性的习题，供参考。

§8-11 思考与讨论

§8-1 思考题

8-1 什么称为固端弯矩？约束力矩如何计算？为什么要变号才进行分配？

8-2 什么称为转动刚度？分配系数与转动刚度有何关系？为什么每一结点的分配系数之和等于1？

8-3 什么称为传递力矩？传递系数如何确定？

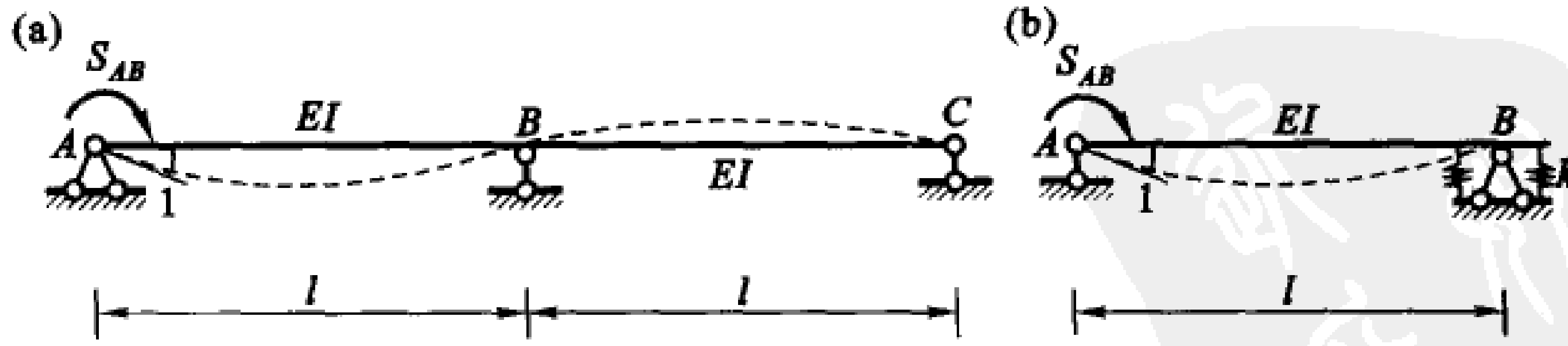
8-4 试求图示梁 A 端的转动刚度 S_{AB} 及自 A 向 B 的力矩传递系数 C_{AB}。

讨论：图 a 为一两跨梁，在 A 点施加 S_{AB} 使 $\theta_A=1$，B 点无外加约束。

图 b 为一单跨梁，在 A 点施加 S_{AB} 使 $\theta_A=1$，B 端为弹性支座，抗转刚度系数为 k_θ。

本问题已将§8-1的单个杆的转动刚度及力矩转递系数的概念扩大到了两跨梁和远端为弹性支座的梁。

读者可以用位移法或传统的力矩分配法求解本问题，从而求出本问题的转动刚度 S_{AB} 及力矩传递系数 C_{AB}。



思考题 8-4 图

8-5 力矩分配法的基本运算有哪些步骤？每一步的物理意义是什么？

§8-2 思考题

8-6 在多结点的力矩分配过程中，为什么每次只放松一个结点？可以同时放松多个结点吗？在什么条件下可以同时放松多个结点？

讨论：在多结点的力矩分配过程中，每次只放松一个结点是因为，当只放松一个结点时，其分配系数及传递系数是已知的，可以据以求解。

当同时放松多个结点时，其分配系数及传递系数已不同于单结点的放松；只有当其分配系数及传递系数均为已知时，才可由之求解。

思考题 8－10 是一种多结点放松的例子，可以参考。

8－7　力矩分配法直接计算出每杆的杆端弯矩。如果还要求出结点的转角，应当如何进行计算？

讨论：设有由杆 AB、AC、AD 相交的刚结点 A 无线位移，在第 n 轮放松结点 A 时，各杆近端相应的分配力矩为 M_{Aj}^n；与之相应地，结点 A 的转角增量为 θ_A^n，如图所示。设各杆的转动刚度为 S_{Aj}，则有

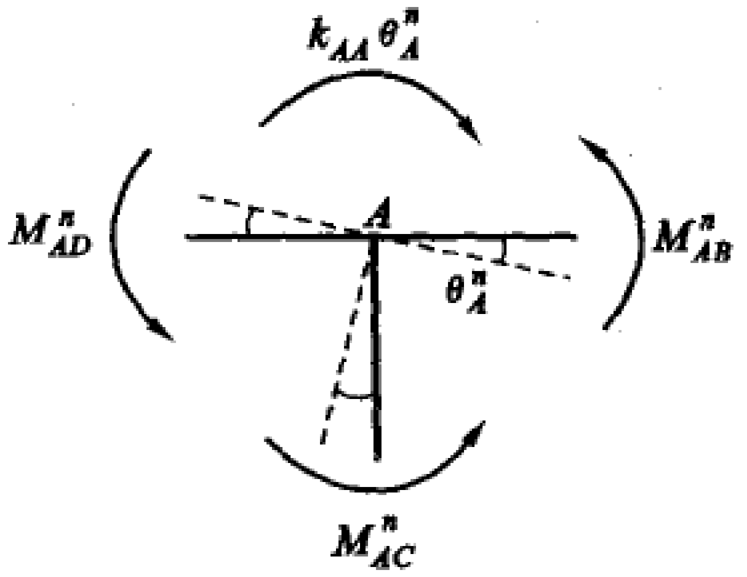
$$M_{Aj}^n = S_{Aj}\theta_A^n$$

结点 A 角位移增量 θ_A^n 为相交于该结点的任一杆杆端在第 n 轮所获分配力矩与转动刚度之比：

$$\theta_A^n = \frac{M_{Aj}^n}{S_{Aj}}$$

结点 A 的角位移应等于各次放松结点所得角位移增量之和，即

$$\theta_A = \sum\theta_A^n = \frac{1}{S_{Aj}}\sum M_{Aj}^n$$

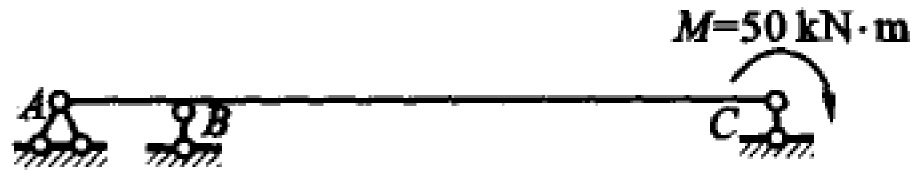


思考题 8－7 图

由上式可知，只需将杆 Aj 的 A 端各次所得分配力矩相加，再除以该杆的转动刚度，即得结点角位移的渐近值。

8－8　用力矩分配法计算连续梁和刚架时，为什么结点的约束力矩会趋于 0，即为什么计算过程是收敛的？

8－9　试按另一种计算程序重算例题 8－4。思考题 8－9 图中当 B 结点锁住时，杆 BC 的 B 端弯矩等于多少？



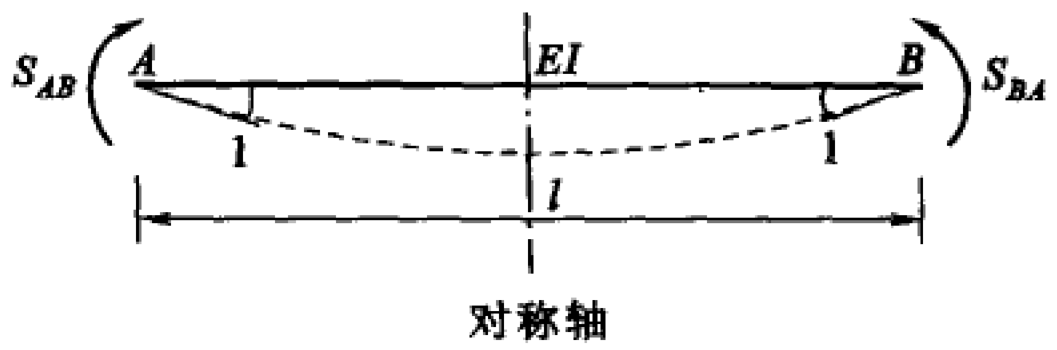
思考题 8－9 图

§8－3　思考题

8－10　用力矩分配法计算对称结构时，如不取半边结构，而直接利用原结构进行计算，如何利用对称性简化计算？

讨论：用力矩分配法计算对称结构时，也可以不取半边结构，而直接利用原结构的对称性以简化计算。

当对称刚架受对称荷载作用，用力矩分配法进行计算时，其锁（加约束求固端弯矩和结点不平衡力矩）和松（分配不平衡力矩及传递）均应保持对称的进行。此时应注意，跨过对称轴的杆，当 A、B 两端同时按对称变形放松时的转动刚度为 $S_{AB} = S_{BA} = 2i$；另外，此杆在杆端有



思考题 8－10 图

分配弯矩后，将不向远端传递，因为是两端保持对称的分配的。

建议读者用此方法重作例 8－5，讨论二者的异同。

8－11 支座移动和温度改变时，可以用力矩分配法进行计算吗？什么情况下可以？什么情况下不可以？可以计算的情况下，怎么计算？

§8－4 思考题

8－12 什么称为无剪力分配法？它的应用条件是什么？

8－13 无剪力分配法为什么能用于单跨对称刚架？单跨不对称刚架直接用无剪力分配法有什么问题？

§8－5 思考题

8－14 §8－5 中实际上是采用有结点角位移而没有结点线位移的结构体系作为位移法的基本结构求解的，为什么这种无结点线位移，但有结点角位移的结构体系也可以作基本结构？

§8－6 思考题

8－15 在多层刚架的分层计算法和反弯点法中，各引入了哪些近似假设？它们可应用于什么情况？如何估计误差范围？

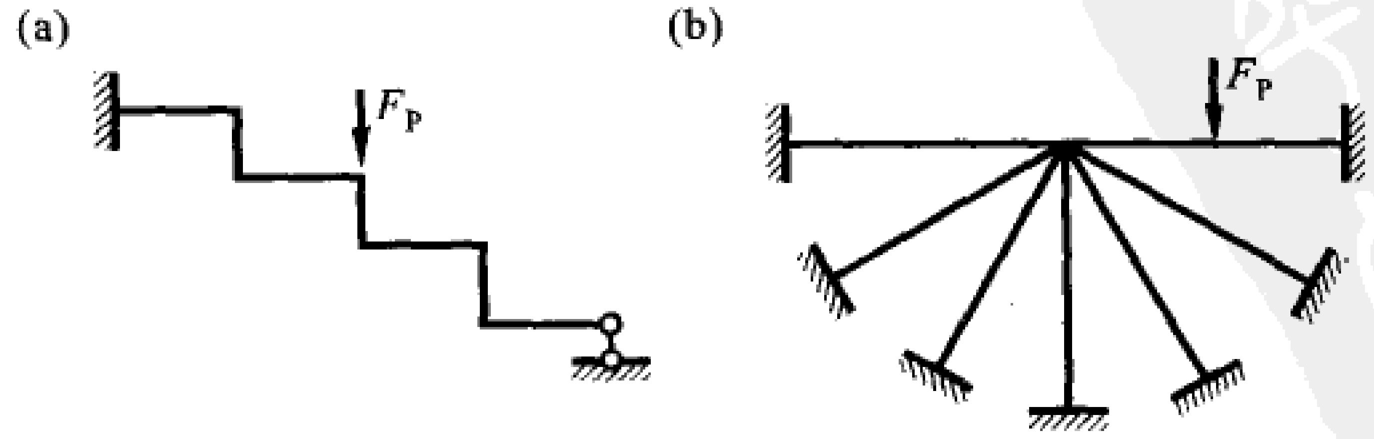
§8－7 思考题

8－16 结构计算方法往往是成对出现的。试从不同的视角，列出相应的对偶方法，并进行对比。

8－17 在计算机方法中，为什么位移法(势能法)受到偏爱，力法(余能法)受到冷遇？

8－18 为什么把力矩分配法说成是位移法类型的渐近法？为什么力法类型的渐近法受到冷遇？

8－19 对力法、位移法、渐近法等进行选用时，试总结出自己的经验和心得。在什么情况下，力法、位移法、渐近法分别成为首选方法？试分别列出相应的极端例子。图示两个极端例子应首选哪种方法？



思考题 8－19 图

8-20　试举出联合法最适用的几个典型例子。

§8-8　思考题

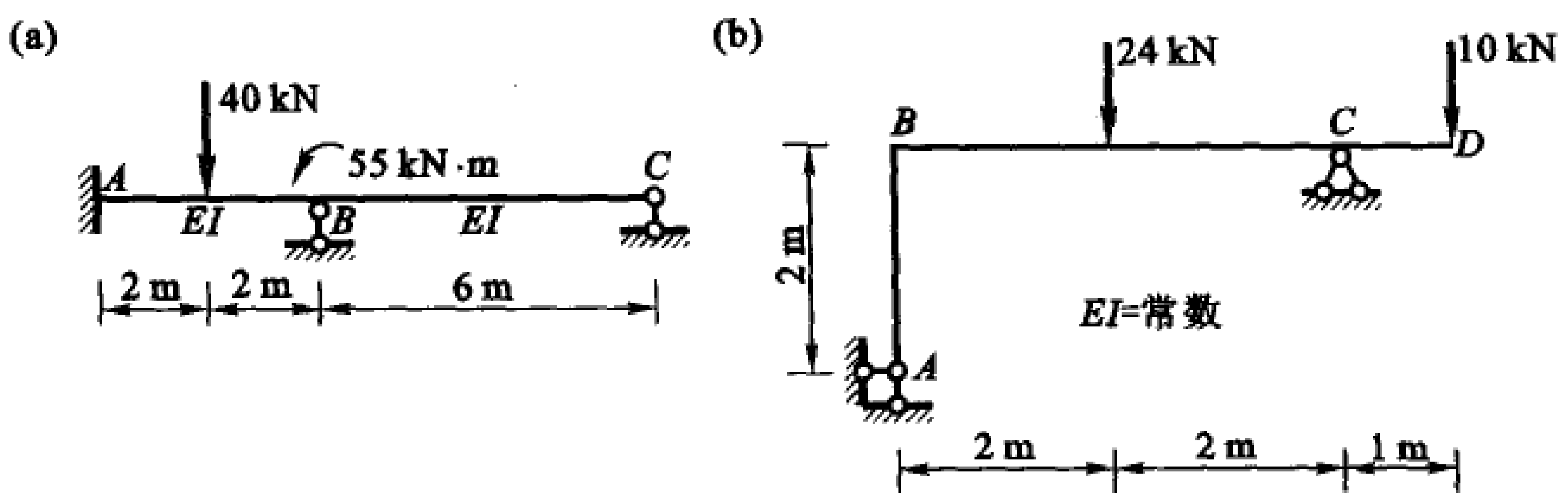
8-21　试说明超静定内力影响线与静定内力影响线的区别。

8-22　试用力法、力矩分配法和挠曲线比拟方法作两跨等截面等跨连续梁中间支座弯矩的影响线。总结一下各种作法的步骤。

8-23　本章中使用了超静定结构作基本结构，为什么超静定结构也可以作基本结构？

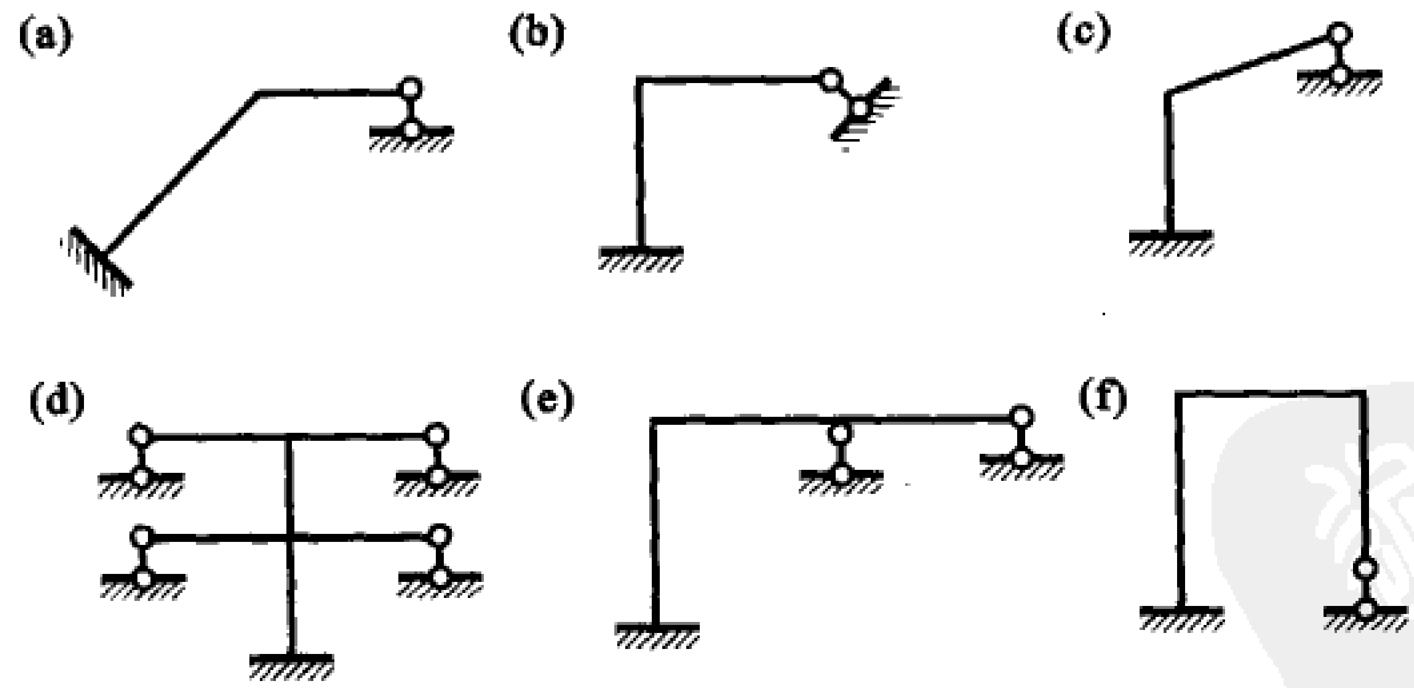
习　题

8-1　试用力矩分配法计算图示结构，并作 M 图。



题 8-1 图

8-2　试判断图示结构可否用无剪力分配法计算，说明理由。

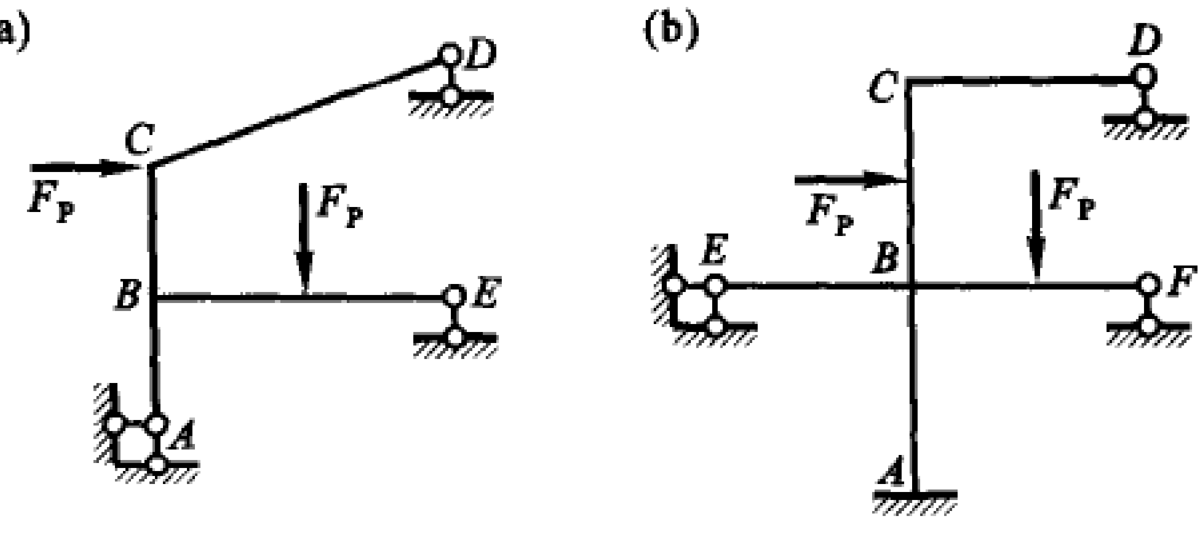


题 8-2 图

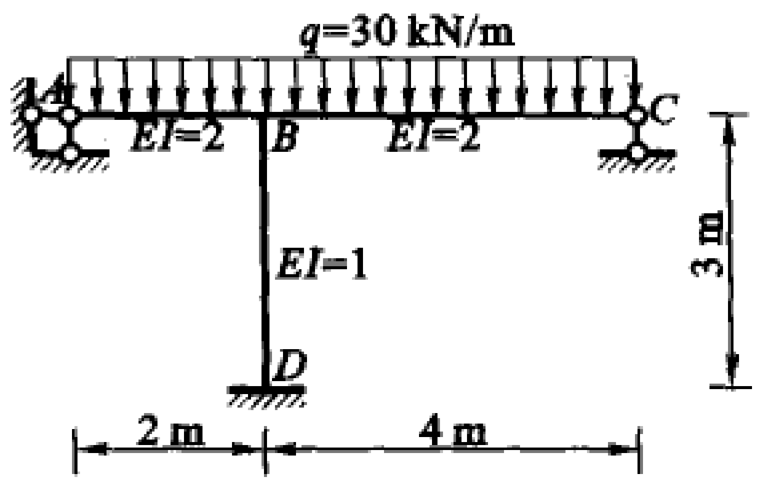
8-3　试讨论图示结构的解法。用什么方法？各杆的固端弯矩、转动刚度和传递系数如何确定？

8-4　试作图示刚架的 M 图（图中 EI 为相对值）。

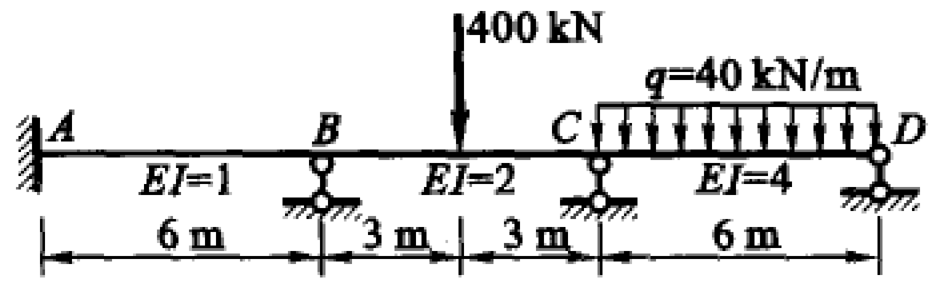
8-5　试作图示连续梁的 M、F_Q 图，并求 CD 跨的最大正弯矩和反力。



题8-3图

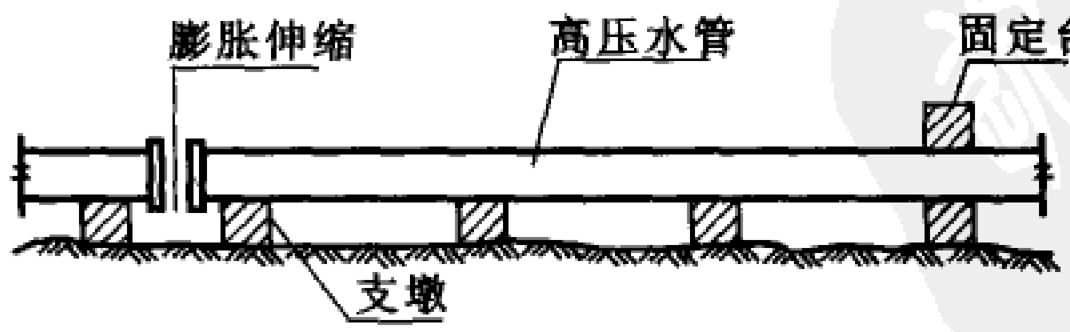


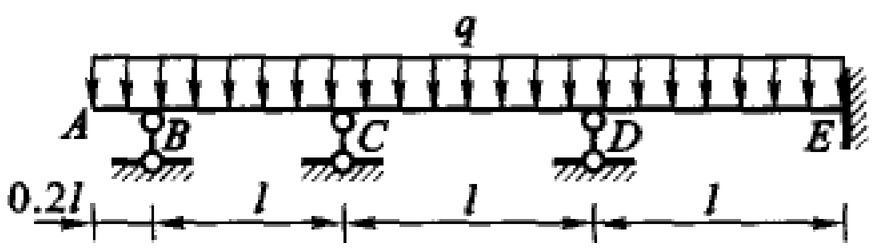
题8-4图



题8-5图

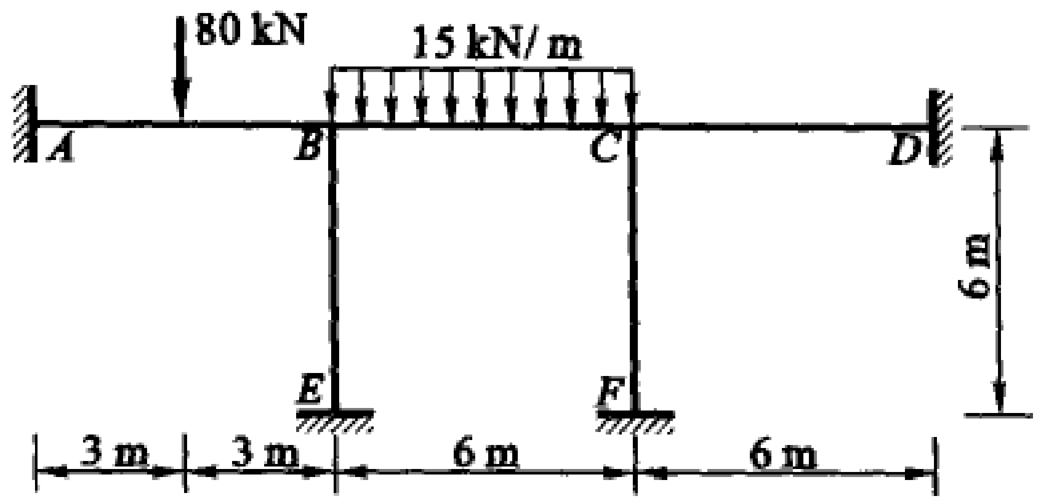
8-6　图示某水电站高压水管，受管内水重及管道自重作用。试作水管的弯矩图和剪力图。设 EI 为常数。





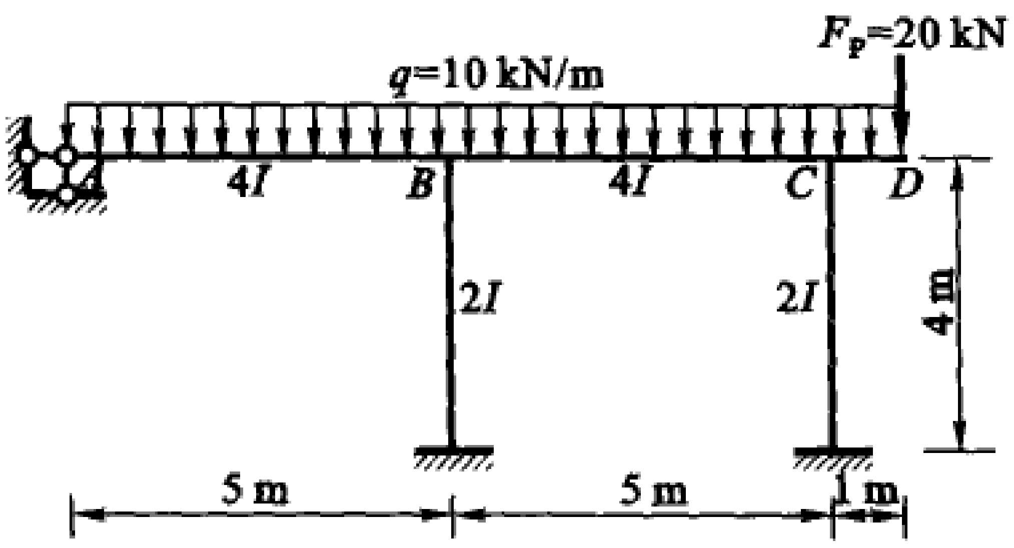
题8-6图

8－7　试作图示刚架的 M 图。设 EI = 常数。



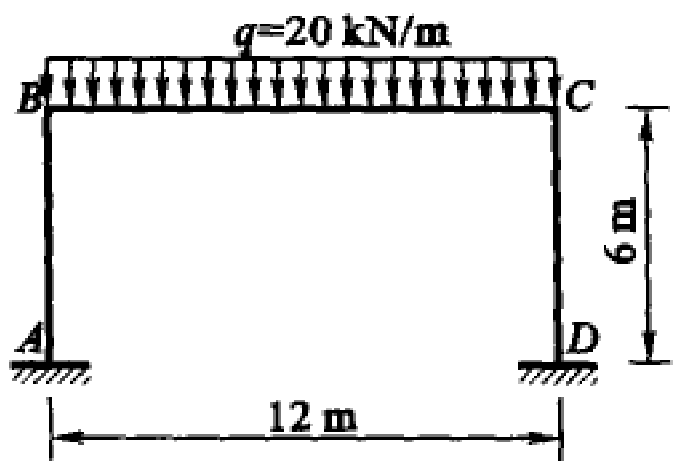
题 8－7 图

8－8　试作图示刚架的 M 图。

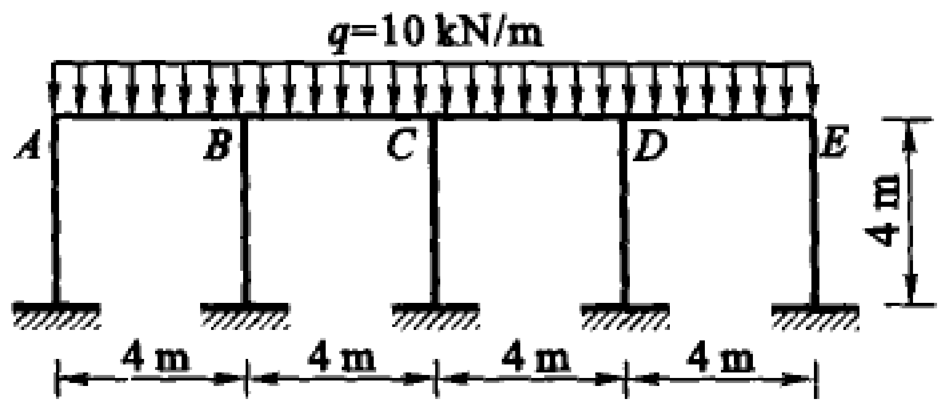


题 8－8 图

8－9～8－10　试作图示刚架的内力图。设 EI = 常数。



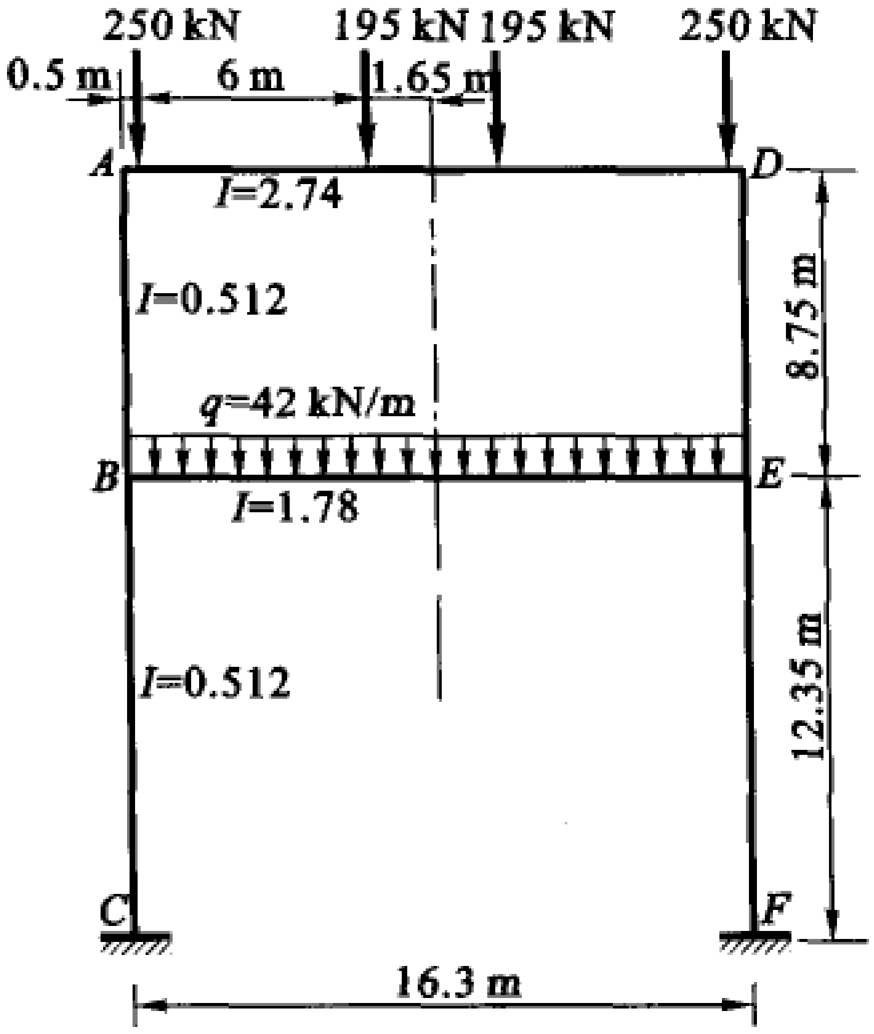
题 8－9 图



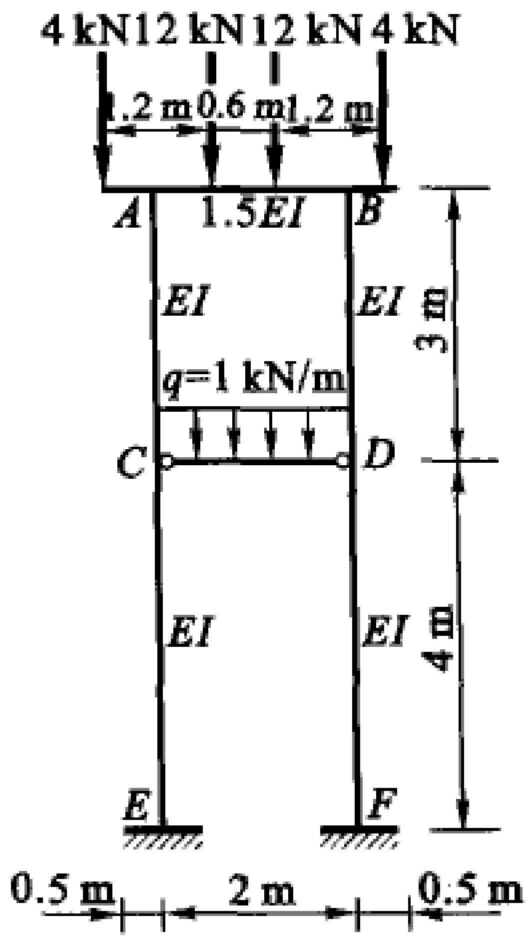
题 8－10 图

8－11　试作图示刚架的 M、F_Q、F_N 图(图中 I 为相对值)。

8－12　试作图示刚架的 M 图。

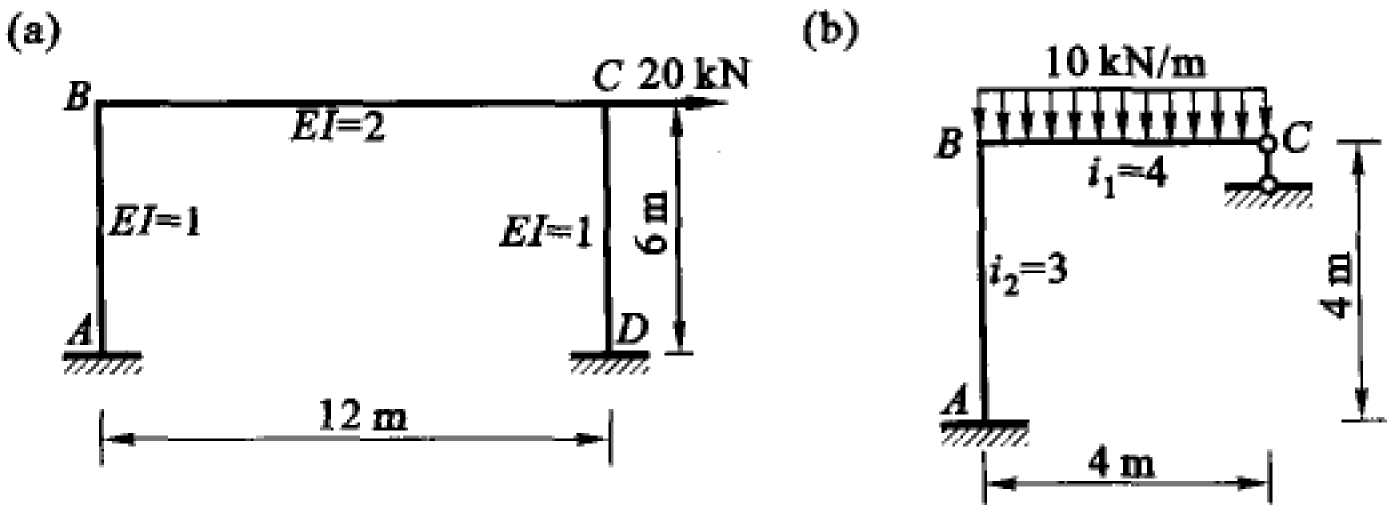


题 8－11 图



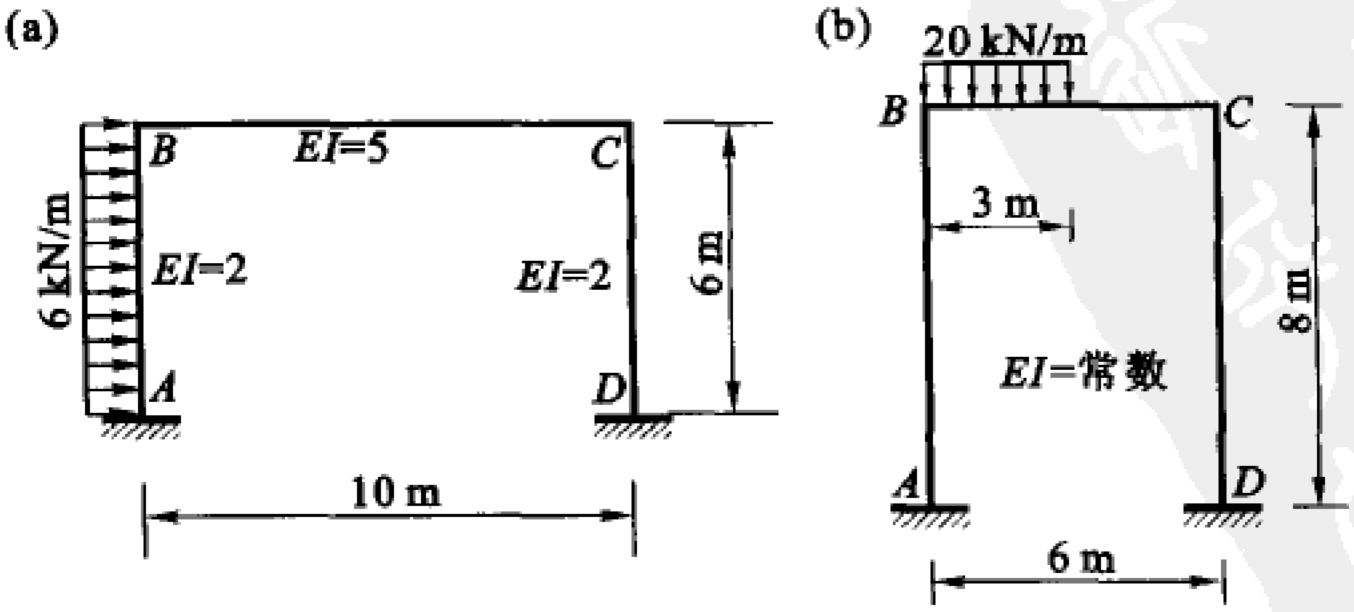
题 8－12 图

8－13　试作图示刚架的弯矩图。



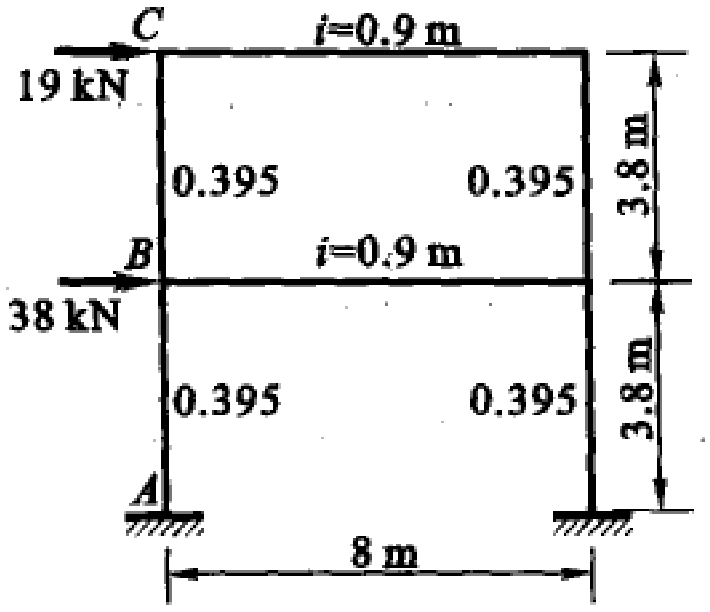
题 8－13 图

8－14　试作图示刚架的 M 图。



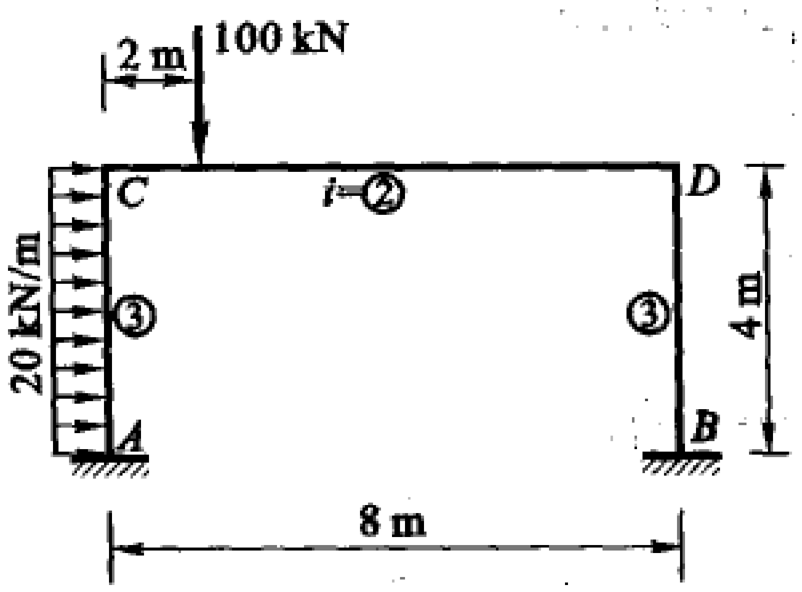
题 8－14 图

8－15　试作图示刚架的弯矩图。

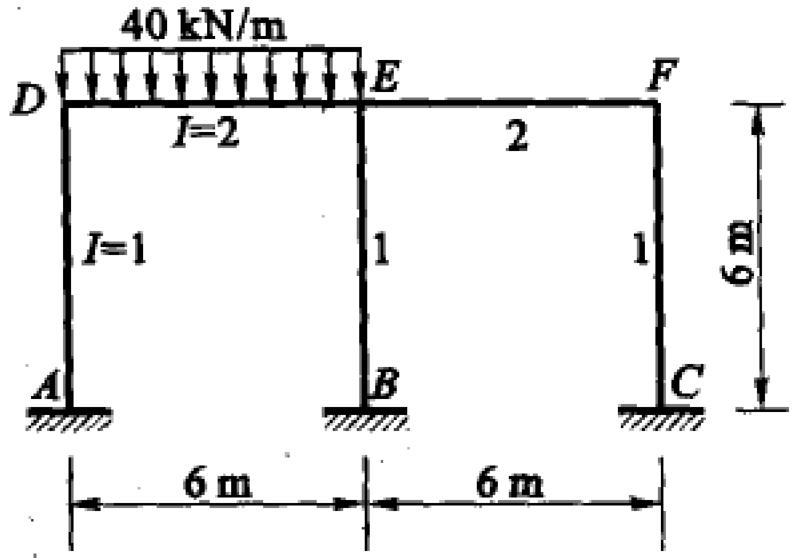


题 8－15 图

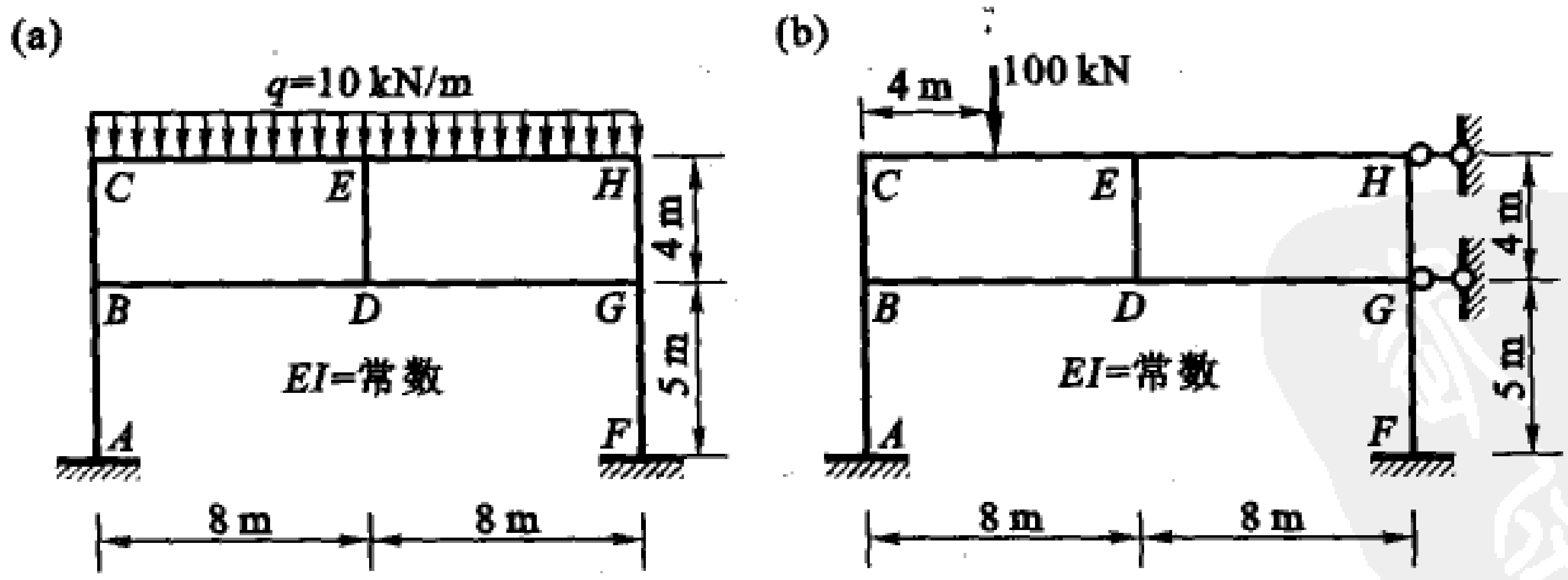
8－16～8－18　试联合应用力矩分配法和位移法计算图示刚架。



题 8－16 图



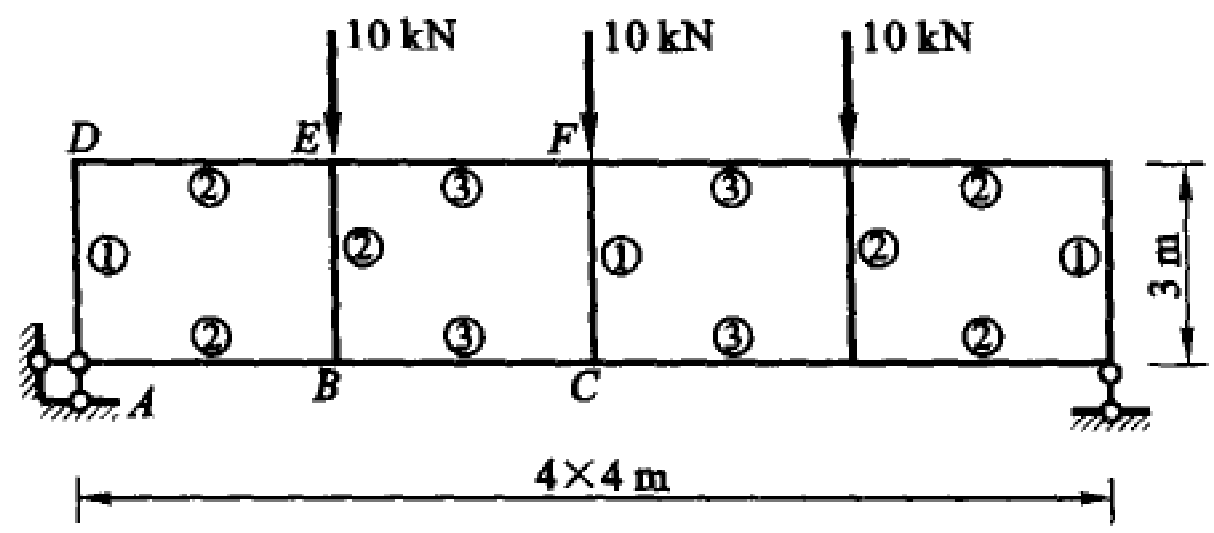
题 8－17 图



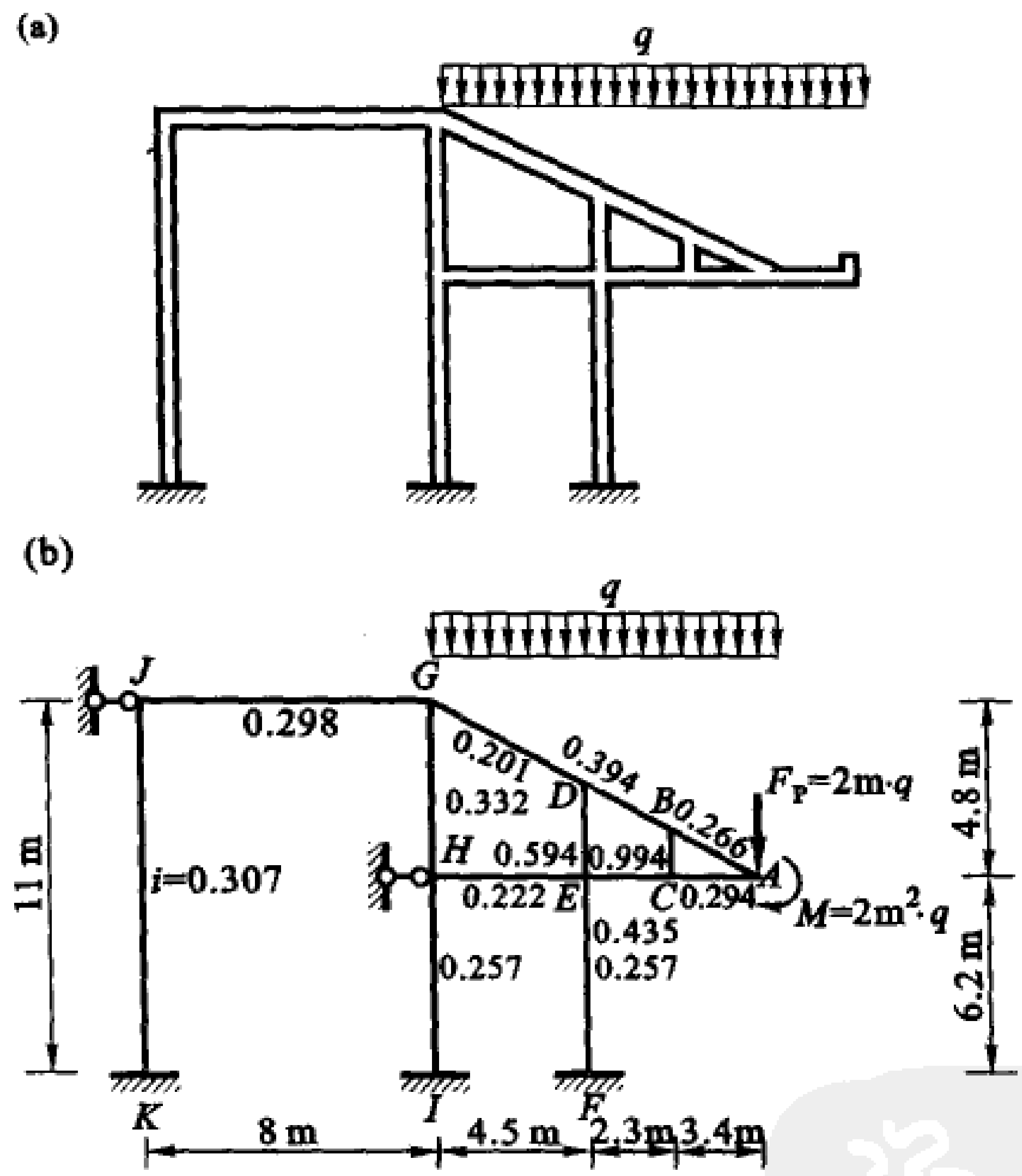
题 8－18 图

8－19　试作图示 4 孔空腹刚架的弯矩图。

8－20　剧院眺台结构如图 a 所示，其计算简图如图 b 所示，杆旁数字为杆的线刚度 i。在竖向荷载 q 作用下，试作 M 图。注意：本题有结点线位移。

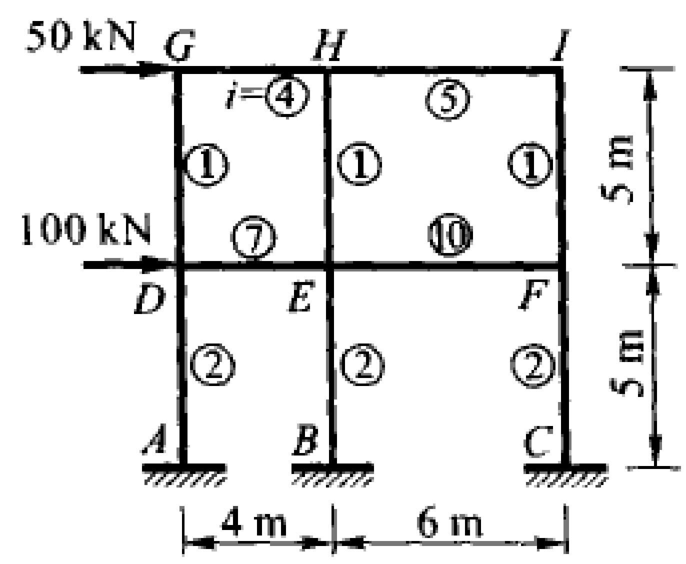


题 8－19 图



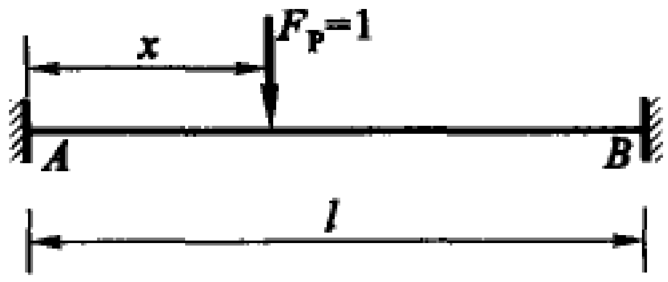
题 8－20 图

8－21　试用反弯点法作图示刚架 M 图。



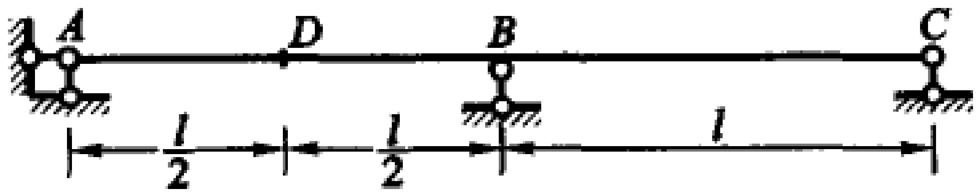
题 8－21 图

8-22　试作图示两端固定梁 AB 的杆端弯矩 M_A 的影响线。荷载 $F_P=1$ 作用在何处时，M_A 达到极大值？



题 8-22 图

8-23　试作图示两跨等跨等截面连续梁 F_{RB}、M_D、F_{QD} 的影响线。



题 8-23 图

第9章 矩阵位移法

§9-1 概　述

结构矩阵分析方法是电子计算机进入结构力学领域而产生的一种方法。它是以传统结构力学作为理论基础、以矩阵作为数学表述形式、以电子计算机作为计算手段，三位一体的方法。

结构力学传统方法与结构矩阵分析方法，二者同源而有别：在原理上同源，在作法上有别。简单地说，前者在"手算"的年代形成，后者则着眼于"电算"，计算手段的不同，引起计算方法的差异。手算怕繁，电算怕乱。手算讨厌重复性的大量运算，电算则偏爱计算过程的程序化和通用性。本章将采用一些新作法，例如矩阵符号的运用，刚度集成规则的阐述，等等。这些新作法都是针对计算过程的程序化这一新目标而提出来的。因此，学习本章时，既要了解它与传统方法的共同点，更要着重了解它的一些新手法和新的着眼点。

与传统的力法、位移法相对应，在结构矩阵分析中也有矩阵力法和矩阵位移法，或者称柔度法与刚度法。矩阵位移法由于具有易于实现计算过程程序化的优点而广为流传，本章只对矩阵位移法进行讨论。

矩阵位移法是有限元法的雏形，因此结构矩阵分析有时也称为杆件结构的有限元法。在本章中将使用有限元法中的一些术语和提法。

有限元法的要点是：先把结构整体拆开，分解成若干个单元（在杆件结构中，一般把每个杆件取作一个单元），这个过程称为离散化。然后，再将这些单元按一定的条件集合成整体。在一分一合，先拆后搭的过程中，把复杂结构的计算问题转化为简单单元的分析和集合问题。因此，有限元法包含两个基本环节：一是单元分析，二是整体分析。

在矩阵位移法中，单元分析的任务是建立单元刚度方程，形成单元刚度矩阵；整体分析的主要任务是将单元集合成整体，由单元刚度矩阵按照刚度集成规则形成整体刚度矩阵，建立整体结构的位移法基本方程，从而求出解答。

在单元分析方面，单元的刚度方程在第7章中已经导出，在本章中只是将已有结果表示为矩阵形式，并讨论在任意坐标系中单元刚度方程的通用形式。

在整体分析方面,将根据计算过程程序化的要求,提出直接由单元刚度导出整体刚度的集成规则,这个集成规则是矩阵位移法的核心内容。

§9-2 单元刚度矩阵(局部坐标系)

本节和下一节对平面结构的杆件单元进行单元分析,得出单元刚度方程和单元刚度矩阵。

第7章给出的转角位移方程实际上就是梁单元的刚度方程。梁单元是杆件单元的特例。

本节推导单元刚度方程时所用的方法不是新的,但有几点新的考虑:重新规定正负号规则,讨论杆件单元的一般情况,采用矩阵表示形式。

1. 一般单元

图9-1所示为平面刚架中的一个等截面直杆单元 e。设杆件除弯曲变形外,还有轴向变形。左右两端各有三个位移分量(两个移动、一个转动),杆件共有六个杆端位移分量,这是平面结构杆件单元的一般情况。设杆长为 l,截面面积为 A,截面惯性矩为 I,弹性模量为 E。单元的两个端点采用局部编码1和2。由端点1到端点2的方向规定为杆轴的正方向,在图中用箭头标明。

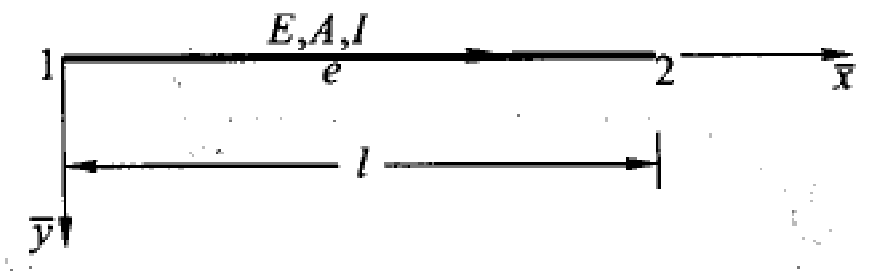


图 9-1

图中采用坐标系 $\bar{x}\bar{y}$,其中 $\bar{x}$ 轴与杆轴重合。这个坐标系称为单元坐标系或局部坐标系。字母 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 的上面都划上一横,作为局部坐标系的标志。

在局部坐标系中,一般单元的每端各有三个位移分量 $\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{\theta}$ 和对应的三个力分量 $\bar{F}_x$、$\bar{F}_y$、$\bar{M}$。图9-2中所示的位移、力分量方向为正方向。

单元的六个杆端位移分量和六个杆端力分量按一定顺序排列,形成单元杆端位移向量 $\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 和单元杆端力向量 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 如下:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e &= (\bar{\Delta}_{(1)} \quad \bar{\Delta}_{(2)} \quad \bar{\Delta}_{(3)} \quad \bar{\Delta}_{(4)} \quad \bar{\Delta}_{(5)} \quad \bar{\Delta}_{(6)})^{eT} \\
&= (\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2)^{eT} \\
\bar{\boldsymbol{F}}^e &= (\bar{F}_{(1)} \quad \bar{F}_{(2)} \quad \bar{F}_{(3)} \quad \bar{F}_{(4)} \quad \bar{F}_{(5)} \quad \bar{F}_{(6)})^{eT} \\
&= (\bar{F}_{x1} \quad \bar{F}_{y1} \quad \bar{M}_1 \quad \bar{F}_{x2} \quad \bar{F}_{y2} \quad \bar{M}_2)^{eT}
\end{aligned}\right\} \tag{9-1}$$

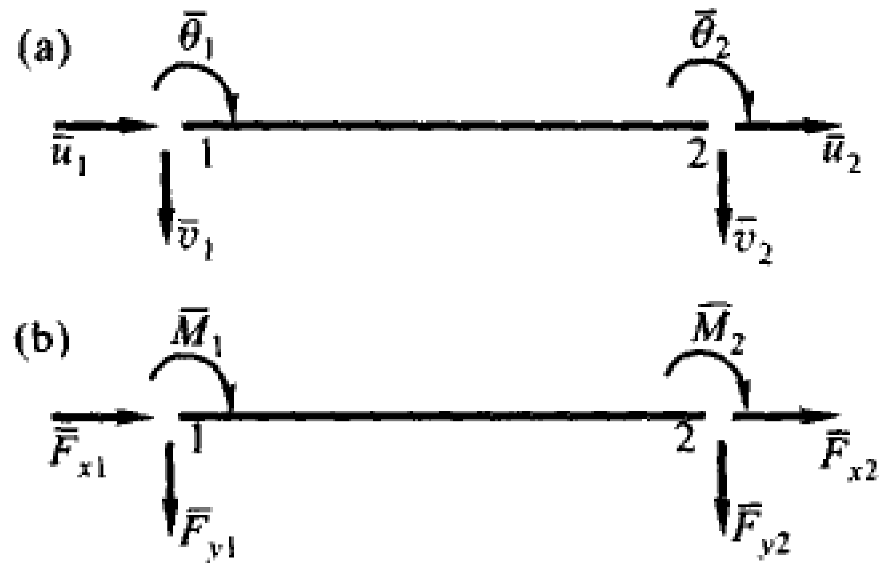


图　9-2

向量中的六个元素的序码记为(1),(2),…,(6)。由于它们是在每个单元中各自编码的(不是在刚架所有单元中统一编码的),因此称为局部码——杆端位移分量(或杆端力分量)的局部码。数码(1),(2),…都加上括号,作为局部码的标志。

现在讨论单元的刚度方程。

单元刚度方程是指由单元杆端位移求单元杆端力时所建立的方程——记为"$\bar{\Delta}\to\bar{F}$"方程①。

为了建立单元刚度方程,我们按照位移法基本体系的作法,在杆件两端加上人为控制的附加约束,使基本体系在两端发生任意指定的位移 $\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$,如图 9-3 所示。然后根据 $\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 来推算相应的杆端力 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$。

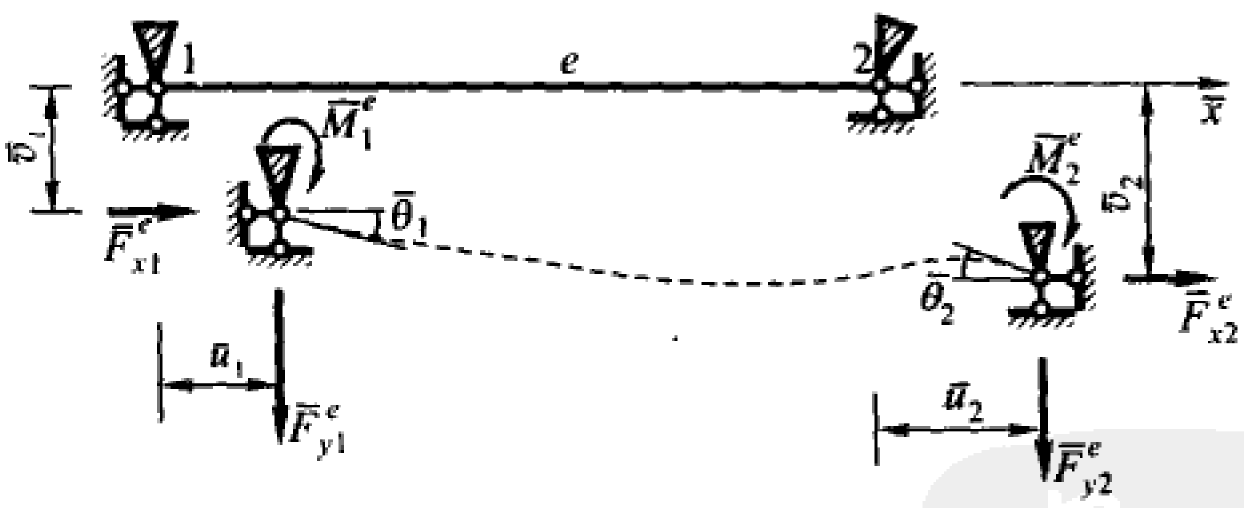


图　9-3

忽略轴向受力状态和弯曲受力状态之间的相互影响,分别推导轴向变形和弯曲变形的刚度方程。

首先,由杆端轴向位移 $\bar{u}_1$、$\bar{u}_2$ 可推算出相应的杆端轴向力 $\bar{F}_{x1}$、$\bar{F}_{x2}$:

---

① 这里,不是讨论它的反问题——建立"$\bar{F}\to\bar{\Delta}$"方程。因为正问题与反问题是性质不尽相同的两个问题。例如,可能出现如下情况:正问题成立(正问题有解),而反问题不成立(反问题没有解)。

$$\left.\begin{aligned}\overline{F}_{x1}^{e}&=\frac{EA}{l}(\overline{u}_{1}^{e}-\overline{u}_{2}^{e})\\\overline{F}_{x2}^{e}&=-\frac{EA}{l}(\overline{u}_{1}^{e}-\overline{u}_{2}^{e})\end{aligned}\right\}\tag{9-2}$$

其次，由杆端横向位移 $\overline{v}_{1}^{e}$、$\overline{v}_{2}^{e}$ 和转角 $\overline{\theta}_{1}^{e}$、$\overline{\theta}_{2}^{e}$ 可推算出相应的杆端横向力 $\overline{F}_{y1}$、$\overline{F}_{y2}$ 和杆端力矩 $\overline{M}_{1}$、$\overline{M}_{2}$。根据转角位移方程(7－5)和(7－6)，并改用本章的记号和正负号，即得

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_{1}^{e}&=\frac{4EI}{l}\overline{\theta}_{1}^{e}+\frac{2EI}{l}\overline{\theta}_{2}^{e}+\frac{6EI}{l^{2}}(\overline{v}_{1}^{e}-\overline{v}_{2}^{e})\\\overline{M}_{2}^{e}&=\frac{2EI}{l}\overline{\theta}_{1}^{e}+\frac{4EI}{l}\overline{\theta}_{2}^{e}+\frac{6EI}{l^{2}}(\overline{v}_{1}^{e}-\overline{v}_{2}^{e})\\\overline{F}_{y1}^{e}&=\frac{6EI}{l^{2}}(\overline{\theta}_{1}^{e}+\overline{\theta}_{2}^{e})+\frac{12EI}{l^{3}}(\overline{v}_{1}^{e}-\overline{v}_{2}^{e})\\\overline{F}_{y2}^{e}&=-\frac{6EI}{l^{2}}(\overline{\theta}_{1}^{e}+\overline{\theta}_{2}^{e})-\frac{12EI}{l^{3}}(\overline{v}_{1}^{e}-\overline{v}_{2}^{e})\end{aligned}\right\}\tag{9-3}$$

上面六个刚度方程(9－2)和(9－3)实际上在位移法中已经推导过。现在将它们合在一起，写成矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix}\overline{F}_{x1}\\\overline{F}_{y1}\\\overline{M}_{1}\\\overline{F}_{x2}\\\overline{F}_{y2}\\\overline{M}_{2}\end{pmatrix}^{e}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\0&\frac{12EI}{l^{3}}&\frac{6EI}{l^{2}}&0&-\frac{12EI}{l^{3}}&\frac{6EI}{l^{2}}\\0&\frac{6EI}{l^{2}}&\frac{4EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^{2}}&\frac{2EI}{l}\\-\frac{EA}{l}&0&0&\frac{EA}{l}&0&0\\0&-\frac{12EI}{l^{3}}&-\frac{6EI}{l^{2}}&0&\frac{12EI}{l^{3}}&-\frac{6EI}{l^{2}}\\0&\frac{6EI}{l^{2}}&\frac{2EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^{2}}&\frac{4EI}{l}\end{bmatrix}^{e}\begin{pmatrix}\overline{u}_{1}\\\overline{v}_{1}\\\overline{\theta}_{1}\\\overline{u}_{2}\\\overline{v}_{2}\\\overline{\theta}_{2}\end{pmatrix}^{e}\tag{9-4}$$

上式可记为

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{e}=\overline{\boldsymbol{k}}^{e}\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{e}\tag{9-5}$$

其中

$$
\bar{k}^e = \begin{array}{c} \\ \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{array}
\begin{array}{cccccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\
(\bar{u}_1=1) & (\bar{v}_1=1) & (\bar{\theta}_1=1) & (\bar{u}_2=1) & (\bar{v}_2=1) & (\bar{\theta}_2=1) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}
$$

$$
\bar{k}^e = \left[\begin{array}{cccccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{array}\right]^e \quad (9-6)
$$

式(9－5)即为所求的“$\bar{\Delta}\to\bar{F}$”方程，称为在局部坐标系中的单元刚度方程。矩阵 $\bar{k}^e$ 称为局部坐标系中的单元刚度矩阵。它是6×6方阵。

2．单元刚度矩阵的性质

(1) 单元刚度系数的意义

$\bar{k}^e$ 中的每个元素称为单元刚度系数，代表由于单位杆端位移所引起的杆端力。例如，第(6)行第(3)列元素 $\bar{k}^e_{(6)(3)}$ $\left(\text{即元素}\frac{2EI}{l}\right)$代表当第(3)个杆端位移分量 $\bar{\theta}_1=1$ 时引起的第(6)个杆端力分量 $\bar{M}_2$。一般来说，第(i)行第(j)列元素 $\bar{k}^e_{(i)(j)}$ 代表当第(j)个杆端位移分量 $\bar{\Delta}_{(j)}$ 等于1(其他位移分量为零)时所引起的第(i)个杆端力分量 $\bar{F}_{(i)}$ 的值。

$\bar{k}^e$ 中某一列的六个元素分别表示当某个杆端位移分量等于1时所引起的六个杆端力分量。例如，第1列对应于单位位移 $\bar{u}_1=1$ 所引起的杆端力。为了帮助理解，在式(9－6)中，在 $\bar{k}^e$ 每一列的上方都标明了对应的单位位移分量。

(2) $\bar{k}^e$ 是对称矩阵

$\bar{k}^e$ 的对称性是指其元素有如下关系：

$$\bar{k}^e_{(i)(j)} = \bar{k}^e_{(j)(i)} \quad (9-7)$$

这实际上是根据反力互等定理得出的结论。

(3) 一般单元的 $\bar{k}^e$ 是奇异矩阵

$\bar{k}^e$ 的奇异性是指其行列式等于零，即

$$|\bar{k}^e| = 0 \quad (9-8)$$

直接计算式(9－6)的矩阵行列式，便可验证上述结论。

由此可知，$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 不存在逆矩阵。也就是说，根据单元刚度方程(9－5)，可以由杆端位移 $\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 推算出杆端力 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$，且 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 的解是唯一解；但不能由杆端力 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 反推出杆端位移 $\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$，$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 可能无解，如有解，则为非唯一解。这里，讨论了正反两个问题，而它们是性质不同的两个问题。如果把二者不加区别，就会造成概念上的混乱。

为了避免混淆，把正反两个问题再从数学提法、力学模型、解的性质等方面作一对比。

	正问题 ($\bar{\boldsymbol{\Delta}}\to\bar{\boldsymbol{F}}$)	反问题 ($\bar{\boldsymbol{F}}\to\bar{\boldsymbol{\Delta}}$)
数学提法	$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 为任意指定值，$\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 为待求量。	$\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 为任意指定值，$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 为待求量。
力学模型	把单元按"两端有六个人工控制的附加约束的杆件"（位移法基本体系）来分析——$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 由控制附加约束而加以指定。	把单元按"两端自由的杆件"来分析——$\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 直接加在自由端作为指定的杆端力。
解的性质	$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 为任意值时，$\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 都有解，且为唯一解。 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 总是一个平衡力系，不可能是不平衡力系。	$\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 为不平衡力系时，$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 没有解。 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 为平衡力系时，$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 有解，但为非唯一解（因为自由杆件除本身变形外还可有任意刚体位移）。 $(\bar{\boldsymbol{k}}^e)^{-1}$ 不存在。

总之，正反两个问题的力学模型是截然不同的，不能把单元笼统地称为"自由单元"。逆矩阵 $(\bar{\boldsymbol{k}}^e)^{-1}$ 的性质是根据反问题确定的，这里的反问题是按"自由单元"分析，故得出 $(\bar{\boldsymbol{k}}^e)^{-1}$ 不存在的结论。

3．特殊单元

式(9－4)是一般单元的刚度方程，其中六个杆端位移可指定为任意值。在结构中还有一些特殊单元，单元的某个或某些杆端位移的值已知为零，而不能任意指定。各种特殊单元的刚度方程无需另行推导，只需对一般单元的刚度方程(9－4)作一些特殊处理便可自动得到。

举例来说，计算连续梁时，我们通常忽略轴向变形。如取每跨梁作为单元（图 9－4），则只有两个杆端位移分量 $\bar{\theta}_1$，$\bar{\theta}_2$ 可指定为任意值，而其余四个分量均已知为零：

$$\bar{u}_1=\bar{v}_1=\bar{u}_2=\bar{v}_2=0 \tag{a}$$

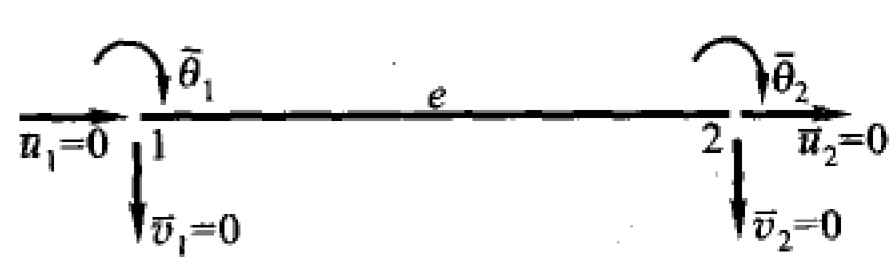


图　9－4

将式(a)代入式(9－4),即自动得出此特殊单元的刚度方程如下：

$$\begin{bmatrix}\overline{M}_1\\ \overline{M}_2\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l}\\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}\bar{\theta}_1\\ \bar{\theta}_2\end{bmatrix}^e \tag{9-9}$$

此时单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^e=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l}\\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}^e \tag{9-10}$$

实际上这个特殊单元刚度矩阵(9－10)可由式(9－6)的一般单元刚度矩阵删去第(1)、(2)、(4)、(5)行和列后自动得出。

用同样方法还可以得出其他各种特殊单元的刚度方程和刚度矩阵。

在结构矩阵分析中,我们着眼于计算过程的程序化、标准化和自动化。因此,我们不去把各种非标准化的特殊单元刚度矩阵都罗列出来,以免头绪太多;而只采用一种标准化形式——一般单元的刚度矩阵(9－6),关于单元刚度矩阵的各种特殊形式将由计算机程序去自动形成。

顺便指出,某些特殊单元的刚度矩阵是可逆的。例如,式(9－10)中的 $\bar{k}^e$,其逆矩阵存在。

逆矩阵$(\bar{k}^e)^{-1}$是否存在,完全根据反问题的力学模型来确定。对于图9－4所示特殊单元来说,正问题的力学模型如图9－5a所示,每端有两个支杆和一个控制转角的附加约束,$\bar{\theta}_1$ 和 $\bar{\theta}_2$ 可指定为任意值。

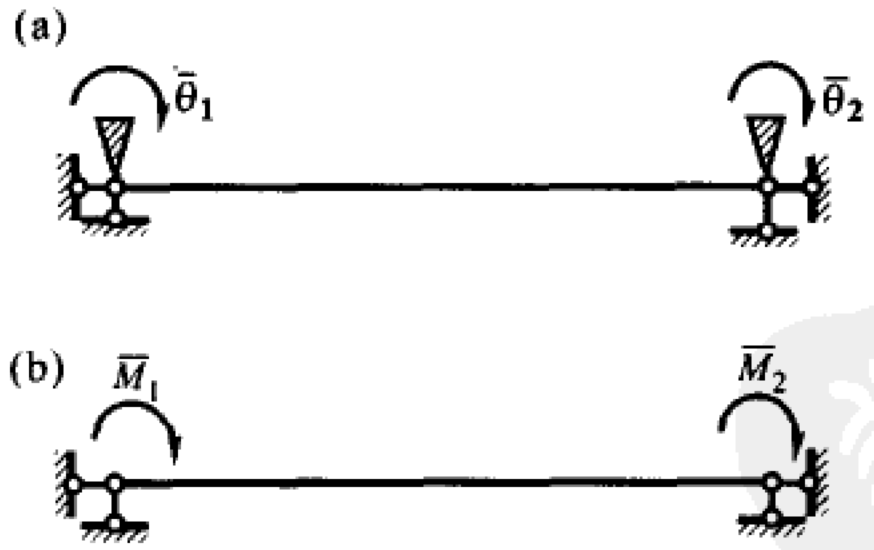


图 9－5

反问题的力学模型如图9－5b所示,每端有两个支杆,杆端力矩 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 可指定为任意值。由于反问题的力学模型是一个几何不变体系,因此当 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 为任意值时,杆端转角 $\bar{\theta}_1$、$\bar{\theta}_2$ 有解,且为唯一解。由此得出$(\bar{k}^e)^{-1}$存在的结论。

§9－3　单元刚度矩阵(整体坐标系)

坐标系是一个数学工具,可根据需要而灵活选用。

在上一节中,选用局部坐标系,以杆件轴线作为 $\bar{x}$ 轴。这样做的目的是希望导出的单元刚度矩阵具有最简单的形式。

在本节中,我们从整体分析的角度来考虑。在一个复杂结构中,各个杆件的杆轴方向不尽相同,各自的局部坐标系也不尽相同,很不统一。为了便于进行整体分析,必须选用一个统一的公共坐标系,称为整体坐标系。为了区别,用 $\bar{x}$,$\bar{y}$ 表示局部坐标,用 x,y 表示整体坐标。

为了推导整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$,采用坐标变换的方法:第一步,先讨论两种坐标系中单元杆端力的转换式,得出单元坐标转换矩阵;第二步,再讨论两种坐标系中单元刚度矩阵的转换式。

(1) 单元坐标转换矩阵

首先分析单元杆端力在不同坐标系中的关系。图 9－6a 所示为一单元 e,其局部坐标系为 $O\bar{x}\bar{y}$,整体坐标系为 Oxy,由 x 轴到 $\bar{x}$ 轴的夹角 α 以顺时针转向为正。局部坐标系中的杆端力分量用 $\bar{F}_x^e$、$\bar{F}_y^e$、$\bar{M}^e$ 表示。整体坐标系中则用 F_x^e、F_y^e、M^e 表示,如图 9－6b 所示。显然,二者有下列关系:

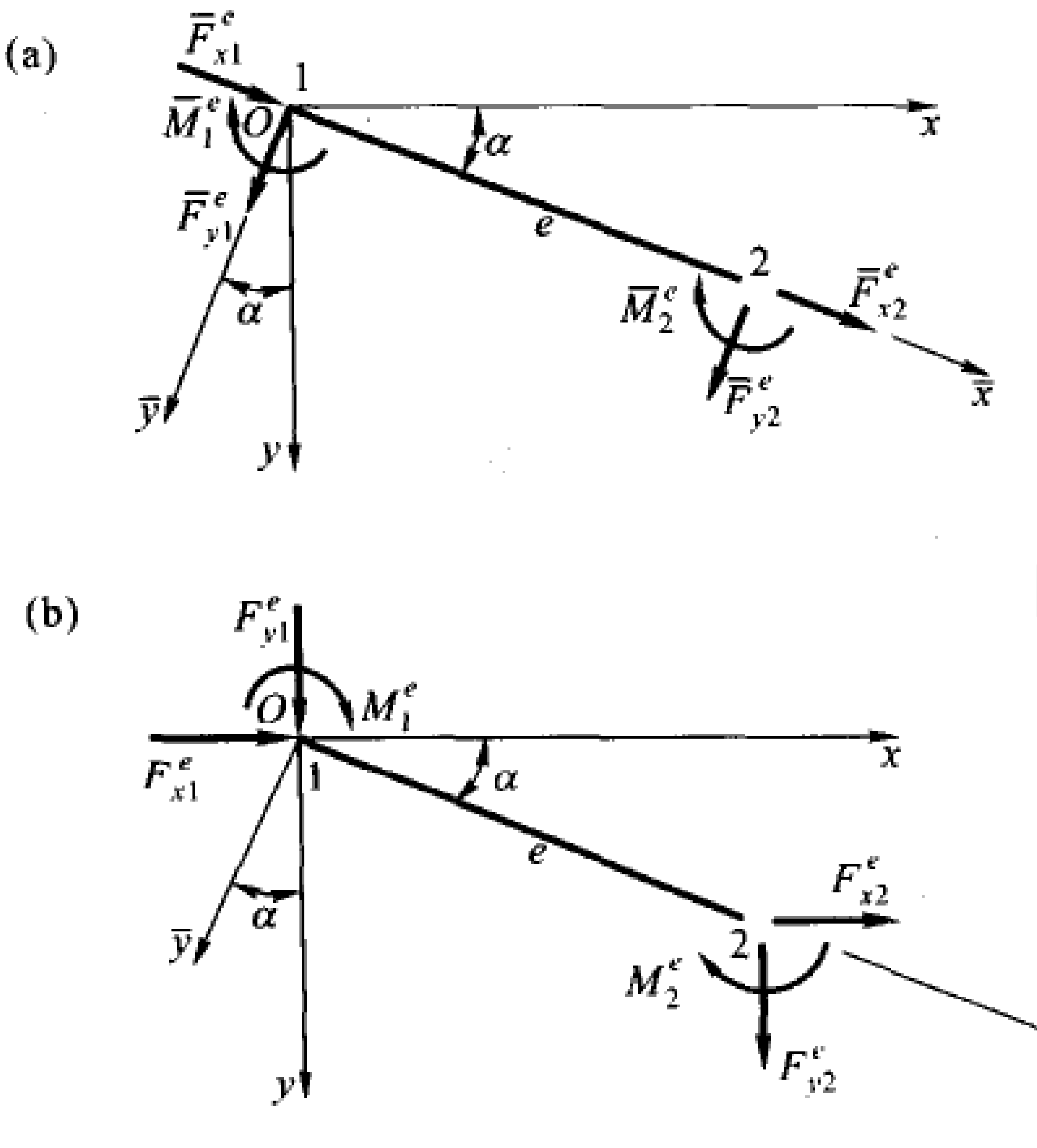


图　9－6

$$\left.\begin{aligned}&\overline{F}_{x1}^{e}=F_{x1}^{e}\cos\alpha+F_{y1}^{e}\sin\alpha\\&\overline{F}_{y1}^{e}=-F_{x1}^{e}\sin\alpha+F_{y1}^{e}\cos\alpha\\&\overline{M}_{1}^{e}=M_{1}^{e}\\&\overline{F}_{x2}^{e}=F_{x2}^{e}\cos\alpha+F_{y2}^{e}\sin\alpha\\&\overline{F}_{y2}^{e}=-F_{x2}^{e}\sin\alpha+F_{y2}^{e}\cos\alpha\\&\overline{M}_{2}^{e}=M_{2}^{e}\end{aligned}\right\}\tag{9-11}$$

将式(9－11)写成矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix}\overline{F}_{x1}\\\overline{F}_{y1}\\\overline{M}_{1}\\\hdashline\overline{F}_{x2}\\\overline{F}_{y2}\\\overline{M}_{2}\end{Bmatrix}^{e}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\cos\alpha&\sin\alpha&0&0&0&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\\hdashline0&0&0&\cos\alpha&\sin\alpha&0\\0&0&0&-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right]^{e}\begin{Bmatrix}F_{x1}\\F_{y1}\\M_{1}\\\hdashline F_{x2}\\F_{y2}\\M_{2}\end{Bmatrix}^{e}\tag{9-12}$$

或简写成

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{e}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{e}\tag{9-13}$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 称为单元坐标转换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\cos\alpha&\sin\alpha&0&0&0&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\\hdashline0&0&0&\cos\alpha&\sin\alpha&0\\0&0&0&-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\tag{9-14}$$

式(9－13)是两种坐标系中单元杆端力的转换式。

可以证明，单元坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为一正交矩阵。因此，其逆矩阵等于其转置矩阵，即

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\tag{9-15}$$

或

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}\tag{9-16}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为与 $\boldsymbol{T}$ 同阶的单位矩阵。

式(9－13)的逆转换式为

$$\boldsymbol{F}^{e}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}^{e}\tag{9-17}$$

同理，可以求出单元杆端位移在两种坐标系中的转换关系。设局部坐标系中单元杆端位移列阵为 $\overline{\boldsymbol{\Delta}}^{e}$，整体坐标系中单元杆端位移列阵为 $\boldsymbol{\Delta}^{e}$，则

$$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Delta}^e \tag{9-18}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e \tag{9-19}$$

(2) 整体坐标系中的单元刚度矩阵

单元杆端力与杆端位移在整体坐标系中的关系式可写为

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\Delta}^e \tag{9-20}$$

其中 $\boldsymbol{k}^e$ 称为在整体坐标系中的单元刚度矩阵。

现在来找出 $\boldsymbol{k}^e$ 与局部坐标系中单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 的转换关系。

单元 e 在局部坐标系中的刚度方程为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e \tag{a}$$

将式(9-13)和(9-18)代入式(a),得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^e = \bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Delta}^e$$

等式两边各前乘以 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$,并引入式(9-16),得

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Delta}^e \tag{b}$$

比较式(b)与(9-20),可知

$$\boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T} \tag{9-21}$$

式(9-21)就是在两种坐标系中单元刚度矩阵的转换关系。只要求出单元坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$,就可以按照式(9-21)由 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 计算 $\boldsymbol{k}^e$。

整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 与 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 同阶,具有类似的性质:

(1) 元素 $k^e_{(i),(j)}$ 表示在整体坐标系中第(j)个杆端位移分量等于 1 时引起的第(i)个杆端力分量。

(2) $\boldsymbol{k}^e$ 是对称矩阵。

(3) 一般单元的 $\boldsymbol{k}^e$ 是奇异矩阵。

例 9-1 试求图 9-7 所示刚架中各单元在整体坐标系中的刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$。设各杆的杆长和截面尺寸相同。

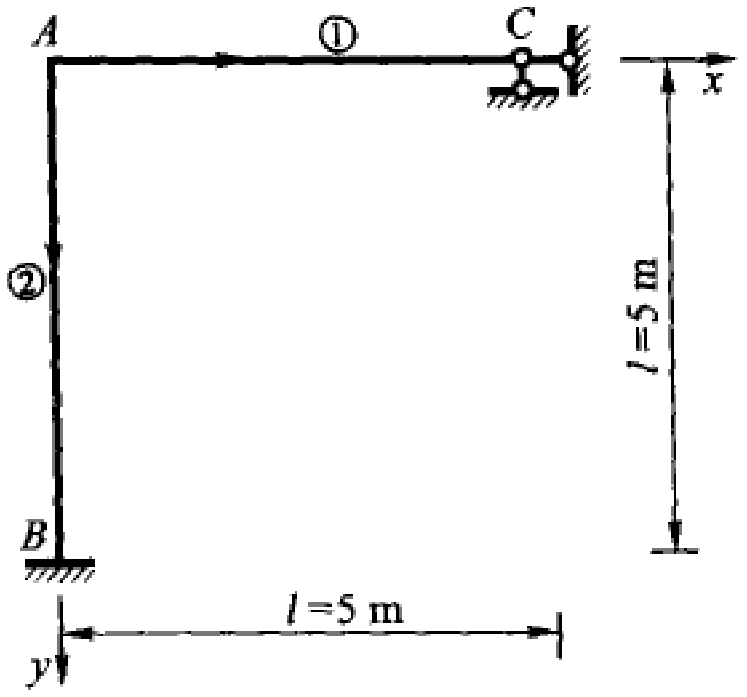


图 9-7

$l=5\ \mathrm{m}$，截面尺寸 $bh=0.5\ \mathrm{m}\times 1\ \mathrm{m}$，$A=0.5\ \mathrm{m}^2$，$I=\frac{1}{24}\ \mathrm{m}^4$，$E=3\times10^4\ \mathrm{MPa}$，$\frac{EA}{l}=300\times10^4\ \mathrm{kN/m}$，$\frac{EI}{l}=25\times10^4\ \mathrm{kN\cdot m}$

解 (1) 局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$

图中用箭头标明各杆局部坐标 $\bar{x}$ 的正方向。由于单元①、②的尺寸相同，故 $\bar{k}^{①}$ 与 $\bar{k}^{②}$ 相等。由式(9-6)得

$$\bar{k}^{①}=\bar{k}^{②}=10^4\times\begin{pmatrix}300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 & -300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & 12\ \mathrm{kN/m} & 30\ \mathrm{kN} & 0 & -12\ \mathrm{kN/m} & 30\ \mathrm{kN}\\ 0 & 30\ \mathrm{kN} & 100\ \mathrm{kN\cdot m} & 0 & -30\ \mathrm{kN} & 50\ \mathrm{kN\cdot m}\\ -300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 & 300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & -12\ \mathrm{kN/m} & -30\ \mathrm{kN} & 0 & 12\ \mathrm{kN/m} & -30\ \mathrm{kN}\\ 0 & 30\ \mathrm{kN} & 50\ \mathrm{kN\cdot m} & 0 & -30\ \mathrm{kN} & 100\ \mathrm{kN\cdot m}\end{pmatrix}$$

(2) 整体坐标系中的单元刚度矩阵 k^e

单元①：$\alpha=0°$，$T=I$

$$k^{①}=\bar{k}^{①}$$

单元②：$\alpha=90°$，单元坐标转换矩阵为

$$T=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$k^{②}=T^{\mathrm{T}}\bar{k}^{②}T=10^4\times\begin{pmatrix}12\ \mathrm{kN/m} & 0 & -30\ \mathrm{kN} & -12\ \mathrm{kN/m} & 0 & -30\ \mathrm{kN}\\ 0 & 300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 & -300\ \mathrm{kN/m} & 0\\ -30\ \mathrm{kN} & 0 & 100\ \mathrm{kN\cdot m} & 30\ \mathrm{kN} & 0 & 50\ \mathrm{kN\cdot m}\\ -12\ \mathrm{kN/m} & 0 & 30\ \mathrm{kN} & 12\ \mathrm{kN/m} & 0 & 30\ \mathrm{kN}\\ 0 & -300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 & 300\ \mathrm{kN/m} & 0\\ -30\ \mathrm{kN} & 0 & 50\ \mathrm{kN\cdot m} & 30\ \mathrm{kN} & 0 & 100\ \mathrm{kN\cdot m}\end{pmatrix}$$

§9-4 连续梁的整体刚度矩阵

前两节进行了单元分析，建立了单元刚度方程，推导了单元刚度矩阵。从本

节起转到整体分析，建立整体刚度方程，导出整体刚度矩阵。本节以连续梁为例，下节讨论刚架的一般情况，并考虑杆件轴向变形的影响。

整体刚度方程是按位移法建立的。具体作法有两种：一种是传统位移法，另一种是本章介绍的单元集成法（也称为刚度集成法或直接刚度法）。单元集成法的优点是便于实现计算过程的程序化。

为了将两种作法加以比较，先回顾一下传统作法。

对于图 9－8a 所示的连续梁，位移法基本体系如图 9－8b 所示。位移法的基本未知量为结点转角 Δ_1、Δ_2、Δ_3，它们可指定为任意值，在基本体系中用控制附加约束加以指定。它们组成整体结构的结点位移向量 $\boldsymbol{\Delta}$：

$$\boldsymbol{\Delta}=(\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3)^{\mathrm{T}}$$

与 Δ_1、Δ_2、Δ_3 对应的力是附加约束的力偶 F_1、F_2、F_3。它们组成整体结构的结点力向量 $\boldsymbol{F}$：

$$\boldsymbol{F}=(F_1 \quad F_2 \quad F_3)^{\mathrm{T}}$$

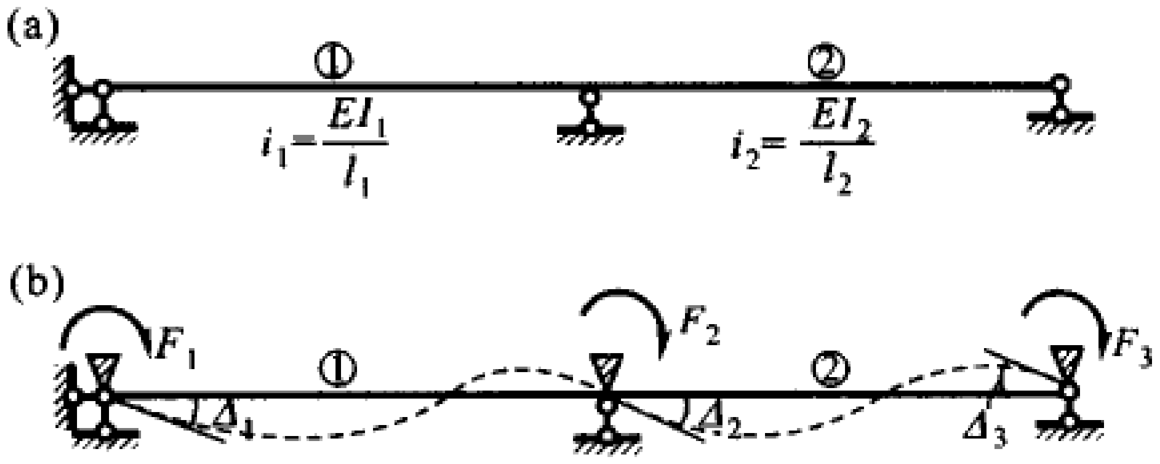


图 9－8

在传统作法中，我们分别考虑每个结点转角 Δ_1、Δ_2、Δ_3 独自引起的结点力偶，如图 9－9a、b、c 所示。

叠加上述三种情况，即得结点力偶 F_1、F_2、F_3 如下：

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} \tag{9-22}$$

记为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K\Delta} \tag{9-23}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{pmatrix} \tag{9-24}$$

式(9－22)或(9－23)称为整体刚度方程，$\boldsymbol{K}$ 称为整体刚度矩阵。

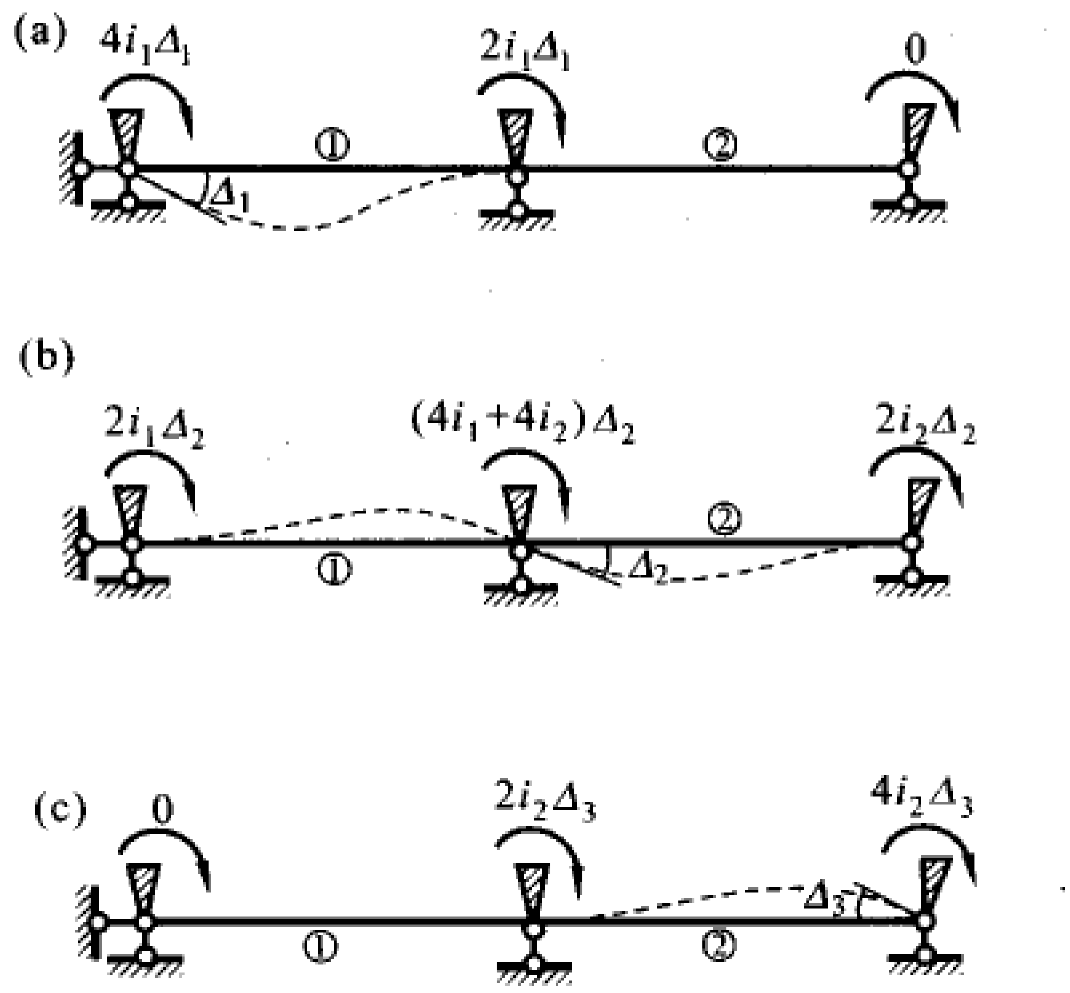


图 9-9

上面简略地回顾了传统位移法，下面详细地介绍单元集成法。

1. 单元集成法的力学模型和基本概念

按传统位移法求结构的结点力 $\boldsymbol{F}$ 时，分别考虑每个结点位移对 $\boldsymbol{F}$ 的单独贡献（采用图 9-9 中的力学模型），然后进行叠加。

按单元集成法求 $\boldsymbol{F}$ 时，分别考虑每个单元对 $\boldsymbol{F}$ 的单独贡献，然后进行叠加——其特点就是"由单元直接集成"。

首先，考虑单元①的贡献。

既然只考虑单元①的单独贡献，因此必须设法略去其他单元的贡献。为此采用图 9-10 所示的力学模型，其中令单元②的刚度为零（即令 $i_2=0$）。此时，单元②虽有变形，但不产生结点力，因此整个结构的结点力是由单元①单独产生的，记为

$$\boldsymbol{F}^{①}=(F_1^{①}\quad F_2^{①}\quad F_3^{①})^{\mathrm{T}}$$

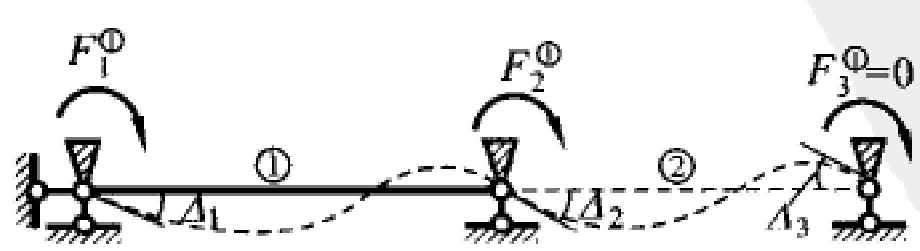


图 9-10

$\boldsymbol{F}^{①}$ 表示单元①对结构结点力 $\boldsymbol{F}$ 的贡献。

下面求此模型的结点力 $\boldsymbol{F}^{①}$。由于 $i_2=0$ 因此

$$F_3^{①}=0 \tag{a}$$

而 $F_1^{①}$ 和 $F_2^{①}$ 可由单元①的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^{①}$ 算出。已知

$$k^{①}=\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1\\ 2i_1 & 4i_1\end{bmatrix} \tag{9-25}$$

故得

$$\begin{Bmatrix}F_1^{①}\\ F_2^{①}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1\\ 2i_1 & 4i_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{Bmatrix} \tag{b}$$

式(a)和(b)可合并写成

$$\begin{Bmatrix}F_1^{①}\\ F_2^{①}\\ F_3^{①}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1 & 0\\ 2i_1 & 4i_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\end{Bmatrix} \tag{9-26}$$

记为

$$\boldsymbol{F}^{①}=\boldsymbol{K}^{①}\boldsymbol{\Delta} \tag{9-27}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^{①}=\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1 & 0\\ 2i_1 & 4i_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{9-28}$$

$\boldsymbol{K}^{①}$表示单元①对整体刚度矩阵提供的贡献，称为单元①的贡献矩阵。

其次，考虑单元②的贡献。

此时，令 $i_1=0$，力学模型如图 9－11 所示。其中，结点力 $F_1^{②}=0$，而 $F_2^{②}$ 和 $F_3^{②}$ 则由单元②的单元刚度矩阵 $k^{②}$ 算出。

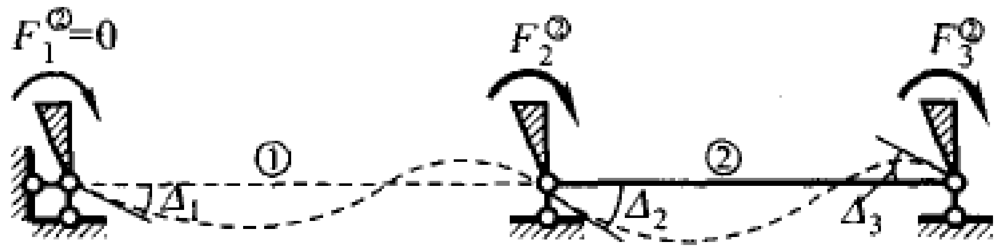


图 9－11

已知

$$k^{②}=\begin{bmatrix}4i_2 & 2i_2\\ 2i_2 & 4i_2\end{bmatrix} \tag{9-29}$$

故得

$$\begin{Bmatrix}F_1^{②}\\ F_2^{②}\\ F_3^{②}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4i_2 & 2i_2\\ 0 & 2i_2 & 4i_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\end{Bmatrix} \tag{9-30}$$

记为

$$\boldsymbol{F}^{②}=\boldsymbol{K}^{②}\boldsymbol{\Delta} \tag{9-31}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^{②}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 4i_2 & 2i_2\\0 & 2i_2 & 4i_2\end{pmatrix} \tag{9-32}$$

$\boldsymbol{K}^{②}$ 称为单元②的贡献矩阵。

可以看出，$\boldsymbol{K}^e$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的同阶矩阵。又 $\boldsymbol{K}^e$ 是由 $\boldsymbol{k}^e$ 的元素及零元素组成的矩阵。

最后，将式(9－27)和式(9－31)叠加，即得出结构的结点力 $\boldsymbol{F}$：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{①}+\boldsymbol{F}^{②}=(\boldsymbol{K}^{①}+\boldsymbol{K}^{②})\boldsymbol{\Delta} \tag{9-33}$$

由此得出整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^{①}+\boldsymbol{K}^{②}=\sum_e \boldsymbol{K}^e \tag{9-34}$$

上式表明，整体刚度矩阵为各单元贡献矩阵之和。

式(9－34)中的 $\boldsymbol{K}^{①}$ 和 $\boldsymbol{K}^{②}$ 按式(9－28)和(9－32)代入后，所得到的 $\boldsymbol{K}$ 与式(9－24)相同。因此，单元集成法与传统位移法是殊途同归的。

从以上讨论中看出，单元集成法求整体刚度矩阵的步骤可表示为

$$\boldsymbol{k}^e \xrightarrow{\text{I}} \boldsymbol{K}^e \xrightarrow{\text{II}} \boldsymbol{K} \tag{9-35}$$

这里，在单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 与整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 之间增添了一个中间环节——单元贡献矩阵 $\boldsymbol{K}^e$。单元集成法分解为两步：

第Ⅰ步——由 $\boldsymbol{k}^e$ 求 $\boldsymbol{K}^e$。

第Ⅱ步——由 $\boldsymbol{K}^e$ 求 $\boldsymbol{K}$。

第Ⅱ步按式(9－34)进行，比较简单。因此，下面将对第Ⅰ步作进一步的讨论。

2. 按照单元定位向量由 $\boldsymbol{k}^e$ 求 $\boldsymbol{K}^e$

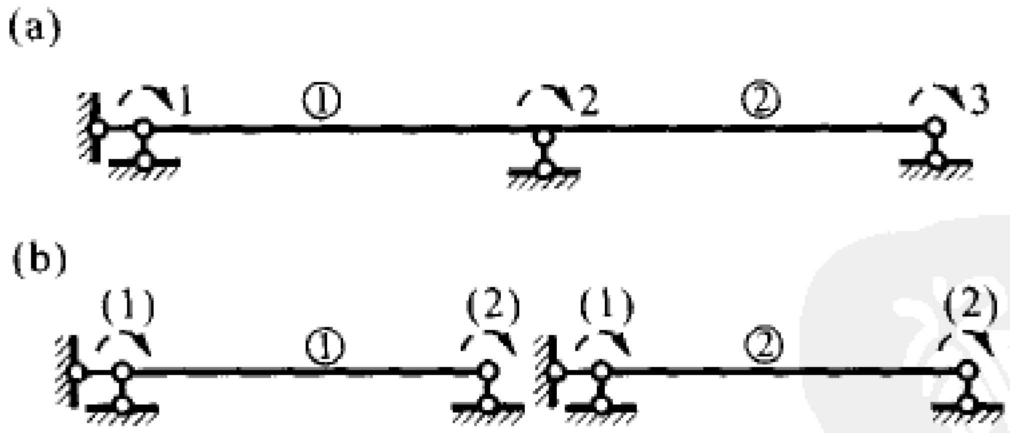


图 9－12

前已指出，$\boldsymbol{K}^e$ 是由 $\boldsymbol{k}^e$ 的元素及零元素重新排列而成的矩阵。这里，要着重讨论 $\boldsymbol{k}^e$ 的元素在 $\boldsymbol{K}^e$ 中的定位问题。

首先，要注意结点位移(或结点力)有两种编码：

在整体分析中，结点位移在结构中统一进行编码，称为总码。在图9－12a中，连续梁的结点位移统一编码为1、2、3。

在单元分析中，每个单元的两个结点位移各自编码为(1)和(2)，称为局部码(图 9-12b)。局部码加括号，使与总码相区别。

其次，要注意每个单元的结点位移分量两种编码之间的对应关系。对于图 9-12 中的单元①和②，其对应关系如下：

单元	对应关系 局部码→总码	单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$
①	(1)→1 (2)→2	$\boldsymbol{\lambda}^{①}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
②	(1)→2 (2)→3	$\boldsymbol{\lambda}^{②}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

由单元的结点位移总码组成的向量称为"单元定位向量"，记为 $\boldsymbol{\lambda}^e$。单元①和②的定位向量也在上表中给出。单元两种编码的对应关系即由单元定位向量来表示。因此，单元定位向量也可称为"单元换码向量"。

第三，要注意单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 和单元贡献矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 中元素的排列方式。

在 $\boldsymbol{k}^e$ 中——元素按局部码排列，或者说，元素按局部码"对号入座"。

在 $\boldsymbol{K}^e$ 中——元素按总码排列，或者说，元素按总码"对号入座"。

为了由单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 得出单元贡献矩阵 $\boldsymbol{K}^e$，其作法可概括为"换码重排座"：

	在单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 中	在单元贡献矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 中	
换码	元素的原行码(i) 原列码(j)	换成新行码 λ_i 新列码 λ_j	$(i)\rightarrow\lambda_i$ $(j)\rightarrow\lambda_j$
重排座	原排在(i)行(j)列的元素	改排在 λ_i 行 λ_j 列	$k^e_{(i)(j)}\rightarrow K^e_{\lambda_i\lambda_j}$

应当指出，换码和重排座，都是根据单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$ 进行的。

现按上述作法，由 $\boldsymbol{k}^{①}$，$\boldsymbol{k}^{②}$ 得出 $\boldsymbol{K}^{①}$，$\boldsymbol{K}^{②}$ 如下：

上表换码重排座中得出的 $\boldsymbol{K}^{①}$，$\boldsymbol{K}^{②}$ 就是式(9-28)、(9-32)的结果。

总之，由 $\boldsymbol{k}^e$ 求 $\boldsymbol{K}^e$ 的问题实质上就是 $\boldsymbol{k}^e$ 中的元素在 $\boldsymbol{K}^e$ 中如何定位的问题。定位规则是

$$k^e_{(i)(j)}\longrightarrow K^e_{\lambda_i\lambda_j} \tag{9-36}$$

即根据单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$ 将元素 $k^e_{(i)(j)}$ 定在 $\boldsymbol{K}^e$ 中 λ_i 行 λ_j 列的位置上。

单 元	单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$	单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$	单元贡献矩阵 $\boldsymbol{K}^e$
①	$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}(1) & (2)\end{array} \\ \begin{array}{c}(1)\\(2)\end{array} & \begin{pmatrix}4i_1 & 2i_1\\ 2i_1 & 4i_1\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}(1)\downarrow 1 & (2)\downarrow 2 & 3\end{array} \\ \begin{array}{c}(1)\to 1\\(2)\to 2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1 & 0\\ 2i_1 & 4i_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$
②	$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}(1) & (2)\end{array} \\ \begin{array}{c}(1)\\(2)\end{array} & \begin{pmatrix}4i_2 & 2i_2\\ 2i_2 & 4i_2\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}1 & (1)\downarrow 2 & (2)\downarrow 3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\(1)\to 2\\(2)\to 3\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 4i_2 & 2i_2\\ 0 & 2i_2 & 4i_2\end{bmatrix}\end{array}$

3．单元集成法的实施方案

在式(9－35)中，将单元集成法分解为两步：第Ⅰ步是将 $\boldsymbol{k}^e$ 中的元素按照单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$ 在 $\boldsymbol{K}^e$ 中定位，第Ⅱ步是将各 $\boldsymbol{K}^e$ 中的元素累加。这样做的目的是为了便于理解。

在单元集成法的实施方案中，将两步合成一步，采用“边定位”、“边累加”的办法，由 $\boldsymbol{k}^e$ 直接形成 $\boldsymbol{K}$。这样，作的目的是为了使计算程序更为简洁。

详细地说，按照单元集成法形成 $\boldsymbol{K}$ 的过程就是依次将每个 $\boldsymbol{k}^e$ 的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中按 $\boldsymbol{\lambda}^e$ 定位并进行累加的过程。过程的每一步骤可列出如下：

(1) 先将 $\boldsymbol{K}$ 置零，这时 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{0}$。

(2) 将 $\boldsymbol{k}^{①}$ 的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中按 $\boldsymbol{\lambda}^{①}$ 定位并进行累加，这时 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^{①}$。

(3) 将 $\boldsymbol{k}^{②}$ 的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中按 $\boldsymbol{\lambda}^{②}$ 定位并进行累加，这时 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^{①}+\boldsymbol{K}^{②}$。

按以上作法对所有单元循环一遍，最后即得到 $\boldsymbol{K}=\sum_e \boldsymbol{K}^e$。

现以图 9－8a 所示连续梁为例，说明上述过程：

将 $\boldsymbol{k}^{①}$ 集成后，得到阶段结果如下：

$$\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1 & 0\\ 2i_1 & 4i_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

在此基础上再将 $\boldsymbol{k}^{②}$ 集成，即得最终结果如下：

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+(4i_2) & (2i_2) \\ 0 & (2i_2) & (4i_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}$$

此结果即为式(9-24)。

例 9-2　试求图 9-13a 所示连续梁的整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。

解　(1) 结点位移分量的总码

此连续梁有三个结点位移分量,即转角 Δ_1、Δ_2、Δ_3(图 9-13b),其总码分别编为 1、2、3。

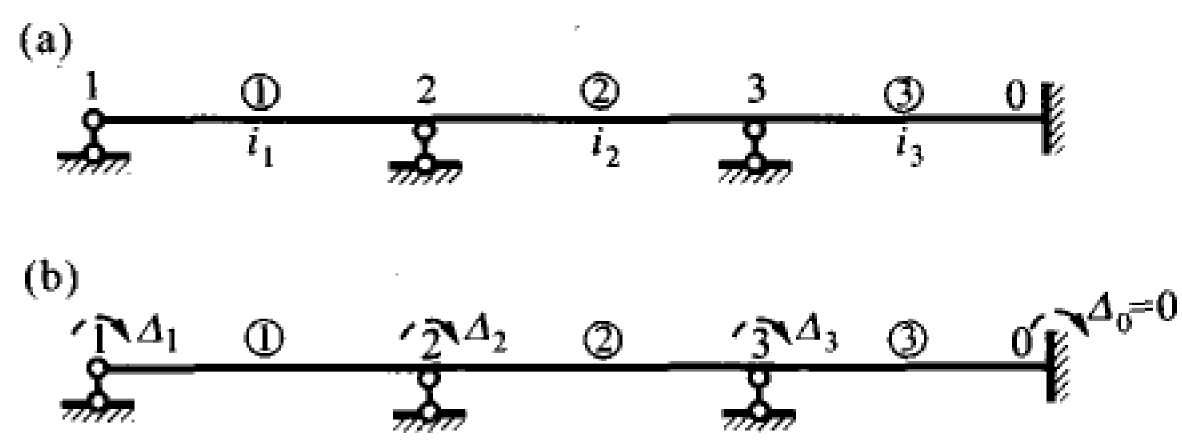


图　9-13

在固定端处的结点位移分量为零。我们规定:凡是给定为零值的结点位移分量,其总码均编为零。

(2) 各单元的定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$

单元①、②、③的定位向量可由图 9-13b 得出如下:

$$\boldsymbol{\lambda}^{①} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}^{②} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}^{③} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

(3) 单元集成过程

在下表中给出按照单元①、②、③的次序进行集成的过程及相应的阶段结果和最终结果。

单　元	单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$	按单元定位向量换码	集成过程中的阶段结果
①	$\begin{matrix} & (1) & (2) \\ (1) & 4i_1 & 2i_1 \\ (2) & 2i_1 & 4i_1 \end{matrix}$	(1)→1 (2)→2	$\begin{matrix} & (1) & (2) & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & 1 & 2 & 3 \\ (1)\to 1 & 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ (2)\to 2 & 2i_1 & 4i_1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

续表

单　元	单元刚度矩阵 k^e	按单元定位向量换码	集成过程中的阶段结果
②	$\begin{matrix} & (1) & (2) \\ (1) & 4i_2 & 2i_2 \\ (2) & 2i_2 & 4i_2 \end{matrix}$	(1)→2 (2)→3	$\begin{matrix} & & (1) & (2) \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ (1)\to 2 & 2i_1 & 4i_1+(4i_2) & (2i_2) \\ (2)\to 3 & 0 & (2i_2) & (4i_2) \end{matrix}$
③	$\begin{matrix} & (1) & (2) \\ (1) & 4i_3 & 2i_3 \\ (2) & 2i_3 & 4i_3 \end{matrix}$	(1)→3 (2)→0	$\boxed{(2)\to 0}$ $\begin{matrix} & & & (1) \\ & & & \downarrow \\ & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2 & 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ (1)\to 3 & 0 & 2i_2 & 4i_2+(4i_3) \end{matrix} = \boldsymbol{K}$

注意，在上表中，当对单元③进行集成时，出现如下的换码情况：

$$(2)\longrightarrow 0$$

这里，局部码(2)对应的总码为0。这表明在 $\boldsymbol{k}^{③}$ 中的(2)行或(2)列元素在 $\boldsymbol{K}$ 中应定位在0行或0列上，即它们在 $\boldsymbol{K}$ 中没有座位，在集成过程中应当舍弃，不予考虑。这种作法的力学解释是：单元③在固定端处的结点位移分量本来是零，其相应的单元刚度系数对整体刚度系数本来就没有影响，故在集成过程中应将它们摒除在外。

4. 整体刚度矩阵的性质

(1) 整体刚度系数的意义

$\boldsymbol{K}$ 中的元素 K_{ij} 称为整体刚度系数。它表示当第 j 个结点位移分量 $\Delta_j=1$（其他结点位移分量为零）时所产生的第 i 个结点力 F_i。

(2) $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵。

(3) 按本节方法计算连续梁时，$\boldsymbol{K}$ 是可逆矩阵。

关于“可逆性”可说明如下。可逆与否，是由反问题的性质确定的。这里的反问题是由结点力 $\boldsymbol{F}$ 来推算结点位移 $\boldsymbol{\Delta}$。以图9-8a所示连续梁为例，反问题的力学模型如图9-14所示。由于这是一个几何不变体系，因此当 $\boldsymbol{F}$ 指定为任

意值时，均可求得 $\boldsymbol{\Delta}$ 的唯一解，故知 $\boldsymbol{K}^{-1}$ 是存在的。

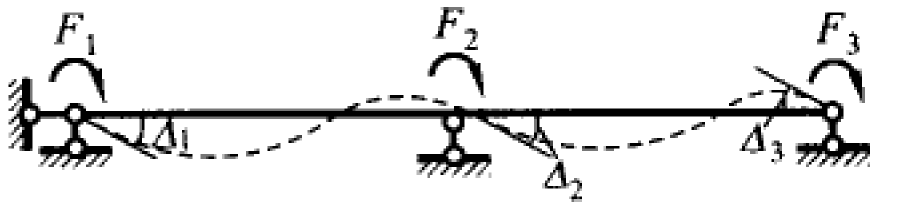


图　9－14

(4) $\boldsymbol{K}$ 是稀疏矩阵和带状矩阵

对于图 9－15 所示 n 跨连续梁，不难导出其整体刚度方程如下：

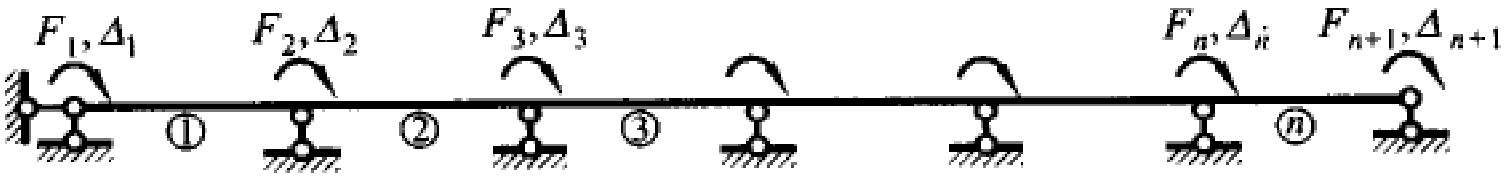


图　9－15

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ \\ F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 & 0 & & & \\ 2i_1 & 4(i_1+i_2) & 2i_2 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 2i_2 & 4(i_2+i_3) & 2i_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & & \\ & & & & 2i_{n-1} & 4(i_{n-1}+i_n) & 2i_n \\ & & & & 0 & 2i_n & 4i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \\ \Delta_n \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix} \tag{9-37}$$

由此可看出，整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 有许多零元素，故为稀疏矩阵。又非零元素都分布在以主对角线为中线的倾斜带状区域内，故 $\boldsymbol{K}$ 为带状矩阵。

§9－5　刚架的整体刚度矩阵

本节讨论用单元集成法求平面刚架的整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。

与前节的连续梁相比，基本思路相同，但情况要复杂一些。

基本思路相同。其要点仍旧是：$\boldsymbol{K}$ 由 $\boldsymbol{k}^e$ 直接集成；集成包括将 $\boldsymbol{k}^e$ 的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中定位和累加两个环节；定位是依据单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$ 进行的。

情况的复杂性表现在下列几个方面：

在一般情况下要考虑刚架中各杆的轴向变形，而忽略杆件轴向变形的情况则作为特例来处理；

刚架中每个结点的位移分量要增加到三个：角位移和两个方向的线位移；

刚架中各杆方向不尽相同，在整体分析中需采用整体坐标；

刚架中除刚结点外，还要考虑铰结点等其他情况。

1．结点位移分量的统一编码——总码

每个结点位移的编码按 u、v、θ 顺序，逐个结点给以统一编码。例如，例9－1平面刚架（图9－16a），结点 A 有三个位移分量：沿 x 和 y 方向的线位移 u_A 和 v_A，角位移 θ_A。它们的总码编为（1　2　3）。结点 B 为固定端，三个位移分量 u_B，v_B，θ_B 已知为零，其总码编为（0　0　0）。结点 C 为铰支承，其线位移 u_C 和 v_C 已知为零，角位移 θ_C 为未知量，它们的总码编为（0　0　4）。这里，仍采用如下规定：对于已知为零的结点位移分量，其总码均编为0。

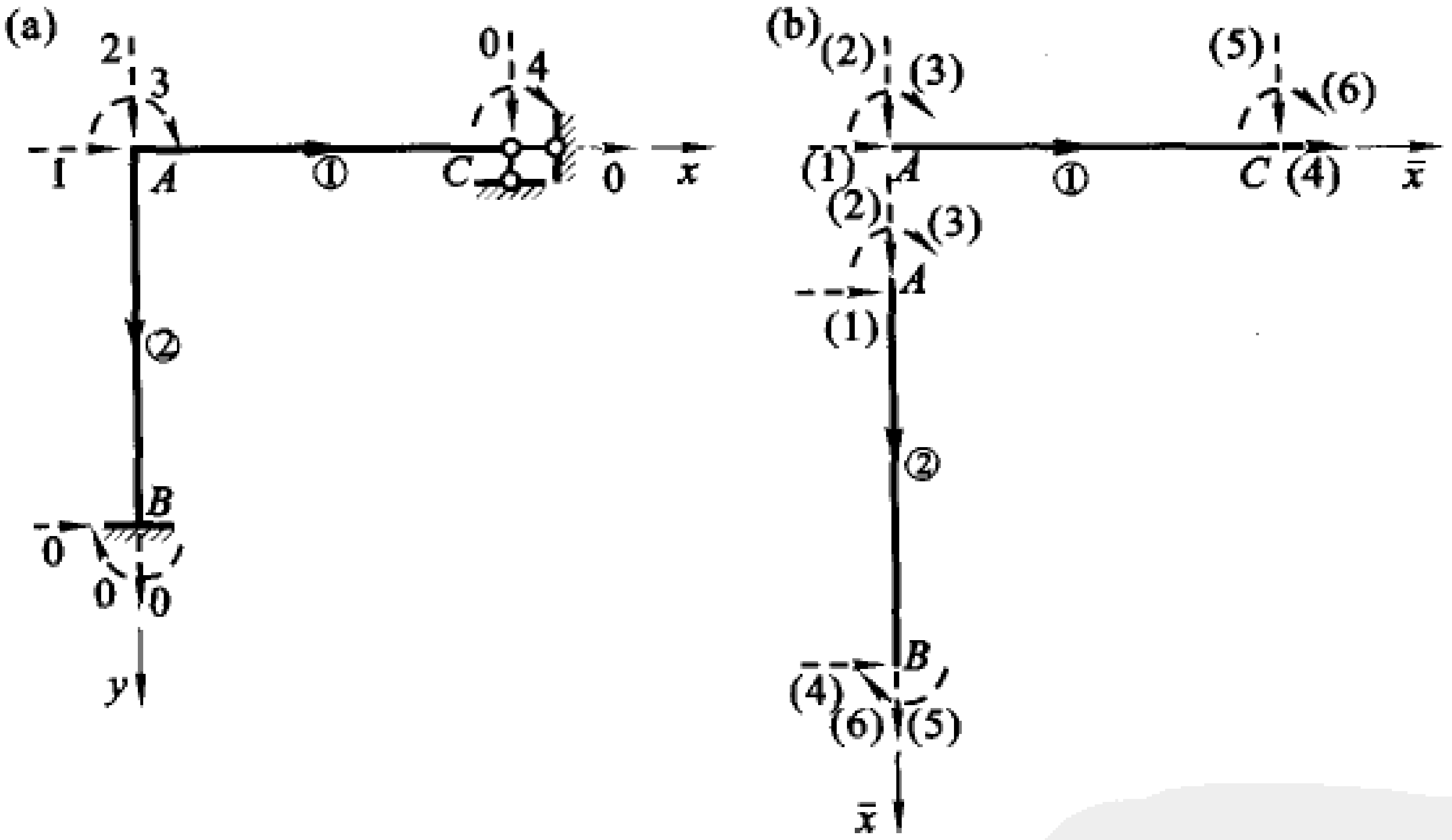


图　9－16

此刚架共有四个未知结点位移分量，它们组成整体结构的结点位移向量 $\boldsymbol{\Delta}$：

$$\boldsymbol{\Delta}=(\Delta_1\quad \Delta_2\quad \Delta_3\quad \Delta_4)^{\mathrm{T}}$$
$$=(u_A\quad v_A\quad \theta_A\quad \theta_C)^{\mathrm{T}}$$

相应的结点力向量为

$$\boldsymbol{F}=(F_1\quad F_2\quad F_3\quad F_4)^{\mathrm{T}}$$

2．单元定位向量

此刚架有两个杆件单元①、②。图中各杆轴上的箭头表示各杆局部坐标系

中 x 轴的正方向。单元在始末两端的六个位移分量的局部码(1),(2),…,(6)在图 9－16b 中已标明。

在下表中对每个单元给出了单元结点位移分量局部码与总码之间的对应关系,还给出了各单元的定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$。单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$ 就是由单元结点位移总码组成的向量。以后进行单元换码时即以它作为依据。

单　元　①		单　元　②	
局部码→总码	单元定位向量	局部码→总码	单元定位向量
(1)→1 (2)→2 (3)→3 (4)→0 (5)→0 (6)→4	$\boldsymbol{\lambda}^{①}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\\0\\4\end{pmatrix}$	(1)→1 (2)→2 (3)→3 (4)→0 (5)→0 (6)→0	$\boldsymbol{\lambda}^{②}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

3. 单元集成过程

下面按单元①、②的次序进行集成。

首先,考虑单元①:

在整体坐标系中单元①的刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^{①}$ 在例 9－1 中已给出:

$$\boldsymbol{k}^{①}=\begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & 300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 & -300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 \\ (2) & 0 & 12\ \mathrm{kN/m} & 30\ \mathrm{kN} & 0 & -12\ \mathrm{kN/m} & 30\ \mathrm{kN} \\ (3) & 0 & 30\ \mathrm{kN} & 100\ \mathrm{kN\cdot m} & 0 & -30\ \mathrm{kN} & 50\ \mathrm{kN\cdot m} \\ (4) & -300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 & 300\ \mathrm{kN/m} & 0 & 0 \\ (5) & 0 & -12\ \mathrm{kN/m} & -30\ \mathrm{kN} & 0 & 12\ \mathrm{kN/m} & -30\ \mathrm{kN} \\ (6) & 0 & 30\ \mathrm{kN} & 50\ \mathrm{kN\cdot m} & 0 & -30\ \mathrm{kN} & 100\ \mathrm{kN\cdot m} \end{matrix}\times 10^4 \tag{9-38}$$

根据上表中的单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^{①}$ 及其换码关系,将 $\boldsymbol{k}^{①}$ 中的(i)行(j)列元素在 $\boldsymbol{K}$ 中定位于 λ_i 行 λ_j 列,即得 $\boldsymbol{K}$ 的阶段结果如下(注意,由于局部码(4)和(5)对应的总码都是零,因此 $\boldsymbol{K}^{①}$ 的第(4)、(5)行和第(4)、(5)列各元素在 $\boldsymbol{K}$ 中都没有座位):

$\boldsymbol{K}$ 的阶段结果 =

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ (1)\longrightarrow 1 \\ (2)\longrightarrow 2 \\ (3)\longrightarrow 3 \\ (6)\longrightarrow 4 \end{array}\begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (6) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 300\ \text{kN/m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\ \text{kN/m} & 30\ \text{kN} & 30\ \text{kN} \\ 0 & 30\ \text{kN} & 100\ \text{kN}\cdot\text{m} & 50\ \text{kN}\cdot\text{m} \\ 0 & 30\ \text{kN} & 50\ \text{kN}\cdot\text{m} & 100\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{array}\right] \times 10^4 \end{array} \tag{9-39}$$

其次，考虑单元②：

$\boldsymbol{k}^{②}$ 由例 9－1 得出如下：

$\boldsymbol{k}^{②}$ =

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 12\ \text{kN/m} & 0 & -30\ \text{kN} & -12\ \text{kN/m} & 0 & -30\ \text{kN} \\ 0 & 300\ \text{kN/m} & 0 & 0 & -300\ \text{kN/m} & 0 \\ -30\ \text{kN} & 0 & 100\ \text{kN}\cdot\text{m} & 30\ \text{kN} & 0 & 50\ \text{kN}\cdot\text{m} \\ -12\ \text{kN/m} & 0 & 30\ \text{kN} & 12\ \text{kN/m} & 0 & 30\ \text{kN} \\ 0 & -300\text{kN/m} & 0 & 0 & 300\ \text{kN/m} & 0 \\ -30\ \text{kN} & 0 & 50\ \text{kN}\cdot\text{m} & 30\ \text{kN} & 0 & 100\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{array}\right] \times 10^4 \end{array} \tag{9-40}$$

按照单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^{②}$ 将 $\boldsymbol{k}^{②}$ 中的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中定位并与前阶段结果累加，即得 $\boldsymbol{K}$ 的最后结果如下（$\boldsymbol{k}^{②}$ 中的(4)、(5)、(6)各行各列元素在 $\boldsymbol{K}$ 中均无座位）：

$\boldsymbol{K}$ =

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ (1)\rightarrow 1 \\ (2)\rightarrow 2 \\ (3)\rightarrow 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[\begin{array}{cccc} [300+(12)]\ \text{kN/m} & 0+(0) & [0+(-30)]\ \text{kN} & 0 \\ 0+(0) & [12+(300)]\ \text{kN/m} & [30+(0)]\ \text{kN} & 30\ \text{kN} \\ [0+(-30)]\ \text{kN} & [30+(0)]\ \text{kN} & [100+(100)]\ \text{kN}\cdot\text{m} & 50\ \text{kN}\cdot\text{m} \\ 0 & 30\ \text{kN} & 50\ \text{kN}\cdot\text{m} & 100\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{array}\right] \times 10^4 \end{array} \tag{9-41}$$

4. 铰结点的处理

图 9－17 所示为具有铰结点的刚架。现指出与铰结点有关的一些处理手法。

首先，考虑结点位移分量的统一编码：

按照前述作法，在固定端 B 或 D 处，三个位移分量的总码编为(0　0　0)。在刚结点 A 处，编码为(1　2　3)。

应注意，铰结点处的两杆杆端结点应看作半独立的两个结点(C_1 和 C_2)：它们的线位移相同(不独立)，而角位移不同(独立)。因此，它们的线位移应采用同码，而角位移则采用异码。例如，结点 C_1 的总码可编为(4　5　6)，而 C_2 则为(4　5　7)。

其次，考虑单元定位向量：

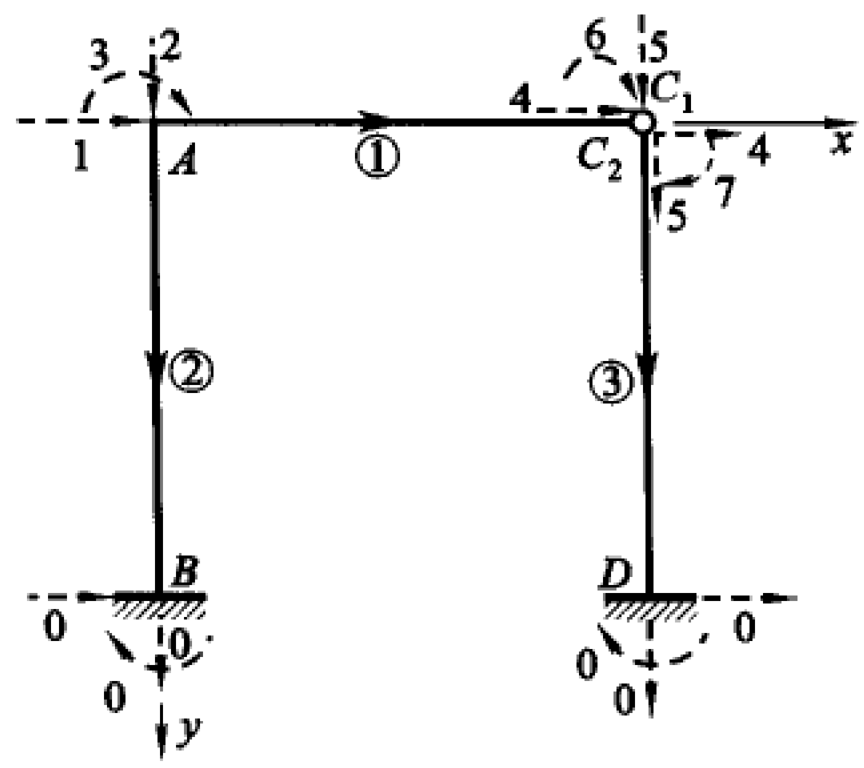


图　9－17

在图 9－17 中，单元①、②、③的 $\bar{x}$ 轴正方向用箭头标明。各杆的单元定位向量可由图直接写出如下：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^{①}&=(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{②}&=(1\quad 2\quad 3\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{③}&=(4\quad 5\quad 7\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\tag{9-42}$$

最后，按①、②、③的次序进行单元集成。

设刚架中各杆的尺寸相同(即例 9－1 中各杆的尺寸)。

首先，考虑单元①：

$\boldsymbol{k}^{①}$ 在式(9－38)中已给出。根据式(9－42)中 $\boldsymbol{\lambda}^{①}$ 进行定位，即 $\boldsymbol{K}^{①}$ 的第一阶段结果，见式(9－43)。

	(1)→1	(2)→2	(3)→3	(4)→4	(5)→5	(6)→6	7
(1)→1	300	0	0	−300	0	0	0
(2)→2	0	12	30	0	−12	30	0
(3)→3	0	30	100	0	−30	50	0
(4)→4	−300	0	0	300	0	0	0
(5)→5	0	−12	−30	0	12	−30	0
(6)→6	0	30	50	0	−30	100	0
7	0	0	0	0	0	0	0

$\times 10^4$

(9－43)

其次,考虑单元②:

$\boldsymbol{k}^{②}$在式(9－40)中已给出。将其中的元素按$\boldsymbol{\lambda}^{②}$在$\boldsymbol{K}$中定位并与前阶段结果累加,即得$\boldsymbol{K}$的第二阶段结果,见式(9－44)。

	(1)→1	(2)→2	(3)→3	4	5	6	7
(1)→1	300+(12)	0+(0)	0+(−30)	−300	0	0	0
(2)→2	0+(0)	12+(300)	30+(0)	0	−12	30	0
(3)→3	0+(−30)	30+(0)	100+(100)	0	−30	50	0
4	−300	0	0	300	0	0	0
5	0	−12	−30	0	12	−30	0
6	0	30	50	0	−30	100	0
7	0	0	0	0	0	0	0

× 1[illegible]

(9－44)

最后，考虑单元③：

$k^{③}$与$k^{②}$相同。由$\lambda^{③}$即得K的最后结果，见式(9－45)。

	1	2	3	(1)↓4	(2)↓5	6	(3)↓7
1	312	0	－30	－300	0	0	0
2	0	312	30	0	－12	30	0
3	－30	30	200	0	－30	50	0
(1)→4	－300	0	0	300＋(12)	0＋(0)	0	0＋(－30)
(2)→5	0	－12	－30	0＋(0)	12＋(300)	－30	0＋(0)
6	0	30	50	0	－30	100	0
(3)→7	0	0	0	0＋(－30)	0＋(0)	0	0＋(100)

$\times 10^4$

(9－45)

以上式(9－43)、(9－44)、(9－45)中各物理量是有单位的，这里只是表示单元集成的过程，故式中未标单位。

§9－6　等效结点荷载

1．位移法基本方程

前两节讨论了结构的整体刚度矩阵K，建立了整体刚度方程

$$F = K\Delta \tag{9-46}$$

整体刚度方程(9－46)是根据原结构的位移法基本体系建立的，它表示由结点位移Δ推算结点力(即在基本体系的附加约束中引起的约束力)F的关系式。它只反映结构的刚度性质，而不涉及到原结构上作用的实际荷载。它并不是用以分析原结构的位移法基本方程。

为了建立位移法基本方程，现回顾一下§7－5中的推导方法，分别考虑位移法基本体系的两种状态：

(1) 设荷载单独作用(结点位移 $\boldsymbol{\Delta}$ 设为零)——此时在基本结构中引起的结点约束力,记为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$。

(2) 设结点位移 $\boldsymbol{\Delta}$ 单独作用(荷载设为零)——此时在基本结构中引起的结点约束力为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}$。

位移法基本方程应为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{0}$$

即

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{0} \tag{9-47}$$

2. 等效结点荷载的概念

原来的荷载可以是非结点荷载,或是结点荷载,或是二者的组合。现在将原来的荷载换成与之等效的结点荷载。等效的原则是要求这两种荷载在基本结构中产生相同的结点约束力。也就是说,如果原来荷载在基本结构中引起的结点约束力记为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$,则等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$①在基本结构中引起的结点约束力也应为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$。由此即可得出如下结论:

$$\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}} \tag{9-48}$$

将式(9-48)代入式(9-47),则位移法基本方程可写为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{P} \tag{9-49}$$

由式(9-46)和式(9-49)可知,如果把刚度方程(9-46)中的结点约束力 $\boldsymbol{F}$ 换成等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$,即得到位移法基本方程(9-49)。

3. 按单元集成法求整体结构的等效结点荷载

(1) 单元的等效结点荷载 $\overline{\boldsymbol{P}}^{e}$(局部坐标系)

先考虑局部坐标系。在单元两端加上六个附加约束,使两端固定。在给定荷载作用下,可求出六个固端约束力,它们组成固端约束力向量 $\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{e}$:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{e}=(\overline{F}_{xP1}\quad \overline{F}_{yP1}\quad \overline{M}_{P1}\quad \overline{F}_{xP2}\quad \overline{F}_{yP2}\quad \overline{M}_{P2})^{\mathrm{T}} \tag{9-50}$$

在表9-1中给出了几种典型荷载所引起的固端约束力。将固端约束力 $\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{e}$ 反号,即得到单元等效结点荷载 $\overline{\boldsymbol{P}}^{e}$(局部坐标系):

$$\overline{\boldsymbol{P}}^{e}=-\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{e} \tag{9-51}$$

(2) 单元的等效结点荷载 $\boldsymbol{P}^{e}$(整体坐标系)

现考虑整体坐标系。由坐标转换公式(9-17),得

$$\boldsymbol{P}^{e}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}^{e} \tag{9-52}$$

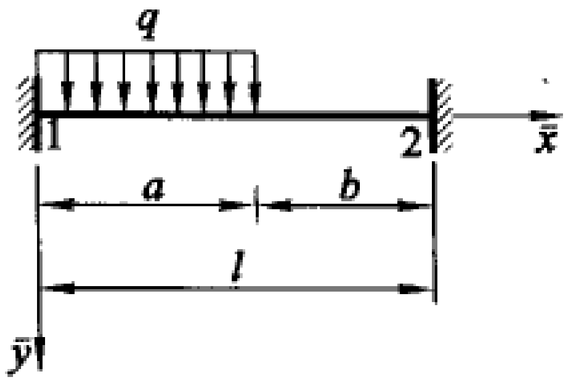
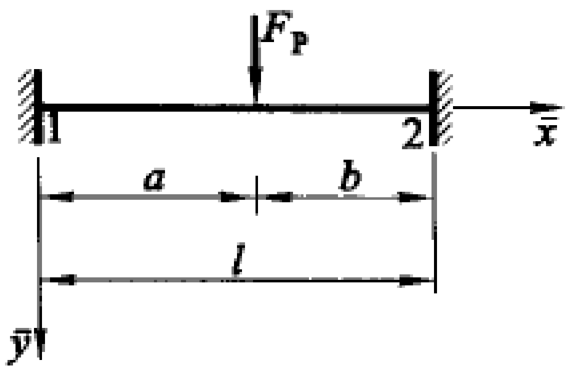
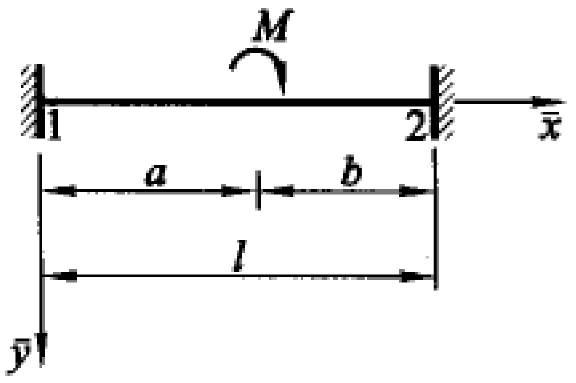
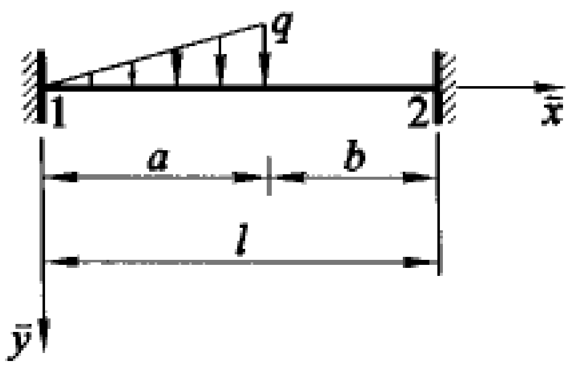
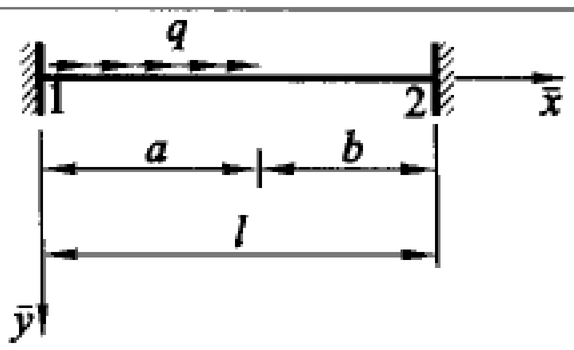
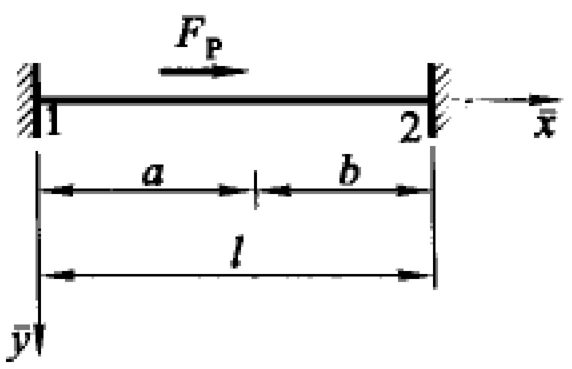
(3) 整体结构的等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$

依次将每个 $\boldsymbol{P}^{e}$ 中的元素按单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^{e}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 中进行定位并累加,最后即得到 $\boldsymbol{P}$。

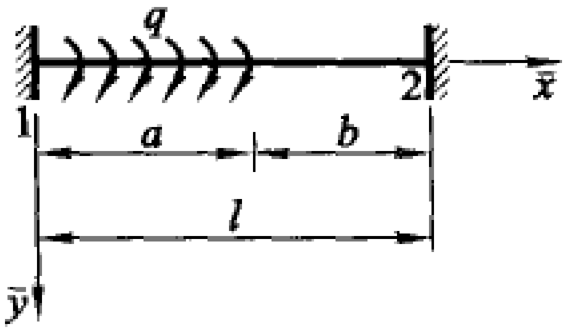
---

① 等效结点荷载也可以是广义力,故仍沿用以往教材中的有关符号 P 表示。下同。

表 9-1 单元固端约束力 $\bar{F}_P^e$(局部坐标系)

	荷载简图	符号	始 端 1	末 端 2
1		$\bar{F}_{xP}$	0	0
		$\bar{F}_{yP}$	$-qa\left(1-\frac{a^2}{l^2}+\frac{a^3}{2l^3}\right)$	$-q\frac{a^3}{l^2}\left(1-\frac{a}{2l}\right)$
		$\bar{M}_P$	$-\frac{qa^2}{12}\left(6-8\frac{a}{l}+3\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qa^3}{12l}\left(4-3\frac{a}{l}\right)$
2		$\bar{F}_{xP}$	0	0
		$\bar{F}_{yP}$	$-F_P\frac{b^2}{l^2}\left(1+2\frac{a}{l}\right)$	$-F_P\frac{a^2}{l^2}\left(1+2\frac{b}{l}\right)$
		$\bar{M}_P$	$-F_P\frac{ab^2}{l^2}$	$F_P\frac{a^2b}{l^2}$
3		$\bar{F}_{xP}$	0	0
		$\bar{F}_{yP}$	$\frac{6Mab}{l^3}$	$-\frac{6Mab}{l^3}$
		$\bar{M}_P$	$M\frac{b}{l}\left(2-3\frac{b}{l}\right)$	$M\frac{a}{l}\left(2-3\frac{a}{l}\right)$
4		$\bar{F}_{xP}$	0	0
		$\bar{F}_{yP}$	$-q\frac{a}{4}\left(2-3\frac{a^2}{l^2}+1.6\frac{a^3}{l^3}\right)$	$-\frac{q}{4}\frac{a^3}{l^2}\left(3-1.6\frac{a}{l}\right)$
		$\bar{M}_P$	$-q\frac{a^2}{6}\left(2-3\frac{a}{l}+1.2\frac{a^2}{l^2}\right)$	$\frac{qa^3}{4l}\left(1-0.8\frac{a}{l}\right)$
5		$\bar{F}_{xP}$	$-qa\left(1-0.5\frac{a}{l}\right)$	$-0.5q\frac{a^2}{l}$
		$\bar{F}_{yP}$	0	0
		$\bar{M}_P$	0	0
6		$\bar{F}_{xP}$	$-F_P\frac{b}{l}$	$-F_P\frac{a}{l}$
		$\bar{F}_{yP}$	0	0
		$\bar{M}_P$	0	0

续表

	荷载简图	符号	始 端 1	末 端 2
7		$F_{\bar{x}P}$	0	0
		$F_{\bar{y}P}$	$q\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{a}{l}+3\frac{b}{l}\right)$	$-q\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{a}{l}+3\frac{b}{l}\right)$
		M_P	$-q\frac{b^2}{l^2}a$	$q\frac{a^2}{l^2}b$

例 9－3 试求图 9－16a 所示刚架在图 9－18 给定荷载作用下的等效结点荷载向量 $\boldsymbol{P}$。

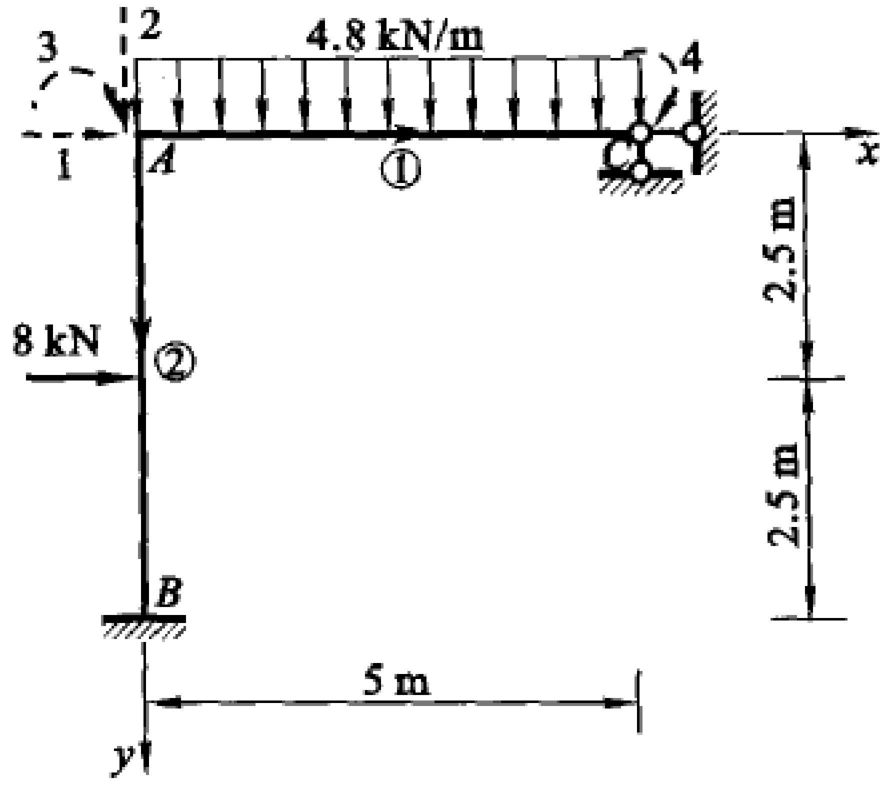


图 9－18

解 （1）求局部坐标系中的固端约束力 $\bar{\boldsymbol{F}}_P^e$

单元①：由表 9－1 第 1 行，$q=4.8$ kN/m，$a=l=5$ m，得

$$\begin{cases}\bar{F}_{xP1}=0,\\ \bar{F}_{yP1}=-12\ \text{kN},\\ \bar{M}_{P1}=-10\ \text{kN}\cdot\text{m},\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{F}_{xP2}=0\\ \bar{F}_{yP2}=-12\ \text{kN}\\ \bar{M}_{P2}=10\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{cases}$$

单元②：由表 9－1 第 2 行，$F_P=-8$ kN，$a=b=2.5$ m，得

$$\begin{cases}\bar{F}_{xP1}=0,\\ \bar{F}_{yP1}=4\ \text{kN},\\ \bar{M}_{P1}=5\ \text{kN}\cdot\text{m},\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{F}_{xP2}=0\\ \bar{F}_{yP2}=4\ \text{kN}\\ \bar{M}_{P2}=-5\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{cases}$$

因此

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{①}=\left\{\begin{array}{c}0\\-12\ \mathrm{kN}\\-10\ \mathrm{kN\cdot m}\\\hline 0\\-12\ \mathrm{kN}\\10\ \mathrm{kN\cdot m}\end{array}\right\},\quad \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{②}=\left\{\begin{array}{c}0\\4\ \mathrm{kN}\\5\ \mathrm{kN\cdot m}\\\hline 0\\4\ \mathrm{kN}\\-5\ \mathrm{kN\cdot m}\end{array}\right\}$$

(2) 求各单元在整体坐标系中的等效结点荷载 $\boldsymbol{P}^{e}$

单元①、②的倾角分别为 $\alpha_1=0°,\alpha_2=90°$。由式(9－51)和(9－52)得

$$\boldsymbol{P}^{①}=-\boldsymbol{T}^{①\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{①}=-\boldsymbol{I}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{①}=-\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{①}=\left\{\begin{array}{c}0\\12\ \mathrm{kN}\\10\ \mathrm{kN\cdot m}\\\hline 0\\12\ \mathrm{kN}\\-10\ \mathrm{kN\cdot m}\end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{P}^{②}=-\boldsymbol{T}^{②\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{②}=-\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}0\\4\ \mathrm{kN}\\5\ \mathrm{kN\cdot m}\\\hline 0\\4\ \mathrm{kN}\\-5\ \mathrm{kN\cdot m}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}4\ \mathrm{kN}\\0\\-5\ \mathrm{kN\cdot m}\\\hline 4\ \mathrm{kN}\\0\\5\ \mathrm{kN\cdot m}\end{array}\right\}$$

(3) 求刚架的等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$

两个单元的结点局部码和总码如图 9－16 所示。总码在图 9－18 中用虚线重新示出。单元定位向量已知为

$$\boldsymbol{\lambda}^{①}=\left\{\begin{array}{c}1\\2\\3\\\hline 0\\0\\4\end{array}\right\},\quad \boldsymbol{\lambda}^{②}=\left\{\begin{array}{c}1\\2\\3\\\hline 0\\0\\0\end{array}\right\}$$

将 $\boldsymbol{P}^{e}$ 中的元素，按 $\boldsymbol{\lambda}^{e}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 中进行定位并累加即可得出 $\boldsymbol{P}$。

首先，考虑单元①：

$\boldsymbol{P}$ 的阶段结果为[(4)、(5)行元素在 $\boldsymbol{P}$ 中无座位]

$$\begin{matrix}(1)\to 1\\(2)\to 2\\(3)\to 3\\(6)\to 4\end{matrix}\begin{Bmatrix}0\\12\ \text{kN}\\10\ \text{kN}\cdot\text{m}\\-10\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{Bmatrix}$$

其次,考虑单元②:

$$\boldsymbol{P}=\begin{matrix}(1)\to 1\\(2)\to 2\\(3)\to 3\\4\end{matrix}\begin{Bmatrix}[0+(4)]\ \text{kN}\\ [12+(0)]\ \text{kN}\\ [10+(-5)]\ \text{kN}\cdot\text{m}\\ -10\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\ \text{kN}\\12\ \text{kN}\\5\ \text{kN}\cdot\text{m}\\-10\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{Bmatrix}$$

§9-7　计算步骤和算例

用矩阵位移法计算平面刚架的步骤如下:

(1) 整理原始数据,对单元和刚架进行局部编码和总体编码。

(2) 形成局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$,用式(9-6)。

(3) 形成整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$,用式(9-21)。

(4) 用单元集成法形成整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$,参见式(9-35)。

(5) 求局部坐标系的单元等效结点荷载 $\bar{\boldsymbol{P}}^e$,转换成整体坐标系的单元等效结点荷载 $\boldsymbol{P}^e$,用式(9-51)和式(9-52);用单元集成法形成整体结构的等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$。

(6) 解方程 $\boldsymbol{K\Delta}=\boldsymbol{P}$,求出结点位移 $\boldsymbol{\Delta}$。

(7) 求各杆的杆端内力 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$,用下面的式(9-53)。

各杆的杆端内力是由两部分组成:

一部分是在结点位移被约束住的条件下的杆端内力,即各杆的固端约束力 $\bar{\boldsymbol{F}}_{\text{P}}^e$。

另一部分是刚架在等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$ 作用下的杆端内力,可由式(9-5)求出。

将两部分内力叠加,即得

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e=\bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e+\bar{\boldsymbol{F}}_{\text{P}}^e \tag{9-53}$$

例9-4　试求图9-19a所示刚架的内力。设各杆为矩形截面,横梁 $b_2\cdot h_2=0.5\ \text{m}\times1.26\ \text{m}$,立柱 $b_1\cdot h_1=0.5\ \text{m}\times1\ \text{m}$。

解　(1) 原始数据及编码

原始数据计算如下(为了计算上的方便,设 $E=1$①)。

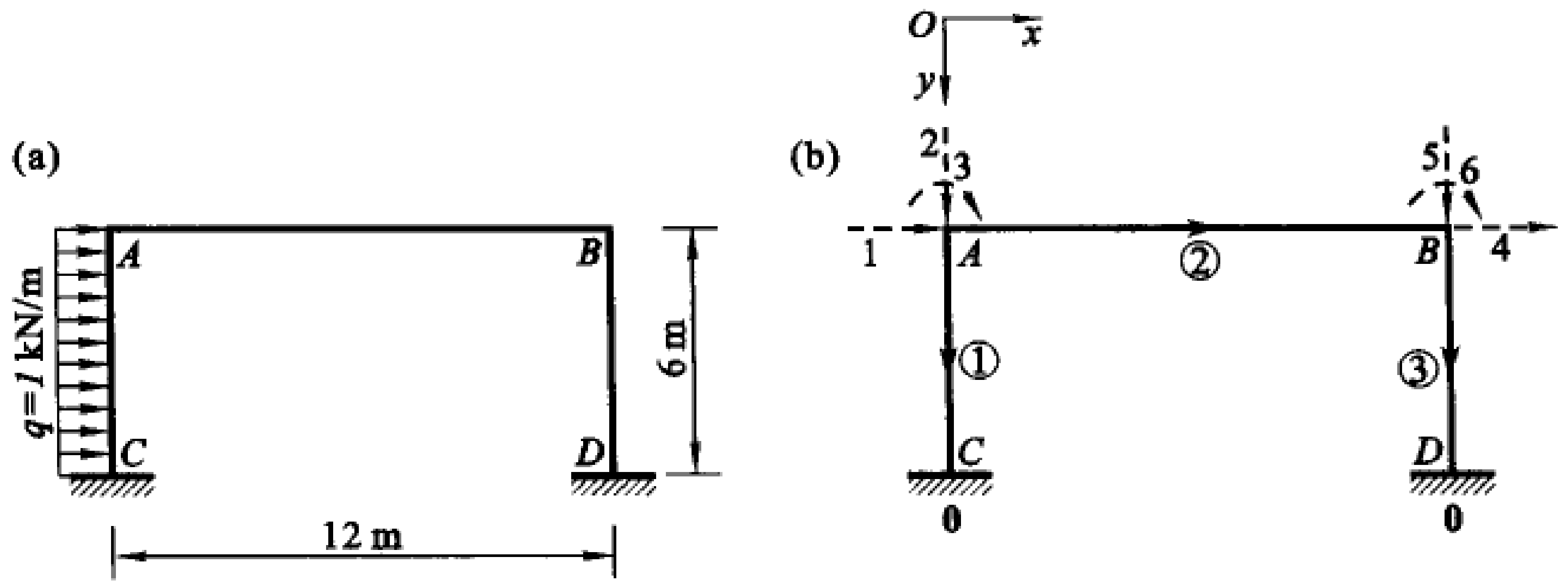


图　9－19

柱:
$$A_1=0.5\ \text{m}^2,\quad I_1=\frac{1}{24}\text{m}^4$$
$$l_1=6\ \text{m},\quad \frac{EI_1}{l_1}=6.94\times10^{-3}$$
$$\frac{EA_1}{l_1}=83.3\times10^{-3},\quad \frac{2EI_1}{l_1}=13.9\times10^{-3}$$
$$\frac{4EI_1}{l_1}=27.8\times10^{-3},\quad \frac{6EI_1}{l_1^2}=6.94\times10^{-3}$$
$$\frac{12EI_1}{l_1^3}=2.31\times10^{-3}$$

梁:
$$A_2=0.63\ \text{m}^2,\quad I_2=\frac{1}{12}\ \text{m}^4,\ l_2=12\ \text{m}$$
$$\frac{EA_2}{l_2}=52.5\times10^{-3},\quad \frac{EI_2}{l_2}=6.94\times10^{-3}$$
$$\frac{2EI_2}{l_2}=13.9\times10^{-3},\quad \frac{4EI_2}{l_2}=27.8\times10^{-3}$$
$$\frac{6EI_2}{l_2^2}=3.47\times10^{-3},\quad \frac{12EI_2}{l_2^3}=0.58\times10^{-3}$$

单元编码示于图 9－19b,局部坐标用箭头的方向表示。整体坐标和结点位移分量的统一编码亦示于图 9－19b。

结点 C 和 D 为固定端,三个位移分量都为零,用 **0** 编码。结点 A 的编码为(1　2　3),结点 B 的编码为(4　5　6)。

(2) 形成局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$

单元①和③:

---

① 本例设 $E=1$,没有用真值,故运算过程中不再注明单位。

$$\bar{k}^{①} = \bar{k}^{③} = 10^{-3} \times \left(\begin{array}{ccc:ccc} 83.3 & 0 & 0 & -83.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 6.94 & 0 & -2.31 & 6.94 \\ 0 & 6.94 & 27.8 & 0 & -6.94 & 13.9 \\ \hdashline -83.3 & 0 & 0 & 83.3 & 0 & 0 \\ 0 & -2.31 & -6.94 & 0 & 2.31 & -6.94 \\ 0 & 6.94 & 13.9 & 0 & -6.94 & 27.8 \end{array}\right)$$

单元②：

$$\bar{k}^{②} = 10^{-3} \times \left(\begin{array}{ccc:ccc} 52.5 & 0 & 0 & -52.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.58 & 3.47 & 0 & -0.58 & 3.47 \\ 0 & 3.47 & 27.8 & 0 & -3.47 & 13.9 \\ \hdashline -52.5 & 0 & 0 & 52.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.58 & -3.47 & 0 & 0.58 & -3.47 \\ 0 & 3.47 & 13.9 & 0 & -3.47 & 27.8 \end{array}\right)$$

(3) 计算整体坐标系中的单元刚度矩阵 k^e

单元①和③的坐标转换矩阵为($\alpha = 90°$)

$$T = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hdashline & & & 0 & 1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$k^{①} = k^{③} = T^{T}\bar{k}^{①}T = 10^{-3} \times \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2.31 & 0 & -6.94 & -2.31 & 0 & -6.94 \\ 0 & 83.3 & 0 & 0 & -83.3 & 0 \\ -6.94 & 0 & 27.8 & 6.94 & 0 & 13.9 \\ \hdashline -2.31 & 0 & 6.94 & 2.31 & 0 & 6.94 \\ 0 & -83.3 & 0 & 0 & 83.3 & 0 \\ -6.94 & 0 & 13.9 & 6.94 & 0 & 27.8 \end{array}\right)$$

单元②：$\alpha = 0°, T = I$

$$k^{②} = \bar{k}^{②}$$

(4) 用单元集成法形成整体刚度矩阵 K

由图 9－19b 中单元局部编码与结点位移统一编码的关系，各杆的单元定位向量可写出如下：

$$\lambda^{①} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{T}$$
$$\lambda^{②} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)^{T}$$
$$\lambda^{③} = (4 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{T}$$

按照单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$，依次将各单元 $\boldsymbol{k}^e$ 中的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中定位并累加，最后得到 $\boldsymbol{K}$ 如下：

$$\boldsymbol{K}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc:ccc}54.81&0&-6.94&-52.5&0&0\\0&83.88&3.47&0&-0.58&3.47\\-6.94&3.47&55.6&0&-3.47&13.9\\ \hdashline -52.5&0&0&54.81&0&-6.94\\0&-0.58&-3.47&0&83.88&-3.47\\0&3.47&13.9&-6.94&-3.47&55.6\end{array}\right]\end{array}\times10^{-3}$$

(5) 求等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$

首先，求单元固端约束力 $\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^e$：

只有单元①有 $\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{①}$，

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{①}=\left(\begin{array}{c}0\\3\\3\\ \hdashline 0\\3\\-3\end{array}\right)$$

其次，求单元在整体坐标系中的等效结点荷载 $\boldsymbol{P}^e$：

单元①的倾角 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，由式(9-51)和(9-52)

$$\boldsymbol{P}^{①}=-\boldsymbol{T}^{①\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{①}=-\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&-1&0&&&\\1&0&0&&\boldsymbol{0}&\\0&0&1&&&\\ \hdashline &&&0&-1&0\\&\boldsymbol{0}&&1&0&0\\&&&0&0&1\end{array}\right]\left(\begin{array}{c}0\\3\\3\\ \hdashline 0\\3\\-3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}3\\0\\-3\\ \hdashline 3\\0\\3\end{array}\right)$$

按单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^{①}=(1\quad2\quad3\quad0\quad0\quad0)^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{P}^{①}$ 中的元素在 $\boldsymbol{P}$ 中定位，得

$$\boldsymbol{P}=\left(\begin{array}{c}3\\0\\-3\\ \hdashline 0\\0\\0\end{array}\right)$$

(6) 解基本方程

$$10^{-3}\times\begin{pmatrix} 54.81 & 0 & -6.94 & -52.5 & 0 & 0 \\ 0 & 83.88 & 3.47 & 0 & -0.58 & 3.47 \\ -6.94 & 3.47 & 55.6 & 0 & -3.47 & 13.9 \\ -52.5 & 0 & 0 & 54.81 & 0 & -6.94 \\ 0 & -0.58 & -3.47 & 0 & 83.88 & -3.47 \\ 0 & 3.47 & 13.9 & -6.94 & -3.47 & 55.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求得

$$\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 847 \\ -5.13 \\ 28.4 \\ 824 \\ 5.13 \\ 96.5 \end{pmatrix}$$

(7) 求各杆杆端力 $\overline{\boldsymbol{F}}^e$

单元①:先求 $\boldsymbol{F}^{①}$,然后求 $\overline{\boldsymbol{F}}^{①}$。

$\boldsymbol{F}^{①}=\boldsymbol{k}^{①}\boldsymbol{\Delta}^{①}+\boldsymbol{F}_P^{①}$

$$=10^{-3}\times\begin{pmatrix} 2.31 & 0 & -6.94 & -2.31 & 0 & -6.94 \\ 0 & 83.3 & 0 & 0 & -83.3 & 0 \\ -6.94 & 0 & 27.8 & 6.94 & 0 & 13.9 \\ -2.31 & 0 & 6.94 & 2.31 & 0 & 6.94 \\ 0 & -83.3 & 0 & 0 & 83.3 & 0 \\ -6.94 & 0 & 13.9 & 6.94 & 0 & 27.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 847 \\ -5.13 \\ 28.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1.24 \\ -0.43 \\ -2.09 \\ -4.76 \\ 0.43 \\ -8.49 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}^{①}=TF^{①}\begin{pmatrix}-0.43\\1.24\\-2.09\\ \hdashline 0.43\\4.76\\-8.49\end{pmatrix}$$

单元②：

$$\bar{F}^{②}=F^{②}=k^{②}\Delta^{②}=10^{-3}\times\left(\begin{array}{ccc:ccc}52.5&0&0&-52.5&0&0\\0&0.58&3.47&0&-0.58&3.47\\0&3.47&27.8&0&-3.47&13.9\\ \hdashline -52.5&0&0&52.5&0&0\\0&-0.58&-3.47&0&0.58&-3.47\\0&3.47&13.9&0&-3.47&27.8\end{array}\right)\times$$

$$\begin{pmatrix}847\\-5.13\\28.4\\ \hdashline 824\\5.13\\96.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.24\\0.43\\2.09\\ \hdashline -1.24\\-0.43\\3.04\end{pmatrix}$$

单元③：$F^{③}=k^{③}\Delta^{③}=$

$$10^{-3}\times\left(\begin{array}{ccc:ccc}2.31&0&-6.94&-2.31&0&-6.94\\0&83.3&0&0&-83.3&0\\-6.94&0&27.8&6.94&0&13.9\\ \hdashline -2.31&0&6.94&2.31&0&6.94\\0&-83.3&0&0&83.3&0\\-6.94&0&13.9&6.94&0&27.8\end{array}\right)\begin{pmatrix}824\\5.13\\96.5\\ \hdashline 0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.24\\0.43\\-3.04\\ \hdashline -1.24\\-0.43\\-4.38\end{pmatrix}$$

$$\bar{F}^{③}=TF^{③}=\begin{pmatrix}0.43\\-1.24\\-3.04\\ \hdashline -0.43\\1.24\\-4.38\end{pmatrix}$$

(8) 根据杆端力绘制内力图，如图 9-20a、b、c 所示。

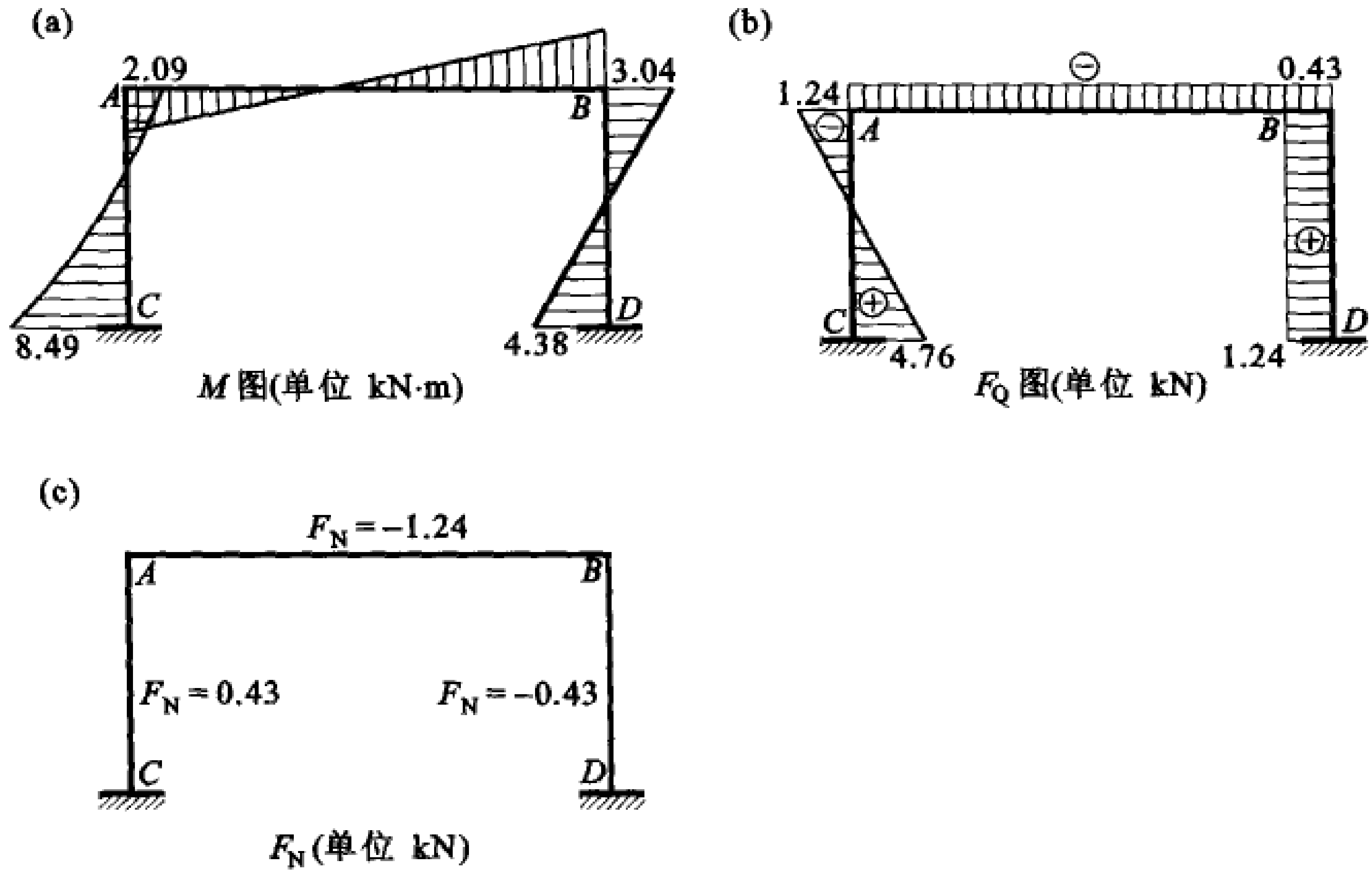


图 9-20

§9-8 忽略轴向变形时矩形刚架的整体分析

工程中常遇到由横梁竖柱组成的矩形刚架,通常轴向变形的影响很小,可以忽略不计。本节指出这种刚架整体分析的一些处理手法。

以图9-21所示矩形刚架为例进行说明。

首先,考虑结点位移分量的统一编码:

在固定端 B 和 D 处,三个位移分量都为零,总码编为(0 0 0)。因为忽略轴向变形的影响,在刚结点 A 处,在铰结点 C_1 和 C_2 处,竖向位移分量都为零,故其编码也应为零码。此外,因为忽略轴向变形影响,结点 A、C_1 和 C_2 的水平位移分量都相等,因此它们的线位移应采用同码。所以,结点 A 的总码编为(1 0

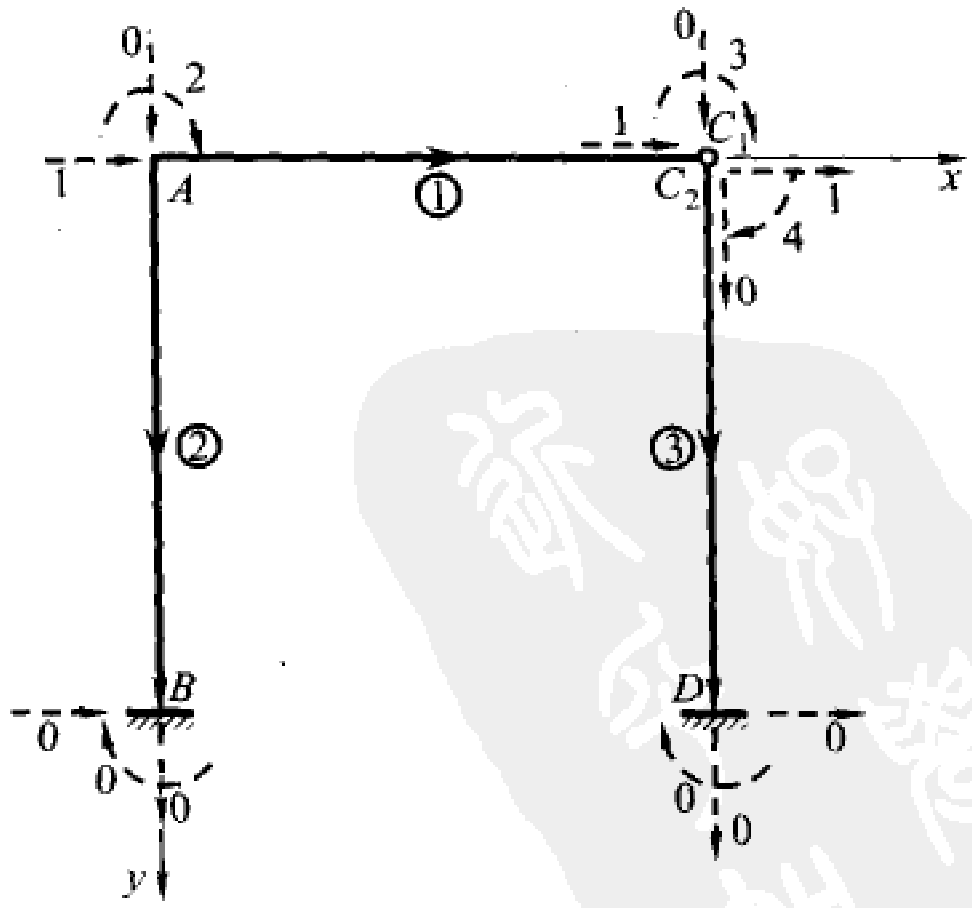


图 9-21

2)，结点 C_1 的总码编为(1　0　3)，结点 C_2 的总码编为(1　0　4)。

其次，考虑单元定位向量：

在图 9－21 中，单元①、②、③的 $\bar{x}$ 轴正方向用箭头标明。各杆的单元定位向量可由图直接写出如下：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^{①}&=(1\quad 0\quad 2\quad 1\quad 0\quad 3)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{②}&=(1\quad 0\quad 2\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\lambda}^{③}&=(1\quad 0\quad 4\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

最后，按单元①、②、③的次序进行单元集成。

设刚架中各杆尺寸相同，均采用例 9－1 中各杆的尺寸。

首先，考虑单元①：

$\boldsymbol{k}^{①}$ 在式(9－38)中已给出。根据式(a)中的 $\boldsymbol{\lambda}^{①}$ 进行定位，即得 $\boldsymbol{K}$ 的第一阶段结果如下：

	(1)、(4) ↓ 1	(3) ↓ 2	(6) ↓ 3	4
(1)、(4)→1	300 − 300 − 300 + 300	0 + 0	0 + 0	0
(3)→2	0	100	50	0
(6)→3	0	50	100	0
4	0	0	0	0

$\times 10^4$

其次，考虑单元②：

$\boldsymbol{k}^{②}$ 在式(9－40)中已给出。将其中的元素按 $\boldsymbol{\lambda}^{②}$ 在 $\boldsymbol{K}$ 中定位并与前阶段结果累加，即得 $\boldsymbol{K}$ 的第二阶段结果如下：

	(1) ↓ 1	(3) ↓ 2	3	4
(1)→1	0 + (12)	(− 30)	0	0
(3)→2	(− 30)	100 + (100)	50	0
3	0	50	100	0
4	0	0	0	0

$\times 10^4$

最后，考虑单元③：

$\boldsymbol{k}^{③}$ 与 $\boldsymbol{k}^{①}$ 相同。由 $\boldsymbol{\lambda}^{③}$ 即得 $\boldsymbol{K}$ 的最后结果如下：

	(1)↓ 1	2	3	(3)↓ 4
(1)→1	12 + (12)	−30	0	(−30)
2	−30	200	50	0
3	0	50	100	0
(3)→4	(−30)	0	0	(100)

$\times 10^4 = \boldsymbol{K}$

例 9−5 试求图 9−19a 所示刚架的内力，截面尺寸同例 9−4。忽略轴向变形的影响。

解 (1) 原始数据及编码

原始数据同例 9−4。

单元编码及结点位移分量的统一编码示于图 9−22。

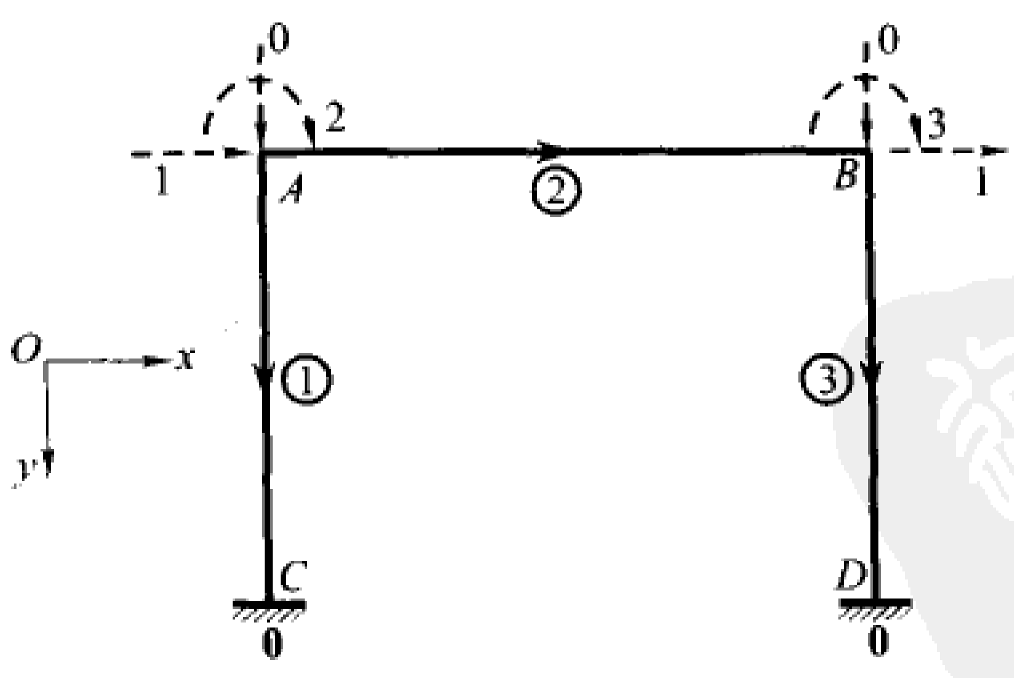


图 9−22

除结点 C 和 D 为固定端，用 **0** 编码外、结点 A 和 B 的竖向位移均为零，用 0 编码。结点 A 和 B 的水平位移相同，编码同为 1。

(2) 形成局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^{e}$

(3) 计算整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^{e}$

以上两步结果同例 9−4。

(4) 用单元集成法形成整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$

由图 9－22 中单元局部编码与结点位移统一编码的对应关系，各杆的单元定位向量可写出如下：

$$\boldsymbol{\lambda}^{①}=(1\quad 0\quad 2\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\lambda}^{②}=(1\quad 0\quad 2\quad 1\quad 0\quad 3)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\lambda}^{③}=(1\quad 0\quad 3\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$$

按照单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^{e}$，依次将各单元 $\boldsymbol{k}^{e}$ 中的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中定位并累加，最后得到 $\boldsymbol{K}$ 如下：

$$\boldsymbol{K}=10^{-3}\times\begin{pmatrix}4.62 & -6.94 & -6.94\\ -6.94 & 55.6 & 13.9\\ -6.94 & 13.9 & 55.6\end{pmatrix}$$

(5) 求等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$

单元在整体坐标系中的等效结点荷载 $\boldsymbol{P}^{①}$，同例 9－4。

按单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^{①}=(1\quad 0\quad 2\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{P}$ 中的元素在 $\boldsymbol{P}$ 中定位，得

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$$

(6) 解基本方程

$$10^{-3}\times\begin{pmatrix}4.62 & -6.94 & -6.94\\ -6.94 & 55.6 & 13.9\\ -6.94 & 13.9 & 55.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_A\\ \theta_A\\ \theta_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$$

求得

$$\begin{pmatrix}u_A\\ \theta_A\\ \theta_B\end{pmatrix}=10^{3}\times\begin{pmatrix}0.838\\ 0.026\ 1\\ 0.097\ 9\end{pmatrix}$$

(7) 求各杆杆端力 $\overline{\boldsymbol{F}}^{e}$

单元①：

$$\boldsymbol{F}^{①}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2.31 & 0 & -6.94 & -2.31 & 0 & -6.94\\ 0 & 83.3 & 0 & 0 & -83.3 & 0\\ -6.94 & 0 & 27.8 & 6.94 & 0 & 13.9\\ \hline -2.31 & 0 & 6.94 & 2.31 & 0 & 6.94\\ 0 & -83.3 & 0 & 0 & 83.3 & 0\\ -6.94 & 0 & 13.9 & 6.94 & 0 & 27.8\end{array}\right)\begin{pmatrix}0.838\\ 0\\ 0.026\ 1\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+$$

$$\begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ \hline -3 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.25 \\ 0 \\ -2.09 \\ \hline -4.75 \\ 0 \\ -8.41 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{①} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{①} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.25 \\ -2.09 \\ \hline 0 \\ 4.75 \\ -8.41 \end{Bmatrix}$$

单元②：

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{②} = \boldsymbol{F}^{②} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 52.5 & 0 & 0 & -52.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.58 & 3.47 & 0 & -0.58 & 3.47 \\ 0 & 3.47 & 27.8 & 0 & -3.47 & 13.9 \\ \hline -52.5 & 0 & 0 & 52.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.58 & -3.47 & 0 & 0.58 & -3.47 \\ 0 & 3.47 & 13.9 & 0 & -3.47 & 27.8 \end{array}\right] \times$$

$$\begin{Bmatrix} 0.838 \\ 0 \\ 0.026\,1 \\ \hline 0.838 \\ 0 \\ 0.097\,9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.43 \\ 2.09 \\ \hline 0 \\ -0.43 \\ 3.09 \end{Bmatrix}$$

单元③：

$$\boldsymbol{F}^{③} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2.31 & 0 & -6.94 & -2.31 & 0 & -6.94 \\ 0 & 83.3 & 0 & 0 & -83.3 & 0 \\ -6.94 & 0 & 27.8 & 6.94 & 0 & 13.9 \\ \hline -2.31 & 0 & 6.94 & 2.31 & 0 & 6.94 \\ 0 & -83.3 & 0 & 0 & 83.3 & 0 \\ -6.94 & 0 & 13.9 & 6.94 & 0 & 27.8 \end{array}\right] \times$$

$$
\begin{Bmatrix} 0.838 \\ 0 \\ 0.097\,9 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.25 \\ 0 \\ -3.09 \\ \hdashline -1.25 \\ 0 \\ -4.47 \end{Bmatrix}
$$

$$
\overline{\boldsymbol{F}}^{③} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{③} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.25 \\ -3.09 \\ \hdashline 0 \\ 1.25 \\ -4.47 \end{Bmatrix}
$$

(8) 根据杆端弯矩和剪力绘制 M 图和 F_Q 图

M 图和 F_Q 图如图 9－23a、b 所示。与图 9－20 相比,可见轴向变形的影响不大。

由于假设杆件的轴向变形为零,因此根据刚度方程求出的杆端轴力为零。图 9－23c 中的 F_N 图是根据平衡条件由 F_Q 图得出的。

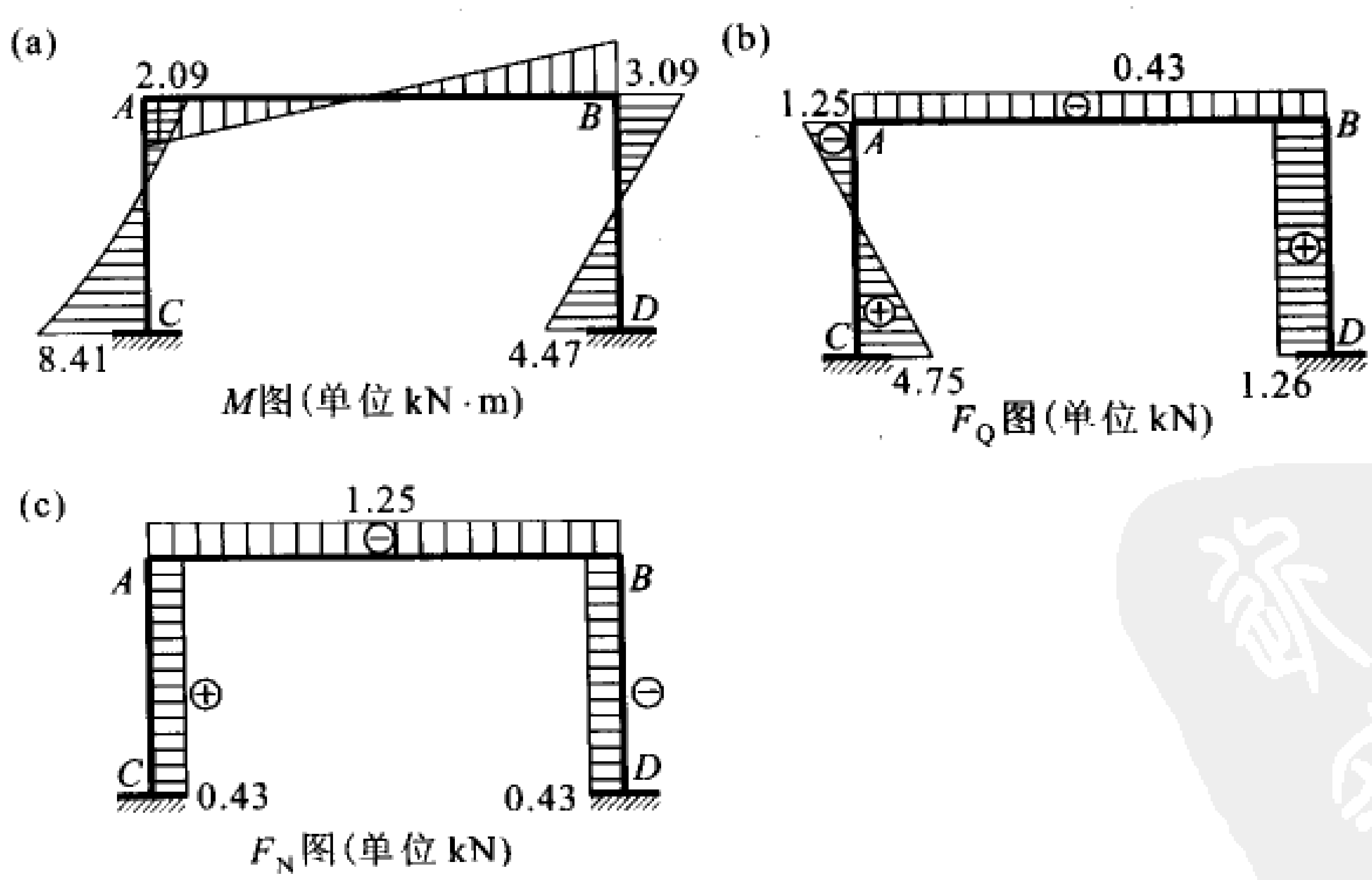


图　9－23

§9-9 桁架及组合结构的整体分析

1. 桁架

桁架单元的刚度方程(局部坐标系,图 9-24)已在式(9-2)中给出,其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\bar{F}_{x1}\\ \bar{F}_{x2}\end{pmatrix}^e=\begin{pmatrix}\dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l}\\ -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{u}_2\end{pmatrix}^e \tag{a}$$

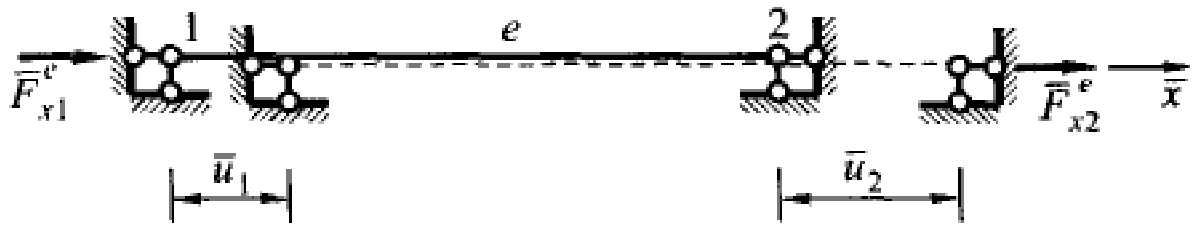


图 9-24

上式也是一般单元刚度方程式(9-4)的一个特殊情况,即由式(9-4)中删去第(2)、(3)、(5)、(6)行和列后自动得出。

对于斜杆单元,其轴力和轴向位移在整体坐标系中将有沿 x 轴和 y 轴的两个分量。因此,整体坐标系中的杆端力向量和杆端位移向量为(图 9-25)

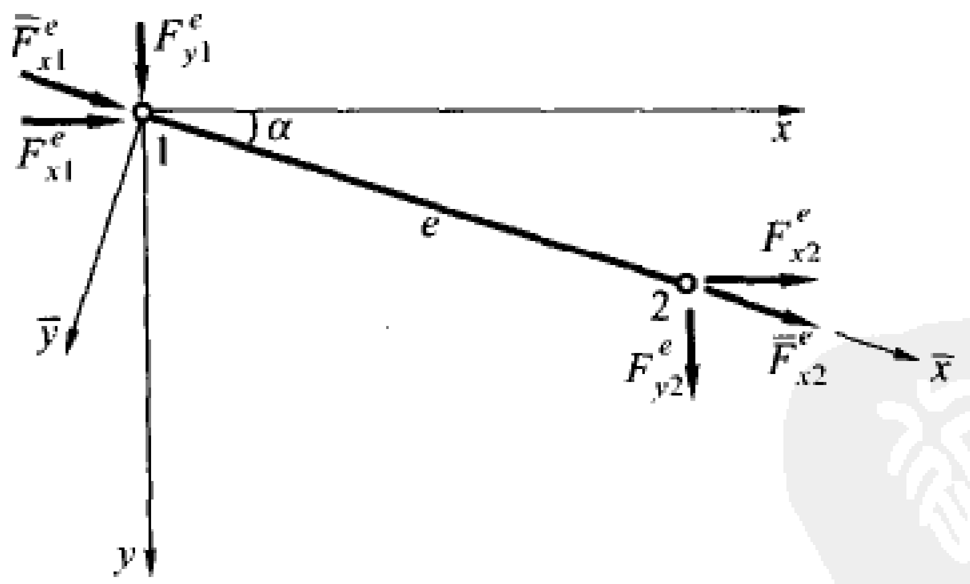


图 9-25

$$\boldsymbol{F}^e=\begin{pmatrix}F_{x1}\\ F_{y1}\\ \hdashline F_{x2}\\ F_{y2}\end{pmatrix}^e,\quad \boldsymbol{\Delta}^e=\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\\ \hdashline u_2\\ v_2\end{pmatrix}^e$$

可以从图 9-25 导出局部坐标系和整体坐标系中杆端力向量和杆端位移向量间的转换关系,我们不再进行这样的推导。§9-3 中对一般单元导出的转换关系具有一般性。桁架单元是一般单元的一个特殊情况,只需按照桁架单元的特点,把§9-3 中的坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 修改一下,则§9-3 中的其他转换公式均可应用。

为了便于利用以前的坐标转换关系,先将局部坐标系中的单元刚度方程(a)扩大为四阶的形式:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \hline \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \end{Bmatrix}^{e} = \frac{EA}{l} \times \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \hline \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}^{e} \tag{9-54}$$

这里,在 $\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$ 和 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$ 中引入了 $\bar{v}_1$、$\bar{v}_2$ 和 $\bar{F}_{y1}$、$\bar{F}_{y2}$,在 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 中添上了相应的零元素。式(9-54)与式(a)是等价的。

式(9-12)是一般单元杆端力的转换式。对于桁架单元,由于 $\bar{M}_1 = M_1 = 0, \bar{M}_2 = M_2 = 0$,所以,删去坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$[式(9-14)]中相应的行和列,便得到桁架单元的坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 如下:

$$\boldsymbol{T} = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}} \\ \hline & & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{0}} & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right] \tag{9-55}$$

单元集成法求整体刚度矩阵的步骤仍为式(9-35)。编码时应注意,桁架单元的结点转角不是基本未知量。

例 9-6 试求图 9-26a 所示桁架的内力①。各杆 EA 相同。

解 (1)单元和结点位移分量的统一编码如图 9-26b 所示。

结点 A 和 B 为铰支承,两个位移分量都为零,用 **0** 编码。结点 C 的编码为(1 2),结点 D 的编码为(3 4)。

单元的局部坐标用箭头方向表示,示于图 9-26b 中。整体坐标示于图 9-26a 中。

(2)形成局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$

① 本例 EA 没有真值,故运算过程中不再注明单位。

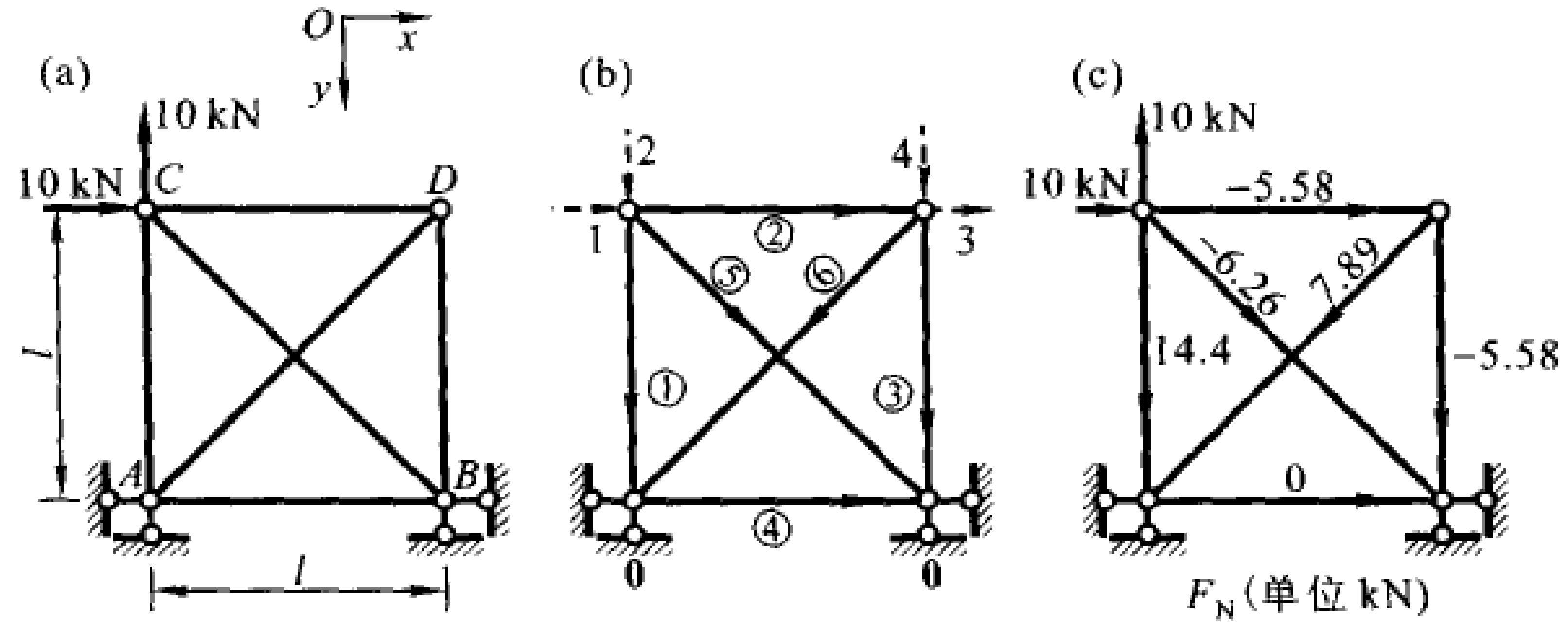


图　9-26

按四阶方阵的形式[式(9－54)]形成各单元在局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$。

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{①}=\bar{\boldsymbol{k}}^{②}=\bar{\boldsymbol{k}}^{③}=\bar{\boldsymbol{k}}^{④}=\frac{EA}{l}\times\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{⑤}=\bar{\boldsymbol{k}}^{⑥}=\frac{EA}{\sqrt{2}l}\times\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(3) 形成整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$

单元①和单元③：$\alpha=\frac{\pi}{2}$。由式(9－55)

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \boldsymbol{0}\\ & & 0 & 1\\ \boldsymbol{0} & & -1 & 0\end{pmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{k}^{①}=\boldsymbol{k}^{③}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^{①}\boldsymbol{T}=\frac{EA}{l}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

单元②和单元④：$\alpha=0°$，得

$$k^{②} = k^{④} = \frac{EA}{l} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

单元⑤：$\alpha = \frac{\pi}{4}$，由式(9－55)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \mathbf{0} \\ & & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k^{⑤} = T^{\mathrm{T}} \bar{k}^{⑤} T = \frac{EA}{l} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

单元⑥：$\alpha = \frac{3\pi}{4}$，由式(9－55)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & \mathbf{0} \\ & & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

得

$$k^{⑥} = T^{\mathrm{T}} \bar{k}^{⑥} T = \frac{EA}{l} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) 用单元集成法形成整体刚度矩阵 **K**

由图 9－26b，各杆的单元定位向量可写出如下：

$$\lambda^{①} = (1 \quad 2 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$
$$\lambda^{②} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)^{\mathrm{T}}$$
$$\lambda^{③} = (3 \quad 4 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$
$$\lambda^{④} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$
$$\lambda^{⑤} = (1 \quad 2 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$
$$\lambda^{⑥} = (3 \quad 4 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$$

按照单元定位向量 λ^{e}，将各单元 k^{e} 中的元素在 **K** 中定位，并与前阶段结果累

加，最后得到 $\boldsymbol{K}$ 如下：

$$\boldsymbol{K}=\begin{matrix} \\ 1\\2\\3\\4\end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix}1 & \quad\quad 2 & \quad\quad 3 & \quad\quad 4\end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc:cc} 1.35 & 0.35 & -1 & 0 \\ 0.35 & 1.35 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1.35 & -0.35 \\ 0 & 0 & -0.35 & 1.35 \end{array}\right)\end{matrix}\frac{EA}{l}$$

(5) 结点荷载 $\boldsymbol{P}$

由图 9－26a 和 b，$\boldsymbol{P}$ 可直接写出如下：

$$\boldsymbol{P}=\left(\begin{array}{r} 10 \\ -10 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

(6) 解基本方程

$$\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc:cc} 1.35 & 0.35 & -1 & 0 \\ 0.35 & 1.35 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1.35 & -0.35 \\ 0 & 0 & -0.35 & 1.35 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_C \\ v_C \\ \hdashline u_D \\ v_D \end{array}\right]=\left[\begin{array}{r} 10 \\ -10 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} u_C \\ v_C \\ \hdashline u_D \\ v_D \end{array}\right]=\left[\begin{array}{r} 26.94 \\ -14.42 \\ \hdashline 21.36 \\ 5.58 \end{array}\right]\frac{l}{EA}$$

(7) 求各杆杆端力 $\overline{\boldsymbol{F}}^e$

单元①：

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{①}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{①}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{k}^{①}\boldsymbol{\Delta}^{①}=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} \\ -1 & 0 & & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right]\times$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{r} 26.94 \\ -14.42 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} -14.4 \\ 0 \\ \hdashline 14.4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

单元②：

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{②} = \boldsymbol{F}^{②} = \boldsymbol{k}^{②}\boldsymbol{\Delta}^{②} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 26.94 \\ -14.42 \\ \hdashline 21.36 \\ 5.58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.58 \\ 0 \\ \hdashline -5.58 \\ 0 \end{pmatrix}$$

单元③：

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{③} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{③} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{k}^{③}\boldsymbol{\Delta}^{③} = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}} \\ \hdashline & & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c:}{\boldsymbol{0}} & -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \times$$

$$\begin{pmatrix} 21.36 \\ 5.58 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.58 \\ 0 \\ \hdashline -5.58 \\ 0 \end{pmatrix}$$

单元④：

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{④} = \boldsymbol{F}^{④} = \boldsymbol{k}^{④}\boldsymbol{\Delta}^{④} = \boldsymbol{0}$$

单元⑤：

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{⑤} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{⑤} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{k}^{⑤}\boldsymbol{\Delta}^{⑤}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}} \\ \hdashline & & 1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c:}{\boldsymbol{0}} & -1 & 1 \end{array}\right) \times$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hdashline -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 26.94 \\ -14.42 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.26 \\ 0 \\ \hdashline -6.26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

单元⑥：

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{⑥} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{⑥} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{k}^{⑥}\boldsymbol{\Delta}^{⑥}$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\begin{pmatrix}-1 & 1 & & \\ -1 & -1 & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ & & -1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} & -1 & -1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\times
$$

$$
\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21.36\\ 5.58\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7.89\\ 0\\ 7.89\\ 0\end{pmatrix}
$$

各杆内力值标在图 9-26c 中桁架各杆旁边。

2. 组合结构

计算组合结构时,先区分梁式杆和桁杆。对梁式杆,采用一般单元的单元刚度方程及相应的计算公式。对桁杆,采用桁架单元的单元刚度方程及相应的计算公式。

例 9-7 试求图 9-27 所示组合结构的内力①。设横梁截面抗拉和抗弯刚度分别为 EA 和 EI,且 $EA = 2EI/\mathrm{m}^2$。又吊杆截面抗拉刚度 $E_1A_1 = \dfrac{EI}{20}\Big/\mathrm{m}^2$。

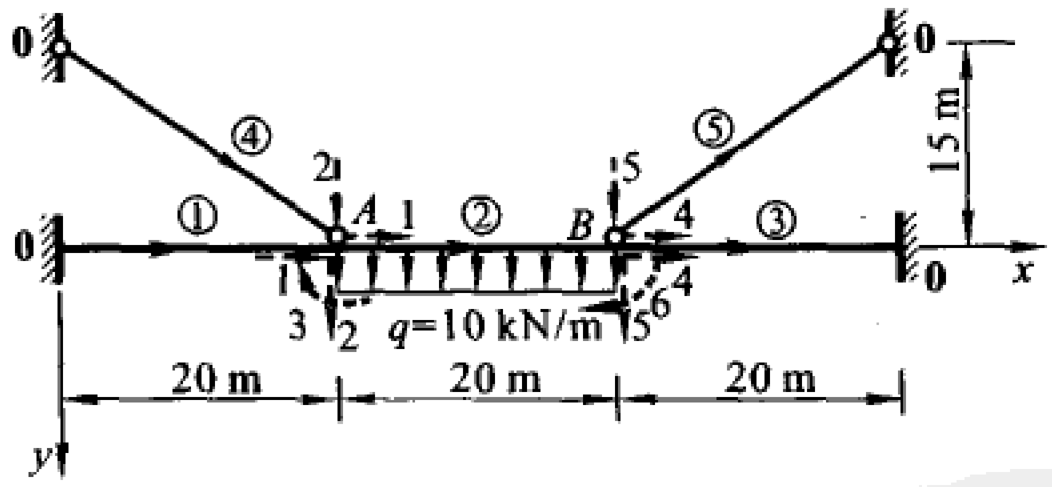


图 9-27

解 (1) 单元和结点位移分量的统一编码如图 9-27 中所示。

横梁固定端的三个位移分量都为零,用 **0** 编码。拉杆④和⑤在支座处的两个线位移分量均为零,也用 **0** 编码。单元①和②间刚结点 A,编码为(1 2 3)。单元②和③间刚结点 B,编码为(4 5 6)。单元④、⑤和横梁的铰结点处,线位移与刚结点 A、B 处相同,因此应采用同码,分别为(1 2)和(4 5)。

① 本例 EA、E_1A_1 与 EI 之间用倍数关系,没用真值,故运算中不再注明单位。

所取的整体坐标系也示于图 9-27 中。

(2) 形成局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$

单元①、②、③为梁式杆，按一般单元的式(9-6)形成单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$。

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{①}=\bar{\boldsymbol{k}}^{②}=\bar{\boldsymbol{k}}^{③}=\frac{EI}{20}\times\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0.03 & 0.3 & 0 & -0.03 & 0.3\\ 0 & 0.3 & 4 & 0 & -0.3 & 2\\ \hline -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -0.03 & -0.3 & 0 & 0.03 & -0.3\\ 0 & 0.3 & 2 & 0 & -0.3 & 4\end{array}\right)$$

单元④、⑤为桁杆，按桁架单元的式(9-54)形成单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$。

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{④}=\bar{\boldsymbol{k}}^{⑤}=E_1A_1\times\left(\begin{array}{cc|cc}0.04 & 0 & -0.04 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline -0.04 & 0 & 0.04 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

(3) 形成整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$

单元①、②、③：$\alpha=0°$，所以

$$\boldsymbol{k}^{①}=\boldsymbol{k}^{②}=\boldsymbol{k}^{③}=\bar{\boldsymbol{k}}^{①}=\bar{\boldsymbol{k}}^{②}=\bar{\boldsymbol{k}}^{③}$$

单元④：$\cos\alpha=0.8$，$\sin\alpha=0.6$。由式(9-55)

$$\boldsymbol{T}^{④}=\left(\begin{array}{cc|cc}0.8 & 0.6 & & \\ -0.6 & 0.8 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}\\ \hline & & 0.8 & 0.6\\ \multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{0}} & -0.6 & 0.8\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{k}^{④}=\boldsymbol{T}^{④\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^{④}\boldsymbol{T}^{④}=\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\overset{\begin{array}{cccc}(1) & (2) & (3) & (4)\end{array}}{\left(\begin{array}{cc|cc}0.0256 & 0.0192 & -0.0256 & -0.0192\\ 0.0192 & 0.0144 & -0.0192 & -0.0144\\ \hline -0.0256 & -0.0192 & 0.0256 & 0.0192\\ -0.0192 & -0.0144 & 0.0192 & 0.0144\end{array}\right)}E_1A_1$$

单元⑤：$\cos\alpha=0.8$，$\sin\alpha=-0.6$。由式(9-55)

$$
\boldsymbol{T}^{⑤}=\left[\begin{array}{cc:cc}0.8 & -0.6 & & \\ 0.6 & 0.8 & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ \hdashline & & 0.8 & -0.6 \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} & 0.6 & 0.8\end{array}\right]
$$

$$
\boldsymbol{k}^{⑤}=\boldsymbol{T}^{⑤\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^{⑤}\boldsymbol{T}^{⑤}=\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\overset{\begin{array}{cccc}(1)\quad & \quad(2)\quad & \quad(3)\quad & \quad(4)\end{array}}{\left[\begin{array}{cc:cc}0.0256 & -0.0192 & -0.0256 & 0.0192 \\ -0.0192 & 0.0144 & 0.0192 & -0.0144 \\ \hdashline -0.0256 & 0.0192 & 0.0256 & -0.0192 \\ 0.0192 & -0.0144 & -0.0192 & 0.0144\end{array}\right]}E_1A_1
$$

(4) 用单元集成法形成整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$

图 9-27 中,各单元的 $\bar{x}$ 轴正方向用箭头标明。各杆的单元定位向量可由图直接写出如下:

$$
\boldsymbol{\lambda}^{①}=(0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3)^{\mathrm{T}}
$$
$$
\boldsymbol{\lambda}^{②}=(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6)^{\mathrm{T}}
$$
$$
\boldsymbol{\lambda}^{③}=(4\quad 5\quad 6\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}
$$
$$
\boldsymbol{\lambda}^{④}=(0\quad 0\quad 1\quad 2)^{\mathrm{T}}
$$
$$
\boldsymbol{\lambda}^{⑤}=(4\quad 5\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}
$$

按照单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$,将各单元 $\boldsymbol{k}^e$ 中的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中定位并与前阶段结果累加,最后得到 $\boldsymbol{K}$ 如下(集成时用 $E_1A_1=\dfrac{EI}{20}$ 的关系):

$$
\boldsymbol{K}=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\overset{\begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}}{\left[\begin{array}{ccc:ccc}4.0256 & 0.0192 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0.0192 & 0.0744 & 0 & 0 & -0.03 & 0.3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -0.3 & 2 \\ \hdashline -2 & 0 & 0 & 4.0256 & -0.0192 & 0 \\ 0 & -0.03 & -0.3 & -0.0192 & 0.0744 & 0 \\ 0 & 0.3 & 2 & 0 & 0 & 8\end{array}\right]}\times\frac{EI}{20}
$$

(5) 求等效结点荷载 $\boldsymbol{P}$

首先,求单元固端约束力 $\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{e}$

只有单元②有 $\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{P}}^{②}$。因为无需转换坐标,所以

$$
\boldsymbol{P}^{②} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}^{②} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{200}{2} \\ -\dfrac{10}{12}\times 400 \\ \hdashline 0 \\ -\dfrac{200}{2} \\ \dfrac{10}{12}\times 400 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 333 \\ \hdashline 0 \\ 100 \\ -333 \end{pmatrix}
$$

按单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^{②}=(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6)^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{P}^{②}$ 中的元素在 $\boldsymbol{P}$ 中定位，得

$$
\boldsymbol{P} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 333 \\ \hdashline 0 \\ 100 \\ -333 \end{pmatrix}
$$

(6) 解基本方程

$$
\frac{EI}{20}\times\left(\begin{array}{ccc:ccc} 4.025\,6 & 0.019\,2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0.019\,2 & 0.074\,4 & 0 & 0 & -0.03 & 0.3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -0.3 & 2 \\ \hdashline -2 & 0 & 0 & 4.025\,6 & -0.019\,2 & 0 \\ 0 & -0.03 & -0.3 & -0.019\,2 & 0.074\,4 & 0 \\ 0 & 0.3 & 2 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ \hdashline u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 333 \\ \hdashline 0 \\ 100 \\ -333 \end{pmatrix}
$$

得

$$
\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ \hdashline u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{pmatrix} = \frac{20}{EI}\times\begin{pmatrix} -12.67 \\ 3\,976 \\ 254.3 \\ \hdashline 12.67 \\ 3\,976 \\ -254.3 \end{pmatrix}
$$

(7) 求各杆杆端力 $\overline{\boldsymbol{F}}^{e}$

$$
\bar{\boldsymbol{F}}^{①}=\frac{EI}{20}\times\left(\begin{array}{ccc:ccc}
2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0.03 & 0.3 & 0 & -0.03 & 0.3\\
0 & 0.3 & 4 & 0 & -0.3 & 2\\
\hdashline
-2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & -0.03 & -0.3 & 0 & 0.03 & -0.3\\
0 & 0.3 & 2 & 0 & -0.3 & 4
\end{array}\right)\times\frac{20}{EI}\times
\left(\begin{array}{c}
0\\ 0\\ 0\\ \hdashline -12.67\\ 3\,976\\ 254.3
\end{array}\right)=
\left(\begin{array}{c}
25.34\\ -42.99\\ -684.2\\ \hdashline -25.34\\ 42.99\\ -175.6
\end{array}\right)
$$

$$
\bar{\boldsymbol{F}}^{②}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}
2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0.03 & 0.3 & 0 & -0.03 & 0.3\\
0 & 0.3 & 4 & 0 & -0.3 & 2\\
\hdashline
-2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & -0.03 & -0.3 & 0 & 0.03 & -0.3\\
0 & 0.3 & 2 & 0 & -0.3 & 4
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
-12.67\\ 3\,976\\ 254.3\\ \hdashline 12.67\\ 3\,976\\ -254.3
\end{array}\right)+
\left(\begin{array}{c}
0\\ -100\\ -333\\ \hdashline 0\\ -100\\ 333
\end{array}\right)=
\left(\begin{array}{c}
-50.68\\ -100\\ 175.6\\ \hdashline 50.68\\ -100\\ -175.6
\end{array}\right)
$$

$$
\bar{\boldsymbol{F}}^{④}=\bar{\boldsymbol{k}}^{④}\boldsymbol{T}^{④}\boldsymbol{\Delta}^{④}=\frac{EI}{20}\times\left(\begin{array}{cc:cc}
0.04 & 0 & -0.04 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
-0.04 & 0 & 0.04 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)\times
$$

$$
\left(\begin{array}{cc:cc}
0.8 & 0.6 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\boldsymbol{0}$}}\\
-0.6 & 0.8 & & \\
\hdashline
\multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$\boldsymbol{0}$}} & 0.8 & 0.6\\
 & & -0.6 & 0.8
\end{array}\right)\times
$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hdashline -12.67 \\ 3\,976 \end{pmatrix} \times \frac{20}{EI} = \begin{pmatrix} -95.02 \\ 0 \\ \hdashline 95.02 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{⑤} = \begin{pmatrix} -95.02 \\ 0 \\ \hdashline 95.02 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(8) 作内力图

内力图如图 9-28 所示。与图 7-26 相比,可见横梁轴向变形的影响不大。

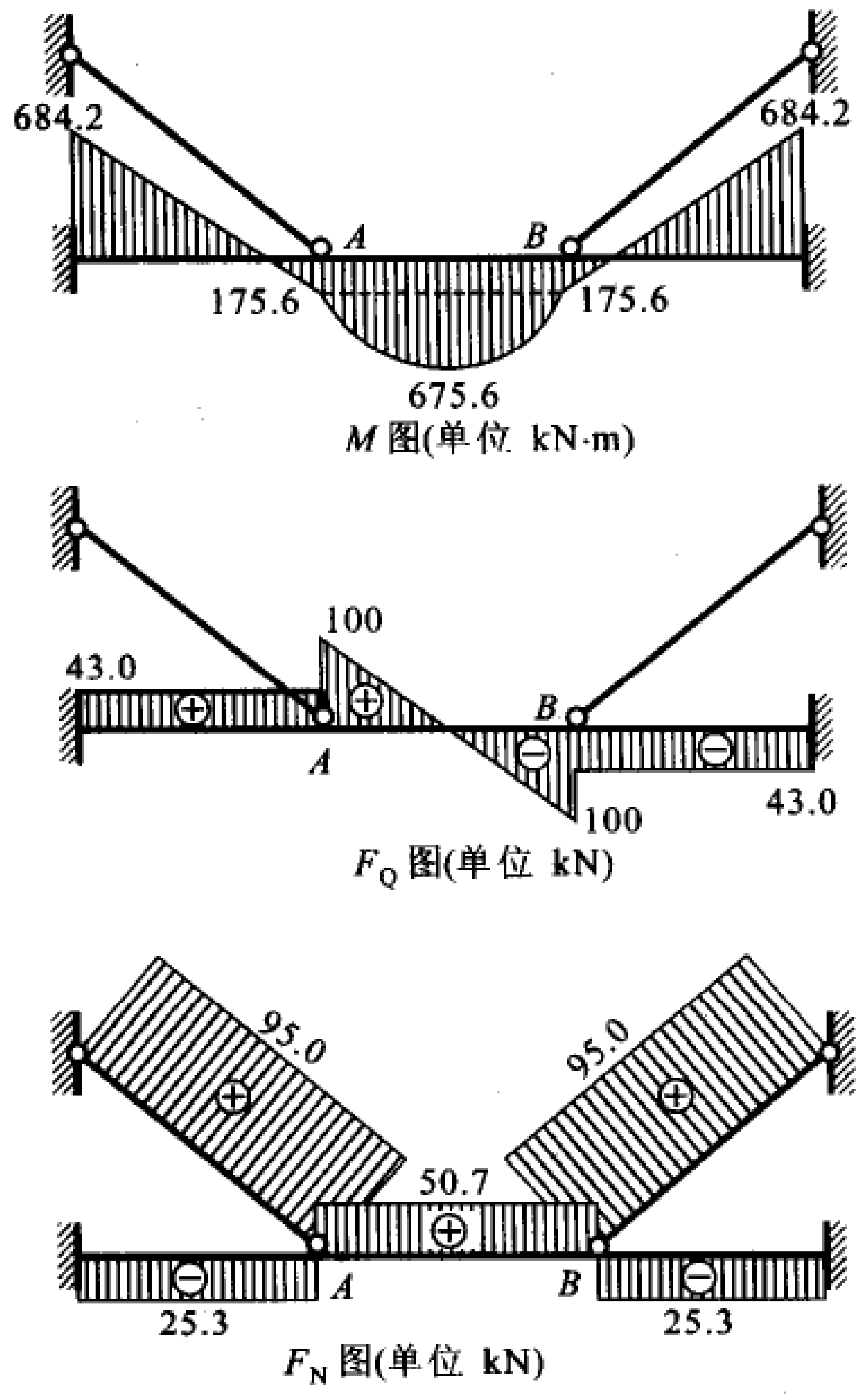


图 9-28

§9－10　小　　结

矩阵位移法是新的计算工具(电子计算机)与传统力学原理(位移法)相结合的产物。矩阵位移法要与传统位移法对照起来学习,注意它们之间“原理上同源、作法上有别”的关系。

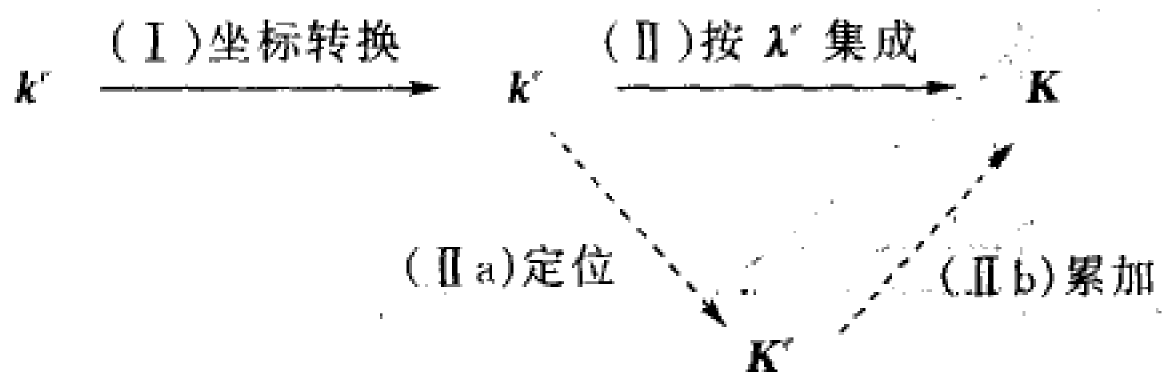
位移法最便于实现计算过程的程序化。矩阵位移法(有限元位移法)是结构矩阵分析(有限元法)中占主导地位的方法。由式(9－49)可知位移法基本方程的矩阵形式为

$$\boldsymbol{K\Delta}=\boldsymbol{P} \tag{a}$$

这是一个非常普遍、非常简洁的方程。它既可用于分析梁、刚架、桁架等平面和空间结构,又可用于分析板、壳和弹性力学问题,具有普遍性。这样丰富的内容凝聚在三个符号、一个方程之中,形式简洁而具有高度的概括。

矩阵位移法基本方程的建立,归结为两个问题:一是根据结构的几何和弹性性质建立整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$,二是根据结构的受载情况形成整体荷载向量 $\boldsymbol{P}$。

推导整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 时,采用单元集成法,其推导过程为



第Ⅰ步,进行坐标转换,由局部坐标系的单元刚度矩阵 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 导出整体坐标系的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$,为第Ⅱ步作好准备。

第Ⅱ步,根据单元定位向量 $\boldsymbol{\lambda}^e$,依次由各单元的刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 进行集成,得出整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。“集成”实际上包括将 $\boldsymbol{k}^e$ 的元素在 $\boldsymbol{K}$ 中“定位”,以及将定在同一座位上的诸元素进行“累加”两个环节。

为了便于理解,不妨对“定位”和“累加”分别说明其含义。为此,在 $\boldsymbol{k}^e$ 与 $\boldsymbol{K}$ 之间再引入单元贡献矩阵 $\boldsymbol{K}^e$,如式(b)中的虚线所示。按 $\boldsymbol{\lambda}^e$ 重新“定位”的结果就是由 $\boldsymbol{k}^e$ 得出 $\boldsymbol{K}^e$;“累加”的结果就是由 $\boldsymbol{K}^e$ 得出 $\boldsymbol{K}$。但是在实际编制计算程序时,宁愿采取“边定位边累加”的方案,如式(b)中的实线所示。

在进行整体分析时,有“先处理”和“后处理”两种作法。本章采用的是先处理法,即在形成整体刚度矩阵时事先已根据结构的支承条件进行了处理。后处理法的特点是,先不考虑支承条件,按单元集成法得出原始的整体刚度矩阵,然后再引入支承条件,进行处理,得出整体刚度矩阵。关于后处理法可参阅有关书

籍。

为了加深对矩阵位移法的理解，应当同时对计算程序有所了解并上机进行实践。本书在附录 A《结构力学求解器》光盘中给出了平面刚架源程序(FORTRAN 77 和 Fortran 90)，可供学习和上机实习时参考。

§ 9－11 思考与讨论

§ 9－1 思考题

9－1 从矩阵位移法的计算步骤来看矩阵位移法与传统的位移法的异同。

§ 9－2、9－3 思考题

9－2 解释本章中"一般单元"的单元刚度系数的意义。

9－3 一般单元在局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 和整体坐标系下的单元刚度矩阵 k^e，是否都是奇异矩阵？

9－4 一般单元在局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 和整体坐标系下的单元刚度矩阵 k^e 是否都是对称矩阵？

9－5 为什么有的特殊单元其单元刚度矩阵是可逆的？请举一个例子加以说明。

§ 9－4、9－5 思考题

9－6 单元定位向量是由什么组成的？它的用处是什么？

9－7 为什么连续梁的整体刚度矩阵是稀疏矩阵？认识了这一点对以后的计算有什么好处？

9－8 刚架中有铰结点时应该怎样处理？这样处理的理由是什么？

§ 9－6、9－7 思考题

9－9 整体刚度方程和位移法方程是否一回事？它们有什么关系？

9－10 试求当结构温度改变时产生的等效结点荷载。

§ 9－8、9－9 思考题

9－11 刚架计算中当忽略轴向变形的影响时，单元定位向量会有怎样的改变？

9－12 注意桁架结构和组合结构单元定位向量的特点。

综合思考讨论题

9－13 为什么说矩阵位移法易于实现计算过程程序化？矩阵力法在这方面的优缺点是什么？

9－14 单元定位向量在本章重点讲解的先处理法中是极为重要的一个概念。你能否举例说明单元定位向量在整个计算过程中都用在哪些地方？

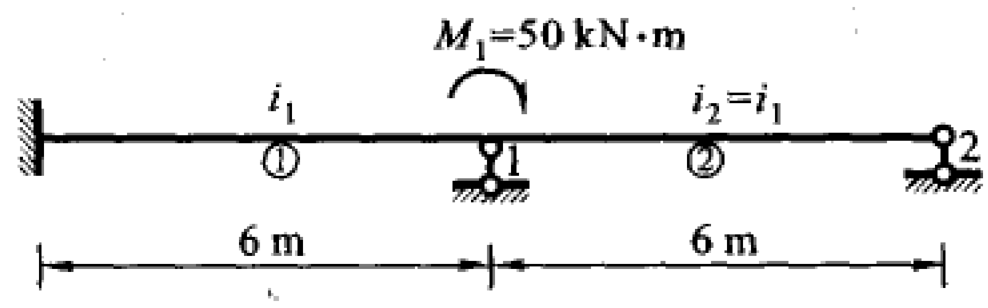
9－15 如果一个刚架结构具有弹性支座，应该如何形成它的刚度矩阵？

9－16 本书附录 A《结构力学求解器》光盘中给出了平面刚架的计算程序。你能否将本章中的理论讲解和附录 A《结构力学求解器》光盘中的框图及源程序加以对照，以加深对用矩阵位移法计算平面刚架步骤的认识？注意本章中讲解的方法在程序中是怎样实现的。

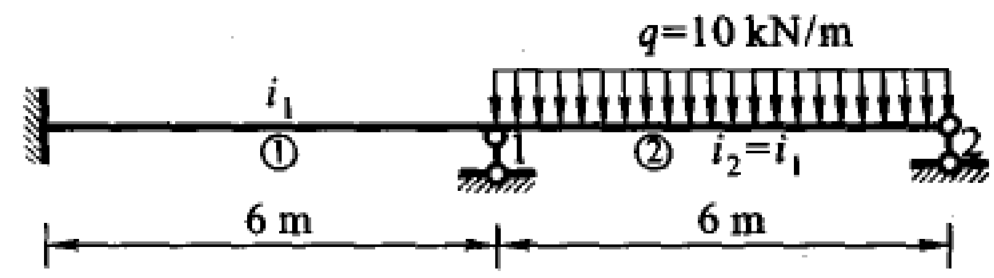
9－17 矩阵位移法对静定结构和超静定结构的计算是否都可以应用？计算步骤是否相同？

习 题

9－1、9－2 试计算图示连续梁的结点转角和杆端弯矩。

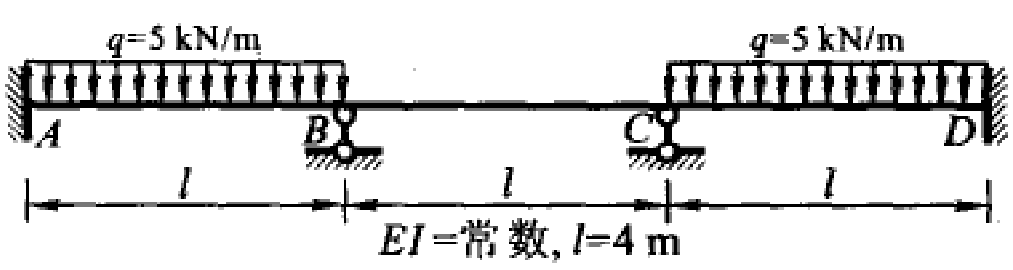


题 9－1 图



题 9－2 图

9－3 试用矩阵位移法计算图示连续梁，并画出弯矩图。



题 9－3 图

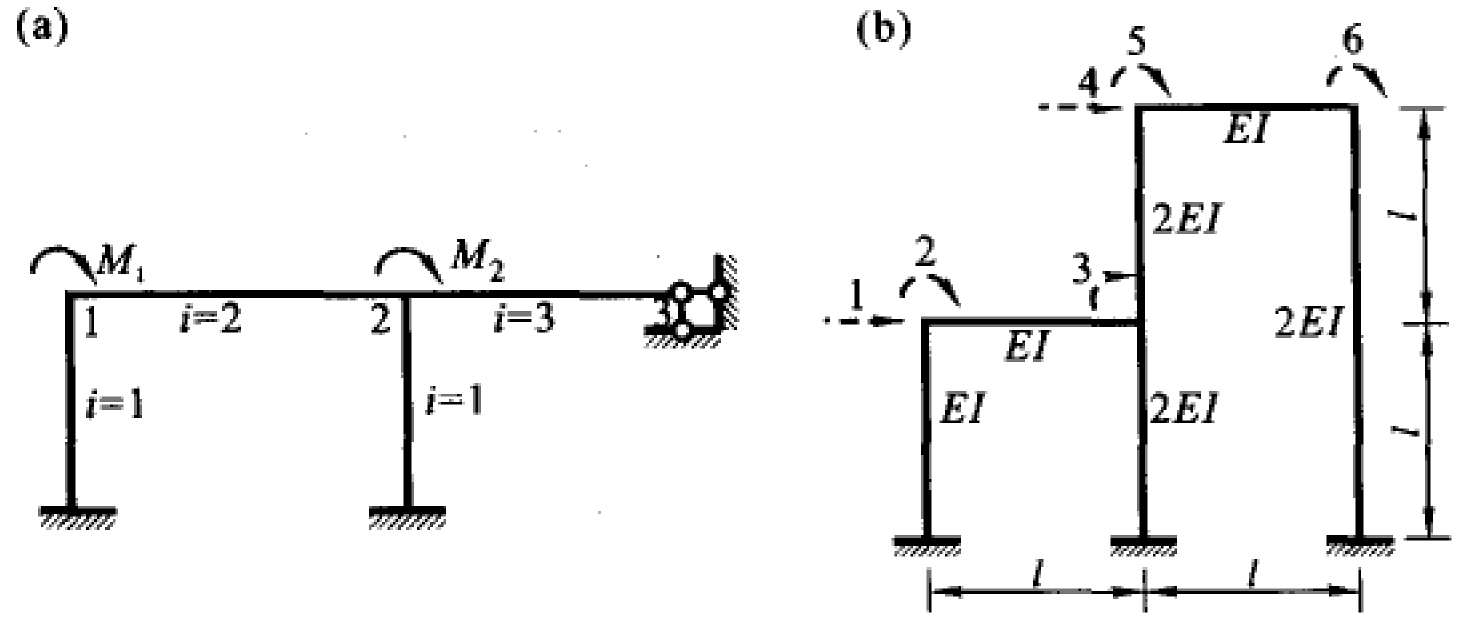
9－4 图中所示为一等截面连续梁，设支座 C 有沉降 $\Delta = 0.005l$。试用矩阵位移法计算内力，并画出内力图。设 $E = 3\times10^4$ MPa，$I = \dfrac{1}{24}$ m^4。



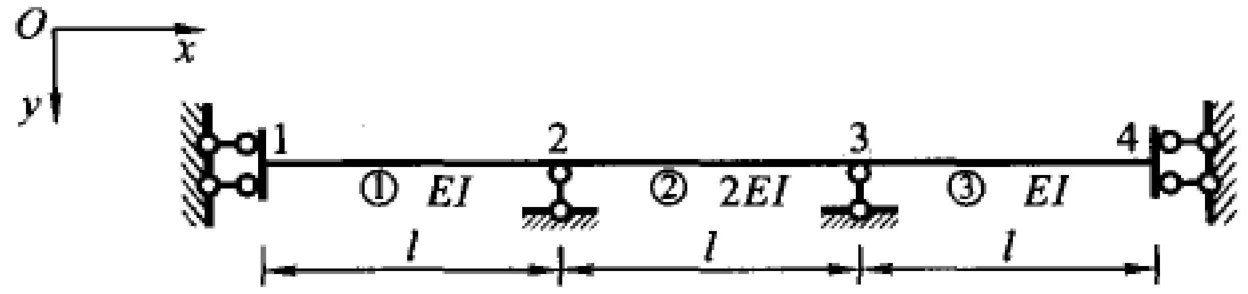
题 9－4 图

9－5 对图中所示结构，试用单元集成法求出其整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$，并列出基本方程（忽略轴向变形影响）。

9－6 试求图示连续梁的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$（忽略轴向变形影响）。

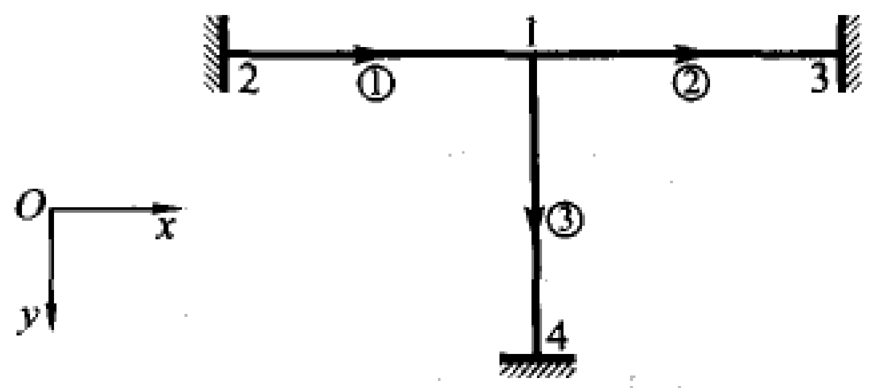


题 9－5 图



题 9－6 图

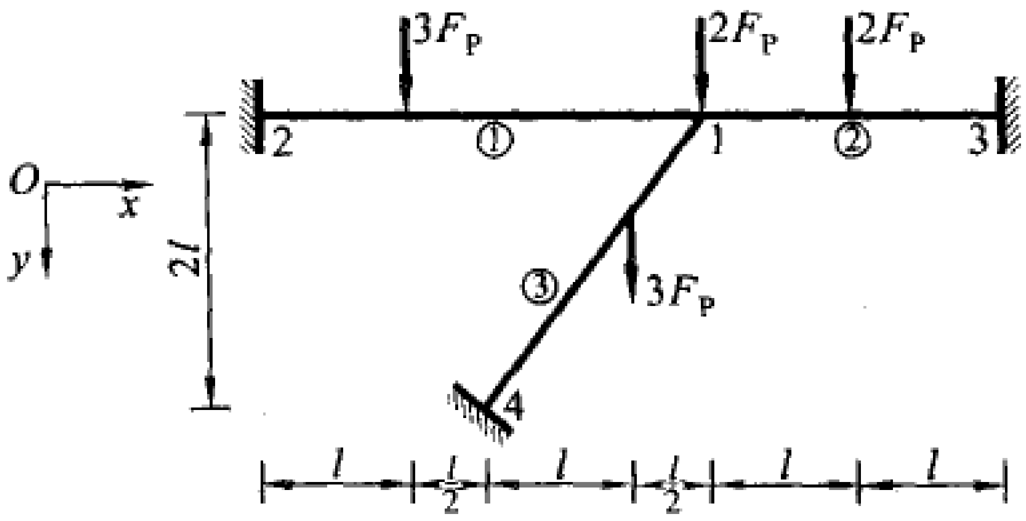
9－7 试求图示刚架的整体刚度矩阵 **K**(考虑轴向变形影响)。设各杆几何尺寸相同，$l = 5\ \text{m}$，$A = 0.5\ \text{m}^2$，$I = \frac{1}{24}\ \text{m}^4$，$E = 3 \times 10^4\ \text{MPa}$。



题 9－7 图

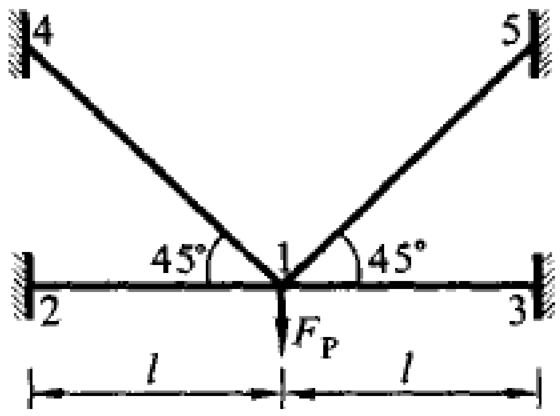
9－8 在上题的刚架中，设在单元①上作用向下的均布荷载 $q = 4.8\ \text{kN/m}$。试求刚架内力，并画出内力图。

9－9 试写出图示刚架在荷载作用下的位移法基本方程(考虑轴向变形影响)。设各杆的 E、A、I 为常数。



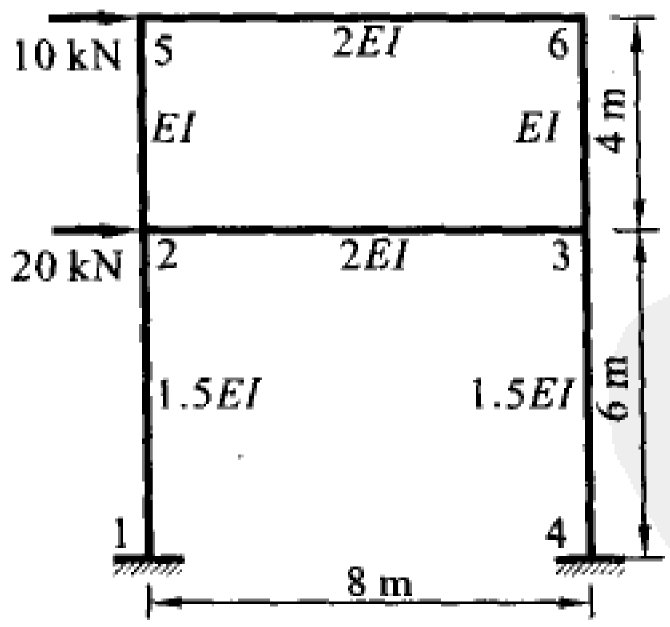
题 9-9 图

9-10 设图示刚架各杆的 E、I、A 相同，且 $A=12\sqrt{2}\frac{I}{l^2}$。试求各杆内力。



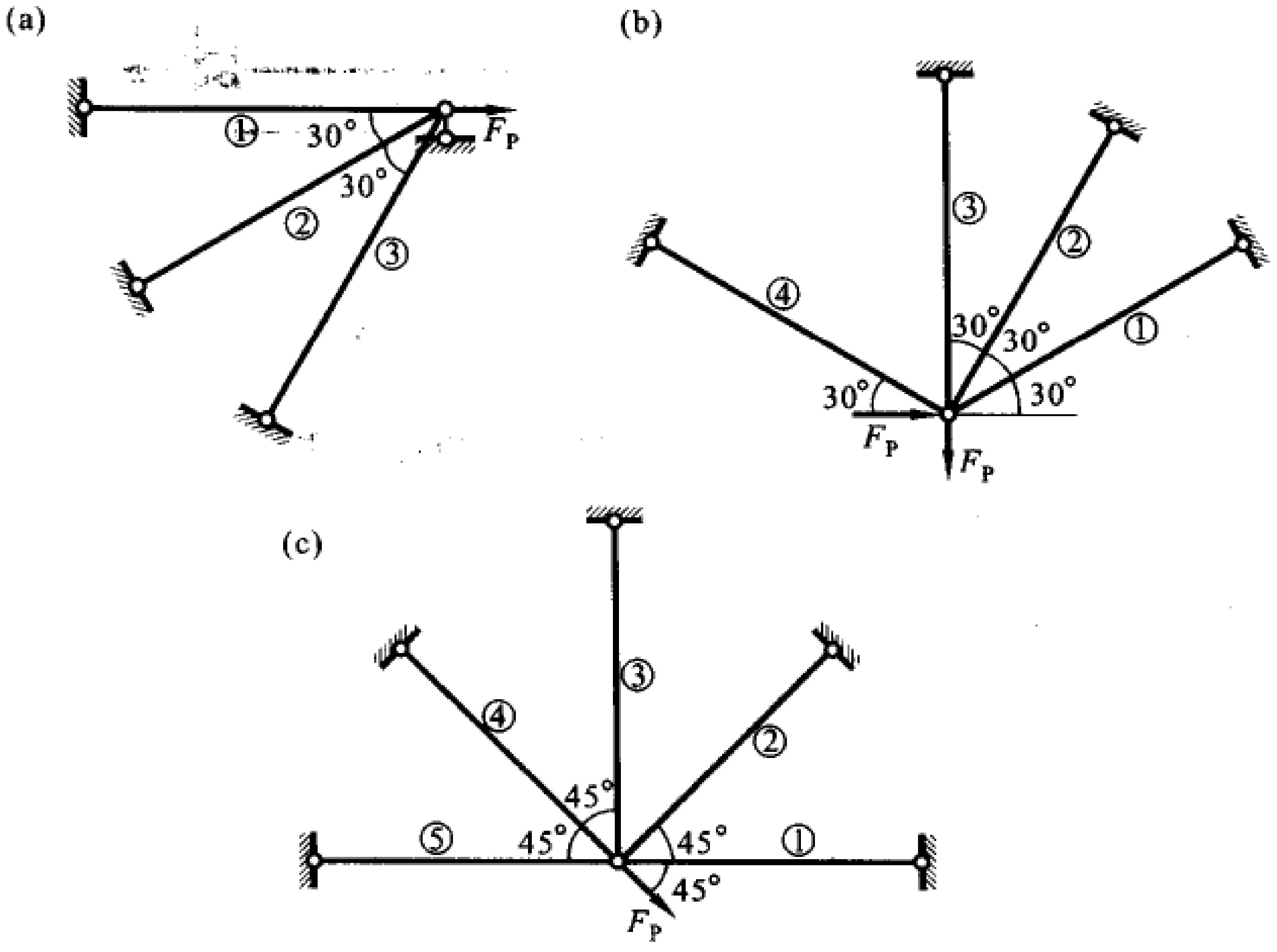
题 9-10 图

9-11 试求图示刚架的整体刚度矩阵、结点位移和各杆内力(忽略轴向变形)。



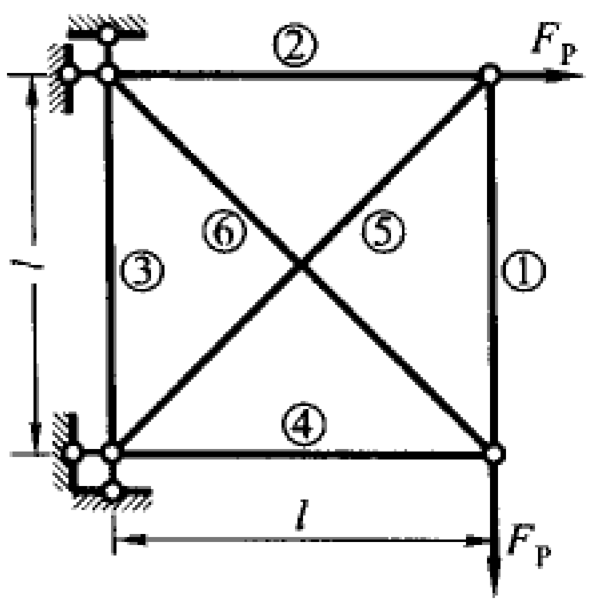
题 9-11 图

9-12 试求图示桁架各杆轴力，设各杆$\frac{EA}{l}$相同。



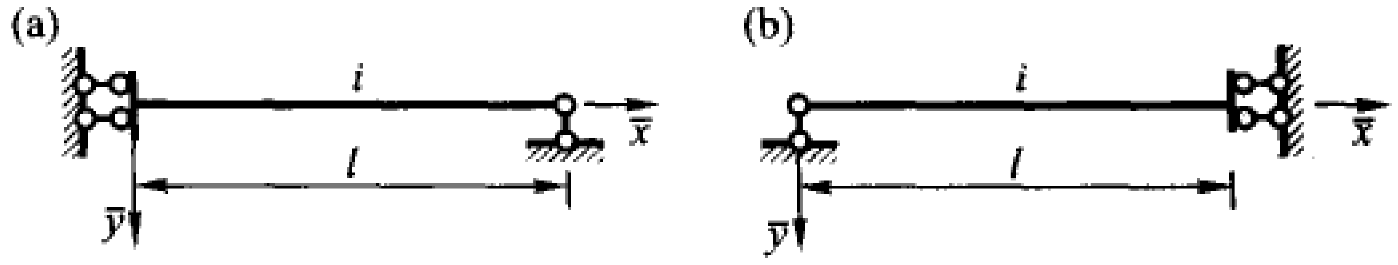
题 9－12 图

9－13　设图示桁架各杆 E、A 相同，试求各杆轴力。如撤去任一水平支杆，求解时会出现什么情况？



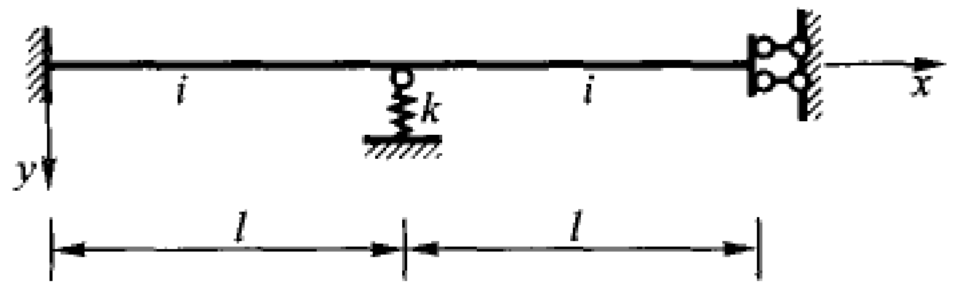
题 9－13 图

9－14　试求图示特殊单元的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}$（忽略轴向变形）。



题 9－14 图

9－15 试求整体刚度矩阵 **K**（忽略轴向变形）。弹性支座刚度为 k。



题 9－15 图

第10章 结构动力计算基础

上面各章讨论了在静力荷载作用下的结构计算问题，本章专门讨论在动力荷载作用下的结构计算问题。

按照结构力学课程教学基本要求，将动力计算内容分为两部分：本章讨论单自由度体系的振动问题、两个自由度体系的自由振动和在简谐荷载下的强迫振动问题，属于教学基本要求的必修内容；多自由度和无限自由度体系的动力计算等，是提高与增选的内容，放在本书卷Ⅱ中讨论。

§10－1 动力计算的特点和动力自由度

1. 结构动力计算的特点

首先，说明动力荷载与静力荷载的区别。动力荷载的特征是荷载（大小、方向、作用位置）随时间而变化。如果单纯从荷载本身性质来看，严格说来，绝大多数实际荷载都应属于动力荷载。但是，如果从荷载对结构所产生的影响这个角度来看，则可分为两种情况。一种情况是：荷载虽然随时间变化，但是变得很慢，荷载对结构所产生的影响与静力荷载相比相差甚微。因此，在这种荷载作用下的结构计算问题实际上仍属于静力荷载作用下的结构计算问题。换句话说，这种荷载实际上可看作静力荷载。另一种情况是：荷载不仅随时间在变，而且变得较快，荷载对结构所产生的影响与静力荷载相比相差甚大。因此，在这种荷载作用下的结构计算问题属于动力计算问题。换句话说，这种荷载实际上应看作动力荷载。

其次，说明结构的动力计算与静力计算的区别。根据达朗伯（J. Le R. d'Alembert）原理，动力计算问题可以转化为静力平衡问题来处理。但是，这是一种形式上的平衡，是一种动平衡，是在引进惯性力的条件下的平衡。换句话说，在动力计算中，虽然形式上仍是在列平衡方程，但是这里要注意两个特点：第一，在所考虑的力系中要包括惯性力；第二，这里考虑的是瞬间的平衡，荷载、内力等都是时间的函数。

2. 动力荷载的分类

工程实际中经常遇到的动力荷载主要有下面几类:

第一类是周期荷载。这类荷载随时间作周期性的变化。周期荷载中最简单也是最重要的一种称为简谐荷载(图 10-1a),荷载 $F_P(t)$随时间 t 的变化规律可用正弦或余弦函数表示。机器转动部分引起的荷载常属于这一类。其他的周期荷载可称为非简谐性的周期荷载(图 10-1b)。

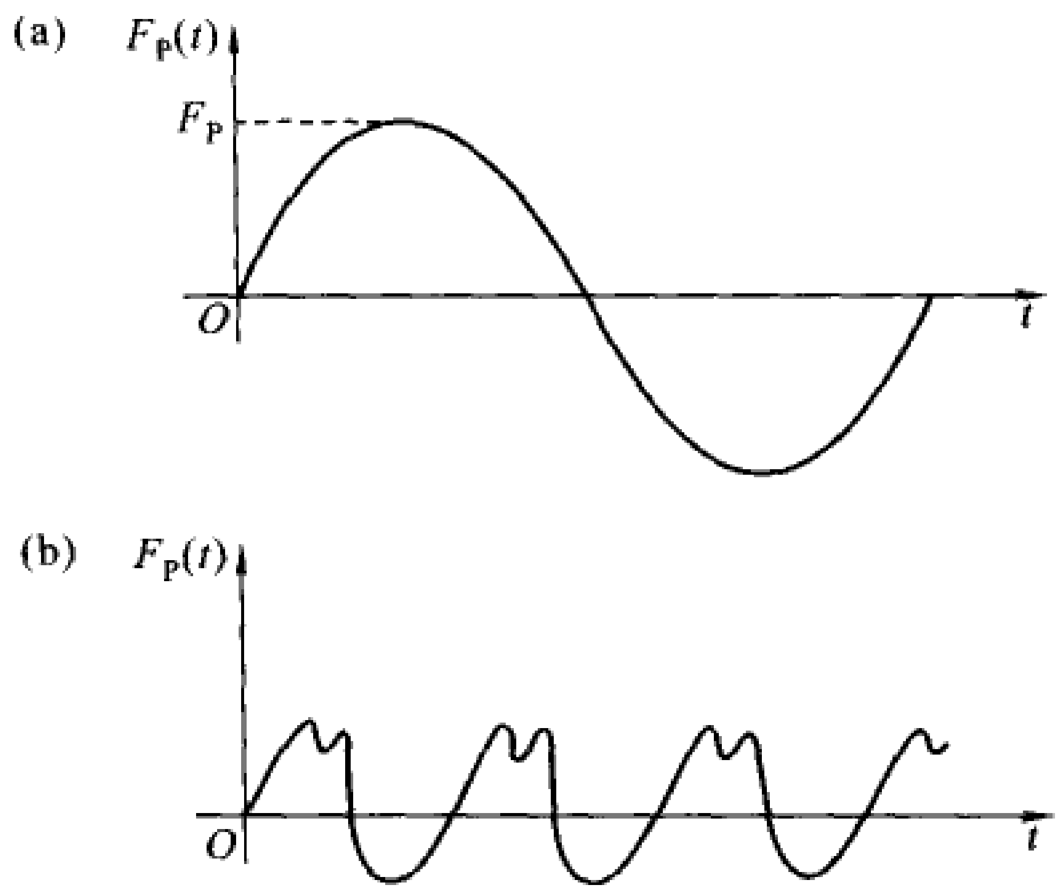


图 10-1

第二类是冲击荷载。这类荷载在很短的时间内,荷载值急剧增大(图 10-2a)或急剧减小(图 10-2b)。各种爆炸荷载属于这一类。

第三类是随机荷载。前面两类荷载都属于确定性荷载,任一时刻的荷载值都是事先确定的。如果荷载在将来任一时刻的数值无法事先确定,则称为非确定性荷载,或者称为随机荷载。地震荷载和风荷载是随机荷载的典型例子。图 10-3 所示为地震时记录到的地面加速度 $\ddot{u}(t)$。

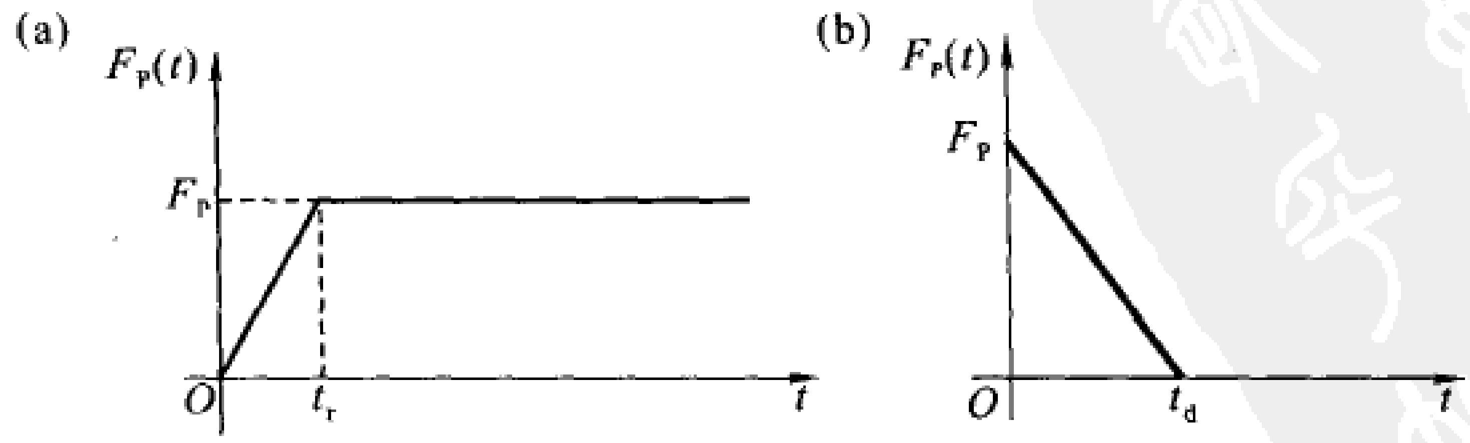


图 10-2

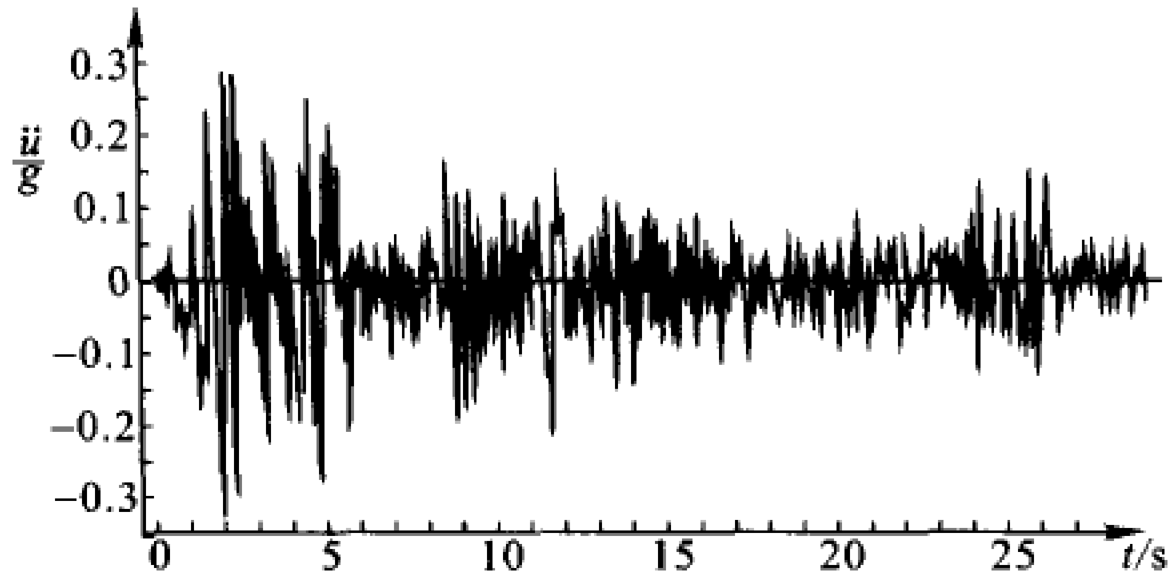


图　10－3

3. 动力计算中体系的自由度

与静力计算一样,在动力计算中也需要事先选取一个合理的计算简图。二者选取的原则基本相同,但在动力计算中,由于要考虑惯性力的作用,因此还需要研究质量在运动过程中的自由度问题。

在动力计算中,一个体系的自由度是指为了确定运动过程中任一时刻全部质量的位置所需确定的独立几何参数的数目。

由于实际结构的质量都是连续分布的,因此任何一个实际结构都可以说具有无限个自由度。但是如果所有结构都按无限自由度去计算,则不仅十分困难,而且也没有必要。因此,通常需要对计算方法加以简化。常用的简化方法有下列三种。

第一,集中质量法。

把连续分布的质量集中为几个质点,这样就可以把一个原来是无限自由度的问题简化成为有限自由度的问题。下面举几个例子加以说明。

图 10－4a 所示为一简支梁,跨中放有重物 W。当梁本身质量远小于重物的质量时,可取图 10－4b 所示的计算简图。这时,体系由无限自由度简化为一个自由度。

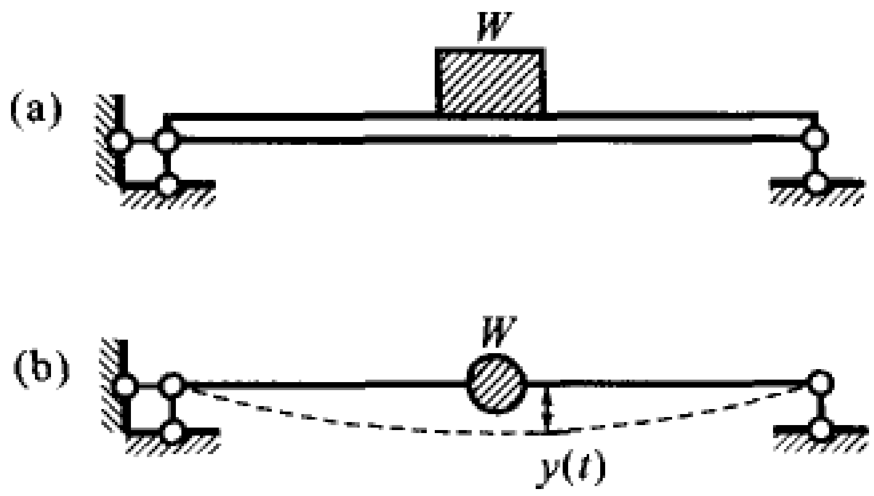


图　10－4

图10－5a所示为一三层平面刚架。在水平力作用下计算刚架的侧向振动时，一种常用的简化计算方法是将柱的分布质量化为作用于上下横梁处的集中质量，因而刚架的全部质量都作用在横梁上；此外每个横梁上各点的水平位移可认为彼此相等，因而横梁上的分布质量可用一个集中质量来替代。最后，可取图10－5b所示的计算简图，只有三个自由度。

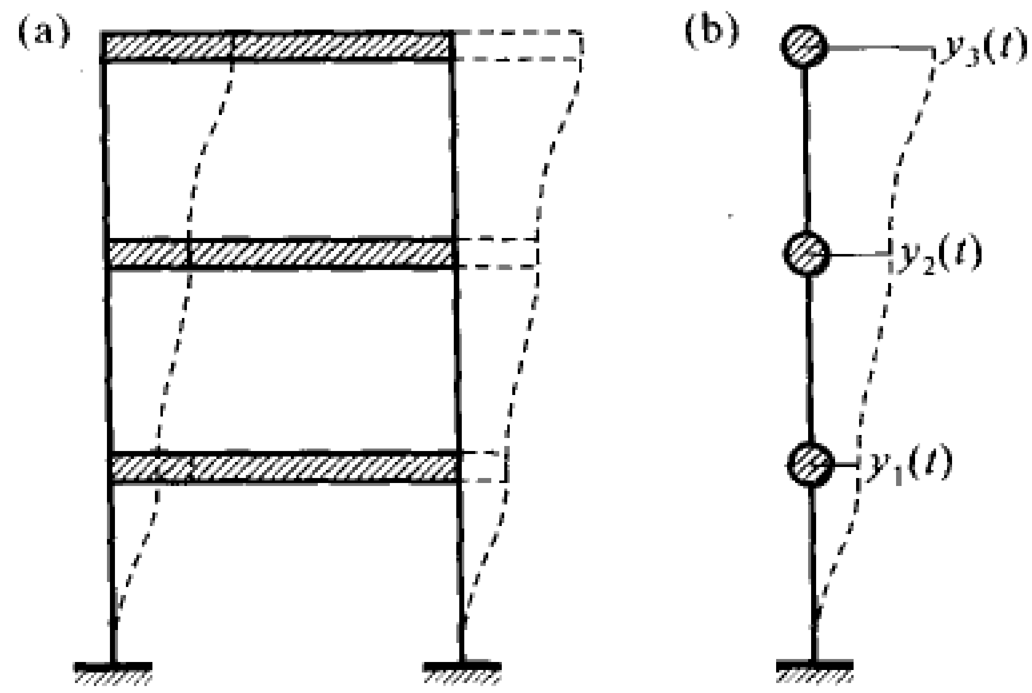


图　10－5

图10－6a所示为一块形基础，计算时可简化为一刚性质块。当考虑平面内的振动时，共有三个自由度，即水平位移x、竖向位移y和角位移φ(图10－6b)。当仅考虑竖直方向的振动时，则只有一个自由度(图10－6c)。

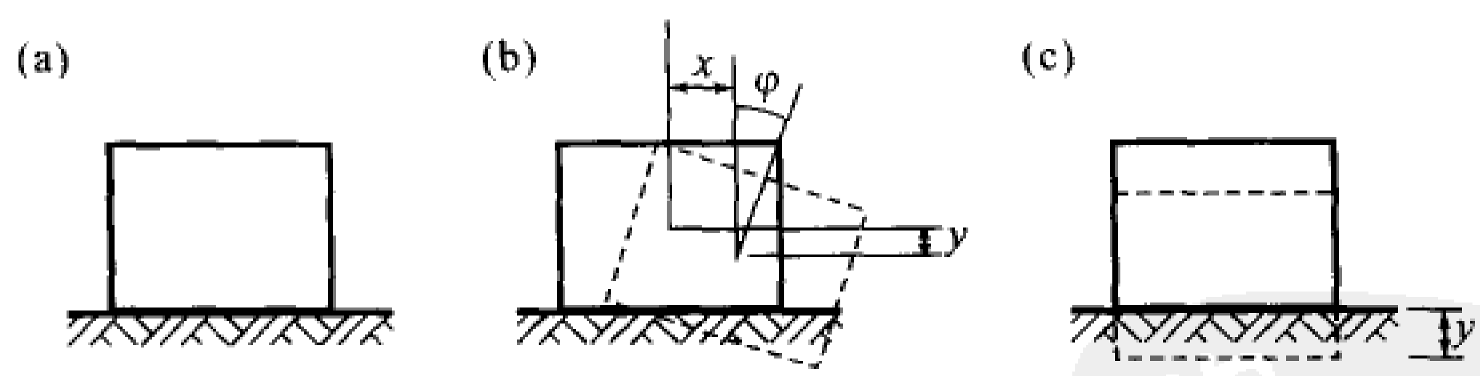


图　10－6

由图10－6还可看出，自由度的个数与集中质量的个数并不一定相等。又如图10－7所示体系，虽然只有一个集中质量，但有两个自由度。

第二，广义坐标法。

具有分布质量的简支梁是一个具有无限自由度的体系。简支梁的挠度曲线可用三角级数来表示：

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l}\tag{a}$$

这里，$\sin\frac{k\pi x}{l}$是一组给定的函数，可称为形状函数；a_k 是一组待定参数，称为广义坐标。当形状函数选定之后，梁的挠度曲线 $y(x)$ 即由无限多个广义坐标 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所确定，因此简支梁具有无限自由度。在简化计算中，通常只取级数的前 n 项：

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{b}$$

这时，简支梁被简化为具有 n 个自由度的体系。

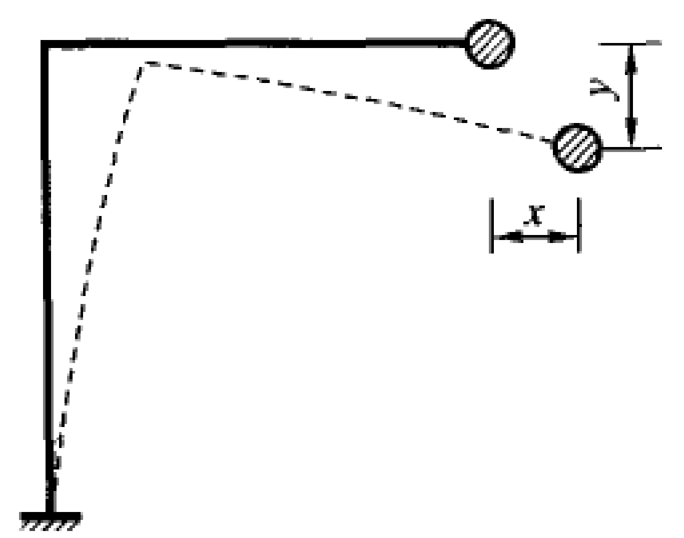


图　10－7

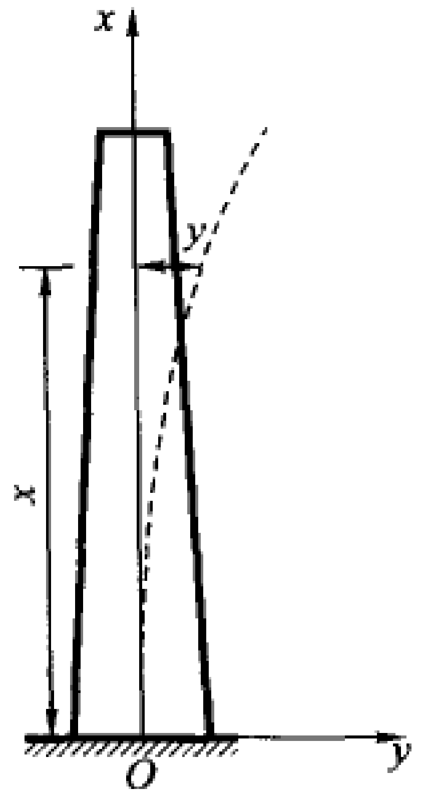


图　10－8

图 10－8 所示的烟囱原来也是一个具有无限自由度的体系。由于底部是固定端，因此在 $x=0$ 处，挠度 y 及转角$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$应为零。根据上述位移边界条件，挠度曲线可近似地设为

$$y(x) = x^2(a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}) \tag{c}$$

这样，就简化为具有 n 个自由度的体系。

第三，有限元法。

有限元法可看作广义坐标法的一种特殊应用。以图 10－9a 所示两端固定梁为例作简要说明。

把结构分为若干单元。在图 10－9a 中，梁分为五个单元。

取结点位移参数(挠度 y 和转角 θ)作为广义坐标。在图 10－9a 中，取中间四个结点的八个位移参数 y_1、θ_1、y_2、θ_2、y_3、θ_3、y_4、θ_4 作广义坐标。

每个结点位移参数只在相邻两个单元内引起挠度。在图 10－9b、c 中分别给出结点位移参数 y_1 和 θ_1 相应的形状函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$。

梁的挠度可用八个广义坐标及其形状函数表示如下：

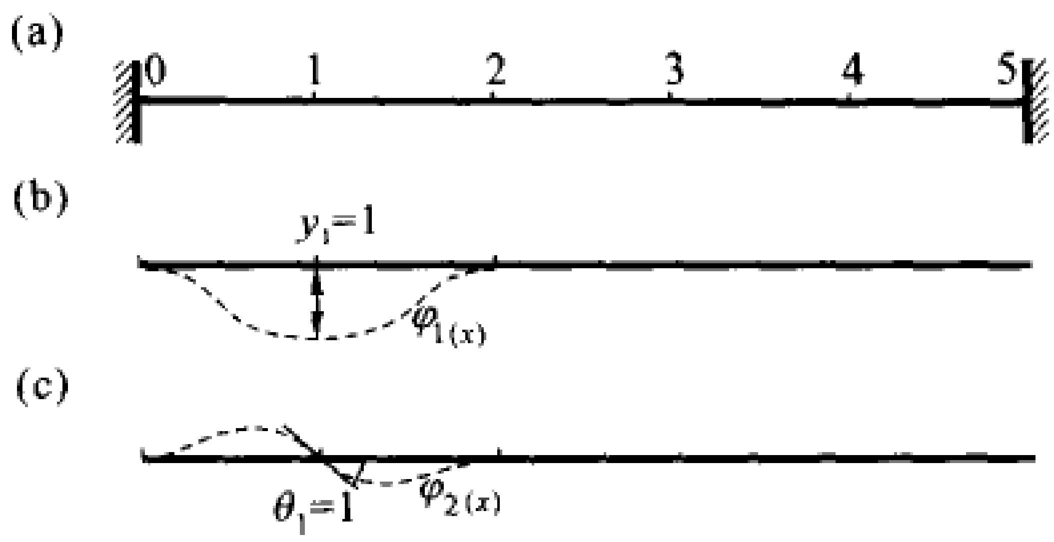


图　10－9

$$y(x)=y_1\varphi_1(x)+\theta_1\varphi_2(x)+\cdots+y_4\varphi_7(x)+\theta_4\varphi_8(x) \qquad (d)$$

通过以上步骤，梁即转化为具有八个自由度的体系。可以看出，有限元法综合了集中质量法和广义坐标法的某些特点。

§10－2　单自由度体系的自由振动

单自由度体系的动力分析虽然比较简单，但是非常重要。这是因为：第一，很多实际的动力问题常可按单自由度体系进行计算，或者进行初步的估算。第二，单自由度体系的动力分析是多自由度体系动力分析的基础，只有牢固地打好这个基础，才能顺利地学习后面的内容。

1．自由振动微分方程的建立

现结合图10－10讨论单自由度体系的自由振动。

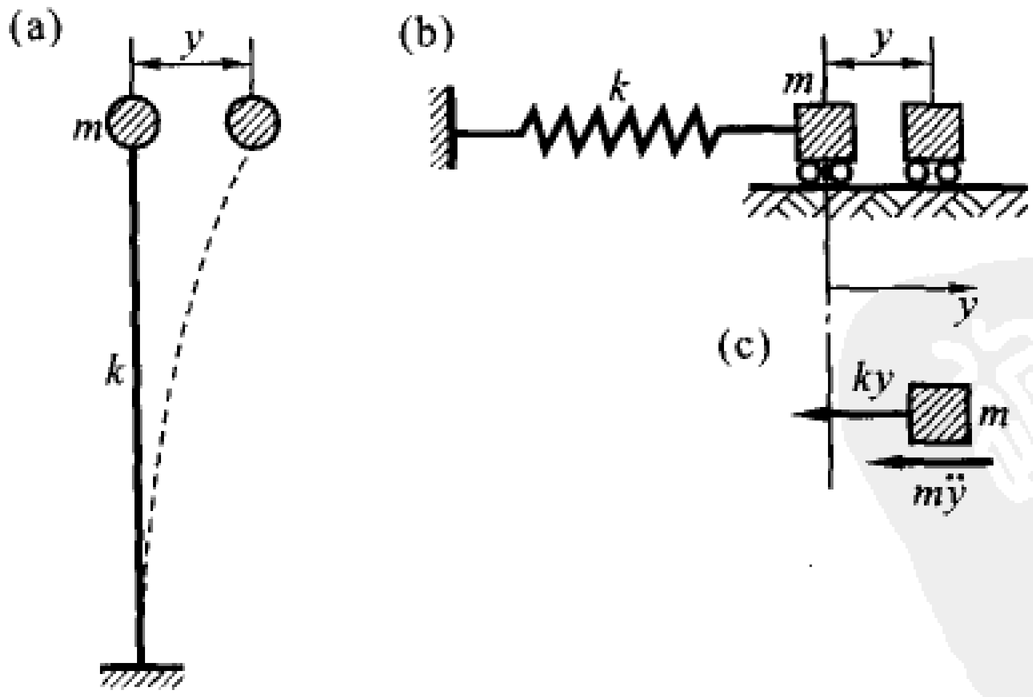


图　10－10

图10－10a所示的悬臂立柱在顶部有一重物，质量为 m。设柱本身的质量比 m 小得多，可以忽略不计。因此，体系只有一个自由度。

假设由于外界的干扰，质点 m 离开了静止平衡位置，干扰消失后，由于立柱弹性力的影响，质点 m 沿水平方向产生自由振动，在任一时刻 t，质点的水平位移为 $y(t)$。

在建立自由振动微分方程之前，先把图 10－10a 中的体系用图 10－10b 所示的弹簧模型来表示。原来由立柱对质量 m 所提供的弹性力这里改用弹簧来提供。因此，弹簧的刚度系数 k（使弹簧伸长单位距离时所需施加的拉力）应使之与立柱的刚度系数（使柱顶产生单位水平位移时在柱顶所需施加的水平力）相等。

现在推导自由振动的微分方程。以静平衡位置为原点，取质量 m 在振动中位置为 y 时的状态作隔离体，如图 10－10c 所示。如果忽略振动过程中所受到的阻力，则隔离体所受的力有下列两种：

(1) 弹性力 $-ky$，与位移 y 的方向相反；

(2) 惯性力 $-m\ddot{y}$，与加速度 $\ddot{y}$ 的方向相反。

根据达朗伯原理，可列出隔离体的平衡方程如下：

$$m\ddot{y}+ky=0 \tag{10-1}$$

这就是从力系平衡角度建立的自由振动微分方程。这种推导方法称为刚度法。

另一方面，自由振动微分方程也可从位移协调角度来推导。用 F_I 表示惯性力：$F_I=-m\ddot{y}$；用 δ 表示弹簧的柔度系数，即在单位力作用下所产生的位移，其值与刚度系数 k 互为倒数：

$$\delta=\frac{1}{k} \tag{a}$$

则质量 m 的位移为

$$y=F_I\delta=(-m\ddot{y})\delta \tag{b}$$

上式表明：质量 m 在运动过程中任一时刻的位移等于在当时惯性力作用下的静力位移。

将式(a)代入式(b)，整理后仍得到式(10－1)。这里，是从位移协调的角度建立自由振动微分方程的。这种推导方法称为柔度法。

2．自由振动微分方程的解

单自由度体系自由振动微分方程(10－1)可改写为

$$\ddot{y}+\omega^2 y=0 \tag{10-2}$$

其中

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{c}$$

式(10－2)是一个齐次方程，其通解为

$$y(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t \tag{d}$$

其中的系数 C_1 和 C_2 可由初始条件确定。设在初始时刻 $t=0$ 质点有初始位移 y_0 和初始速度 v_0，即

$$y(0)=y_0,\quad \dot{y}(0)=v_0$$

由此解出：

$$C_1=\frac{v_0}{\omega},\quad C_2=y_0$$

代入式(d)，即得

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{10-3}$$

由上式看出，振动是由两部分所组成：

一部分是单独由初始位移 y_0（没有初始速度）引起的，质点按 $y_0\cos\omega t$ 的规律振动，如图 10-11a 所示。

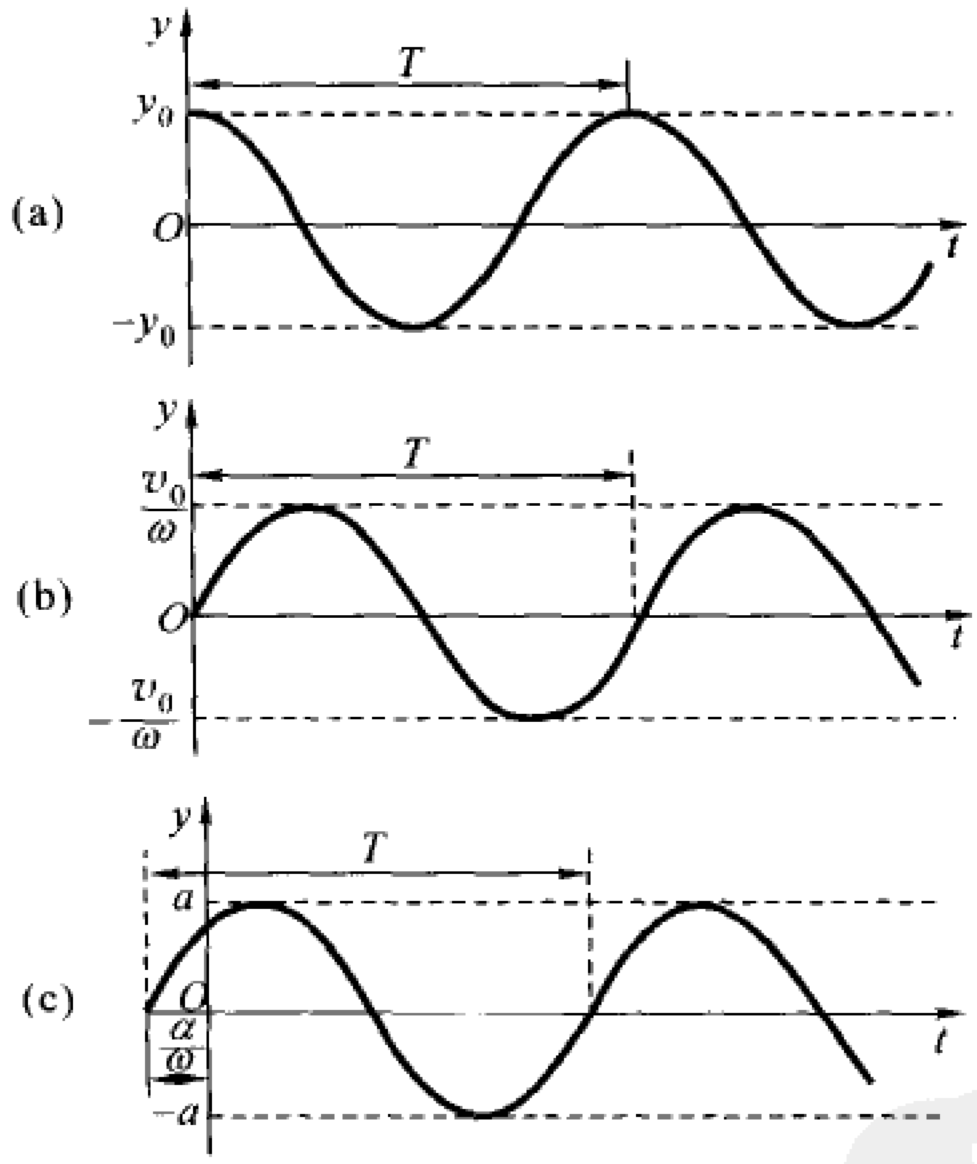


图 10-11

另一部分是单独由初始速度（没有初始位移）引起的，质点按 $\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ 的规律振动，如图 10-11b 所示。

式(10-3)还可改写为

$$y(t)=a\sin(\omega t+\alpha) \tag{10-4}$$

其图形如图 10-11c 所示。其中参数 a 称为振幅，α 称为初始相位角。参数 a、

α 与参数 y_0、v_0 之间的关系可导出如下：

先将式(10－4)的右边展开，得

$$y(t)=a\sin\alpha\cos\omega t+a\cos\alpha\sin\omega t$$

再与式(10－3)比较，即得

$$y_0=a\sin\alpha,\quad \frac{v_0}{\omega}=a\cos\alpha$$

或

$$a=\sqrt{y_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}},\quad \alpha=\tan^{-1}\frac{y_0\omega}{v_0} \qquad (10-5a、b)$$

3．结构的自振周期

式(10－4)的右边是一个周期函数，其周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad (10-6)$$

不难验证，式(10－4)中的位移 $y(t)$ 确实满足周期运动的下列条件：

$$y(t+T)=y(t)$$

这就表明，在自由振动过程中，质点每隔一段时间 T 又回到原来的位置，因此 T 称为结构的自振周期。

自振周期的倒数称为频率，记作 f，

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \qquad (10-7)$$

频率 f 表示单位时间内的振动次数，其常用单位为 Hz 或 s^{-1}。

此外 ω 可称为圆频率或角频率(习惯上有时也称为频率)：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \qquad (10-8)$$

ω 表示在 2π 个单位时间内的振动次数。

下面给出自振周期计算公式的几种形式：

(1) 将式(c)代入式(10－6)，得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (10-9a)$$

(2) 将 $\frac{1}{k}=\delta$ 代入上式，得

$$T=2\pi\sqrt{m\delta} \qquad (10-9b)$$

(3) 将 $m=W/g$ 代入上式，得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{W\delta}{g}} \qquad (10-9c)$$

(4) 令 $W\delta=\Delta_{st}$，得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{st}}{g}} \tag{10-9d}$$

其中 δ 是沿质点振动方向的结构柔度系数，它表示在质点上沿振动方向施加单位荷载时质点沿振动方向所产生的静位移。因此，$\Delta_{st} = W\delta$ 表示在质点上沿振动方向施加数值为 W 的荷载时质点沿振动方向所产生的静位移。

同样，利用式(10－8)，可得出圆频率的计算公式如下：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{W\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} \tag{10-10}$$

由上面的分析可以看出结构自振周期 T 的一些重要性质：

(1) 自振周期与结构的质量和结构的刚度有关，而且只与这二者有关，与外界的干扰因素无关。干扰力的大小只能影响振幅 a 的大小，而不能影响结构自振周期 T 的大小。

(2) 自振周期与质量的平方根成正比，质量越大，则周期越大(频率 f 越小)；自振周期与刚度的平方根成反比，刚度越大，则周期越小(频率 f 越大)；要改变结构的自振周期，只有从改变结构的质量或刚度着手。

(3) 自振周期 T 是结构动力性能的一个很重要的数量标志。两个外表相似的结构，如果周期相差很大，则动力性能相差很大；反之，两个外表看来并不相同的结构，如果其自振周期相近，则在动荷载作用下其动力性能基本一致。地震中常发现这样的现象。所以，自振周期的计算十分重要。

例 10－1　图 10－12 所示为一等截面简支梁，截面抗弯刚度为 EI，跨度为 l。在梁的跨度中点有一个集中质量 m。如果忽略梁本身的质量，试求梁的自振周期 T 和圆频率 ω。

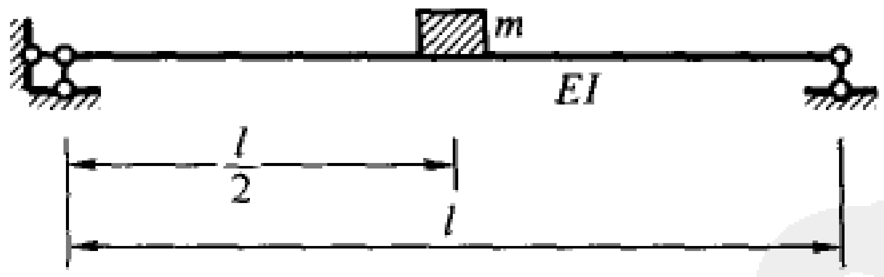


图　10－12

解　对于简支梁跨中质量的竖向振动来说，柔度系数为

$$\delta = \frac{l^3}{48EI}$$

因此，由式(10－9b)和(10－10)得

$$T = 2\pi\sqrt{m\delta} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{48EI}}$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{m\delta}}=\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$$

例 10－2 图 10－13 所示为一等截面竖直悬臂杆，长度为 l，截面面积为 A，惯性矩为 I，弹性模量为 E。杆顶有重物，其重量为 W。设杆件本身质量可忽略不计，试分别求水平振动和竖向振动时的自振周期。

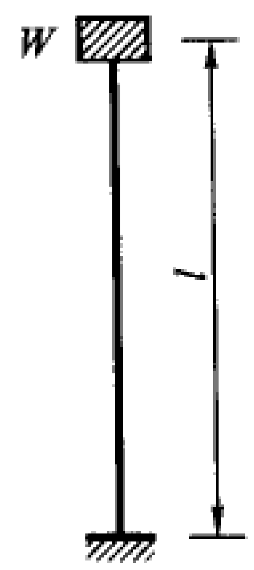


图 10－13

解 (1) 水平振动

当杆顶作用水平力 W 时，杆顶的水平位移为

$$\Delta_{st}=\frac{Wl^3}{3EI}$$

所以

$$T=2\pi\sqrt{\frac{Wl^3}{3EIg}}$$

(2) 竖向振动

当杆顶作用竖向力 W 时，杆顶的竖向位移为

$$\Delta_{st}=\frac{Wl}{EA}$$

所以

$$T=2\pi\sqrt{\frac{Wl}{EAg}}$$

§10－3 单自由度体系的强迫振动

结构在动力荷载作用下的振动称为强迫振动或受迫振动。

图 10－14a 所示为单自由度体系的振动模型，质量为 m，弹簧刚度系数为 k，承受动荷载 $F_P(t)$。取质量 m 作隔离体，如图 10－14b 所示。弹性力 $-ky$、惯性力 $-m\ddot{y}$ 和动荷载 $F_P(t)$ 之间的平衡方程为

$$m\ddot{y}+ky=F_P(t)$$

或写成

$$\ddot{y}+\omega^2y=\frac{F_P(t)}{m} \qquad (10-11)$$

其中 ω 仍是 $\sqrt{\frac{k}{m}}$。

式(10－11)就是单自由度体系强迫振动的微分方程。

下面讨论几种常见的动力荷载作用时结构的振动情况。

1. 简谐荷载

设体系承受如下的简谐荷载：

$$F_P(t) = F\sin\theta t \qquad (a)$$

这里，θ 是简谐荷载的圆频率，F 是荷载的最大值，称为幅值。将式(a)代入式(10－11)，即得运动方程如下：

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{F}{m}\sin\theta t \qquad (b)$$

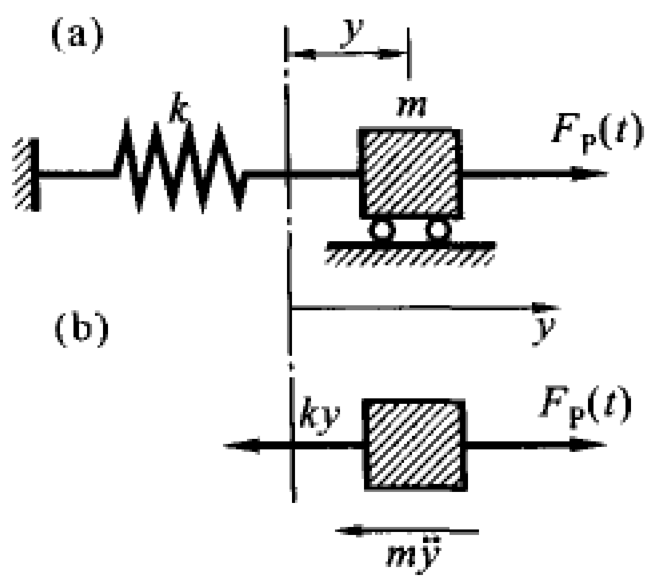


图　10－14

先求方程的特解。设特解为

$$y(t) = A\sin\theta t \qquad (c)$$

将式(c)代入式(b)，得

$$(-\theta^2 + \omega^2)A\sin\theta t = \frac{F}{m}\sin\theta t$$

由此得

$$A = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)}$$

因此特解为

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}\sin\theta t \qquad (d)$$

如令

$$y_{st} = \frac{F}{m\omega^2} = F\delta \qquad (e)$$

则 y_{st} 可称为最大静位移(即把荷载最大值 F 当作静荷载作用时结构所产生的位移)，而特解(d)可写为

$$y(t) = y_{st}\frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}\sin\theta t \qquad (f)$$

微分方程的齐次解已在上节求出，故得通解如下：

$$y(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + y_{st}\frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}\sin\theta t \qquad (g)$$

积分常数 C_1 和 C_2 需由初始条件来求。设在 $t=0$ 时的初始位移和初始速度均为零，则得

$$C_1 = -y_{st}\frac{\frac{\theta}{\omega}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \quad C_2 = 0$$

代入式(g)，即得

$$y(t)=y_{st}\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}\left(\sin\theta t-\frac{\theta}{\omega}\sin\omega t\right) \qquad (10-12)$$

由此看出，振动是由两部分合成的：第一部分按荷载频率 θ 振动，第二部分按自振频率 ω 振动。由于在实际振动过程中存在着阻尼力（参见下节），因此按自振频率振动的那一部分将会逐渐消失，最后只余下按荷载频率振动的那一部分。我们把振动刚开始两种振动同时存在的阶段称为“过渡阶段”，而把后来只按荷载频率振动的阶段称为“平稳阶段”。由于过渡阶段延续的时间较短，因此在实际问题中平稳阶段的振动较为重要。

下面讨论平稳阶段的振动。任一时刻的位移为

$$y(t)=y_{st}\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}\sin\theta t$$

最大位移（即振幅）为

$$[y(t)]_{max}=y_{st}\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}$$

最大动位移 $[y(t)]_{max}$ 与最大静位移 y_{st} 的比值称为动力系数，用 β 表示，即

$$\beta=\frac{[y(t)]_{max}}{y_{st}}=\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}} \qquad (10-13)$$

由此看出，动力系数 β 是频率比值 $\frac{\theta}{\omega}$ 的函数。函数图形如图 10－15 所示，其中横坐标为 $\frac{\theta}{\omega}$，纵坐标为 β 的绝对值（注意，当 $\frac{\theta}{\omega}>1$ 时，β 为负值）。

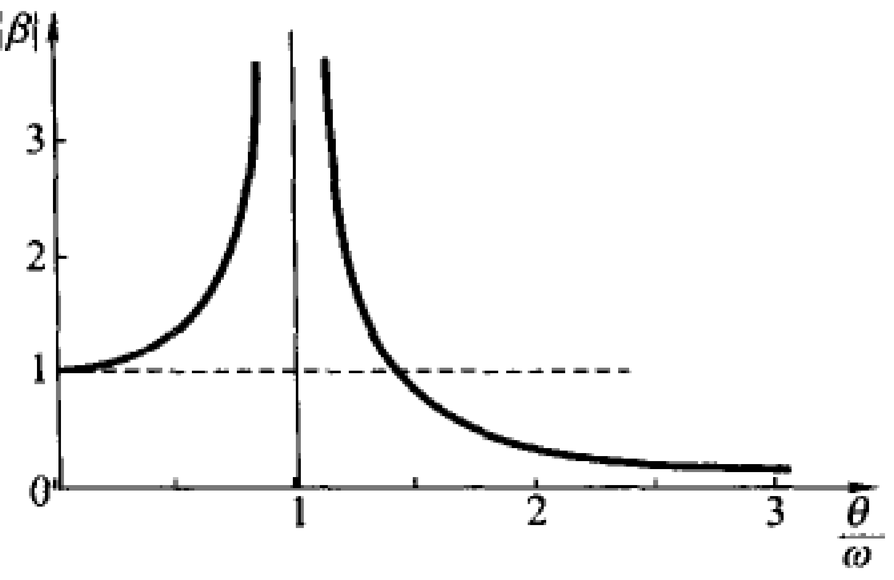


图　10－15

由图 10－15 可看出如下特性：

当$\frac{\theta}{\omega}\to 0$时，动力系数$\beta\to 1$。这时，简谐荷载的数值虽然随时间变化，但变化得非常慢(与结构的自振周期相比)，因而可当作静力荷载处理。

当$0<\frac{\theta}{\omega}<1$时，动力系数$\beta>1$，又$\beta$随$\frac{\theta}{\omega}$的增大而增大。

当$\frac{\theta}{\omega}\to 1$时，$|\beta|\to\infty$。即当荷载频率$\theta$接近于结构自振频率$\omega$时，振幅会无限增大。这种现象称为"共振"。实际上由于存在阻尼力的影响，共振时也不会出现振幅为无限大的情况，但是共振时的振幅比静位移大很多倍的情况是可能出现的。(还需指出，共振现象的形成有一个过程，振幅是由小逐渐变大的，并不是一开始就很大。在简谐振动实验中可以看到这个发展过程。)

当$\frac{\theta}{\omega}>1$时，β的绝对值随$\frac{\theta}{\omega}$的增大而减小。

以上分析了在简谐荷载作用下结构位移幅度随$\frac{\theta}{\omega}$变化的情况。对于结构内力(例如弯矩)也存在类似的情况。

例10-3　设有一简支钢梁，跨度$l=4$ m，采用型号为I28 b的工字钢，惯性矩$I=7\ 480\ \text{cm}^4$，截面系数$W=534\ \text{cm}^3$，弹性模量$E=2.1\times10^5$ MPa。在跨度中点有电动机，重量$G=35$ kN，转速$n=500$ r/min。由于具有偏心，转动时产生离心力$F_P=10$ kN，离心力的竖向分力为$F_P\sin\theta t$。忽略梁本身的质量，试求钢梁在上述竖向简谐荷载作用下强迫振动的动力系数和最大正应力。

解　(1) 简支钢梁的自振频率

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}}=\sqrt{\frac{48EIg}{Gl^3}}=\sqrt{\frac{48\times2.1\times10^4\ \text{kN/cm}^2\times7\ 480\ \text{cm}^4\times980\ \text{cm/s}^2}{35\ \text{kN}\times(400\ \text{cm})^3}}=57.4\ \text{s}^{-1}$$

(2) 荷载的频率

$$\theta=\frac{2\pi n}{60}=2\times3.141\ 6\times\frac{500}{60\ \text{s}}=52.3\text{s}^{-1}$$

(3) 求动力系数β

由(10-13)式

$$\beta=\frac{1}{1-\left(\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}=\frac{1}{1-\left(\frac{52.3\ \text{s}^{-1}}{57.4\ \text{s}^{-1}}\right)^2}=5.88$$

即动力位移和动力应力的最大值为静力值的5.88倍。

(4) 求跨中最大正应力

$$\sigma_{max}=\frac{Gl}{4W}+\beta\frac{F_Pl}{4W}=\frac{(G+\beta F_P)l}{4W}=\frac{(35\ \text{kN}+5.88\times10\ \text{kN})\times400\ \text{cm}}{4\times534\ \text{cm}^3}=175.6\ \text{MPa}$$

式中第一项是电动机重量G产生的正应力，第二项是动荷载$F_P\sin\theta t$产生的最

大正应力。

2．一般动力荷载

现在讨论在一般动力荷载 $F_P(t)$作用下所引起的动力反应。我们分两步讨论：首先讨论瞬时冲量的动力反应，然后在此基础上讨论一般动力荷载的动力反应。

设体系在 $t=0$ 时处于静止状态。然后有瞬时冲量 S 作用。例如，图 10-16 所示为在 Δt 时间内作用荷载F_P，其冲量 S 即为$F_P\Delta t$。由于冲量 S 的作用，体系将产生初速度 $v_0=\dfrac{S}{m}$，但初位移仍为零。利用式(10-3)，即得

$$y(t)=\frac{S}{m\omega}\sin\ \omega t \qquad (10-14)$$

上式就是在 $t=0$ 时作用瞬时冲量 S 所引起的动力反应。

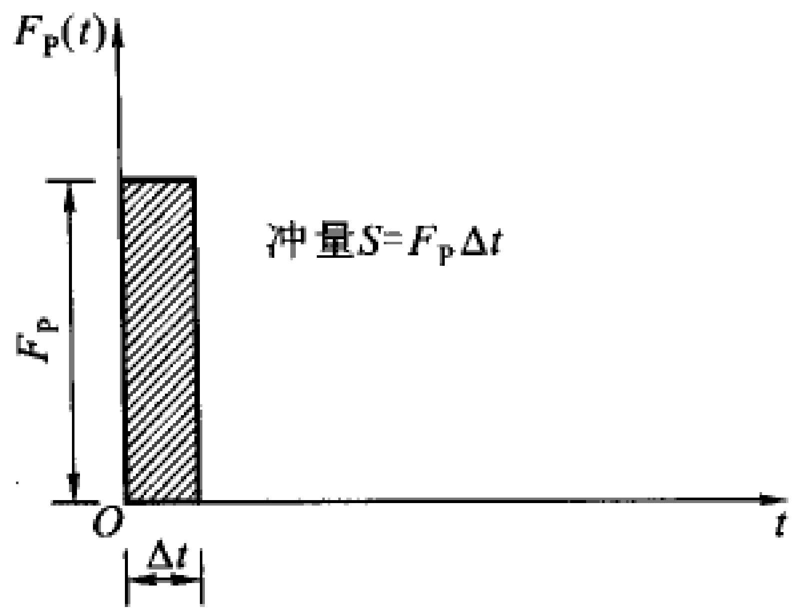


图 10-16

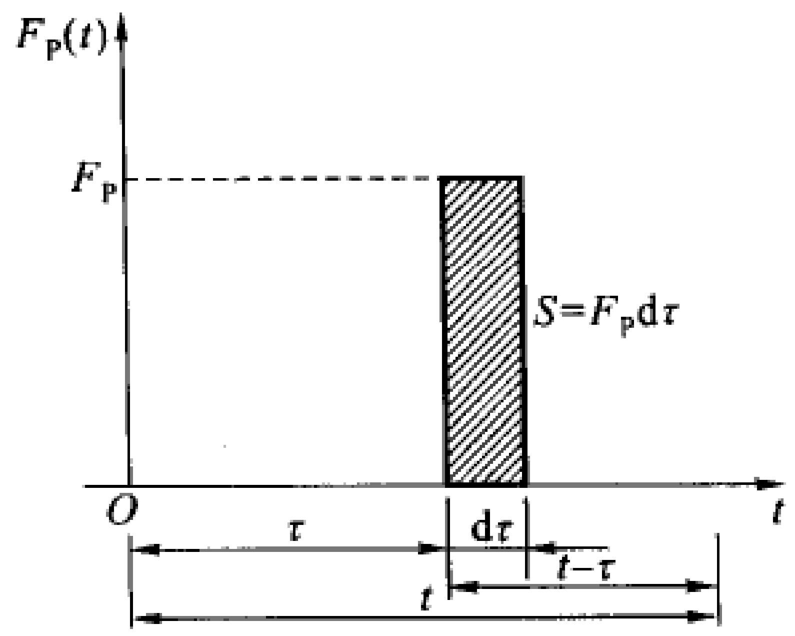


图 10-17

如果在 $t=\tau$ 时作用瞬时冲量S(图 10-17)，则在以后任一时刻 $t(t>\tau)$的位移为

$$y(t)=\frac{S}{m\omega}\sin\ \omega(t-\tau) \qquad (a)$$

现在讨论图 10-18 所示任意动力荷载 $F_P(t)$的动力反应。整个加载过程可看作由一系列瞬时冲量所组成。例如，在时刻 $t=\tau$ 作用的荷载为 $F_P(\tau)$，此荷载在微分时段 $d\tau$ 内产生的冲量为 $dS=F_P(\tau)d\tau$。根据式(a)，此微分冲量引起如下的动力反应：对于 $t>\tau$，

$$dy=\frac{F_P(\tau)d\tau}{m\omega}\sin\ \omega(t-\tau) \qquad (b)$$

然后对加载过程中产生的所有微分反应进行叠加，即对式(b)进行积分，可得出总反应如下：

$$y(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t F_P(\tau)\sin\ \omega(t-\tau)d\tau \qquad (10-15)$$

式(10－15)称为杜哈梅(J.M.C.Duhamel)积分；这就是初始处于静止状态的单自由度体系在任意动力荷载 $F_P(t)$ 作用下的位移公式。如初始位移 y_0 和初始速度 v_0 不为零，则总位移应为

$$y(t) = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{m\omega}\int_0^t F_P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{10-16}$$

下面应用式(10－16)来讨论几种动力荷载的动力反应。

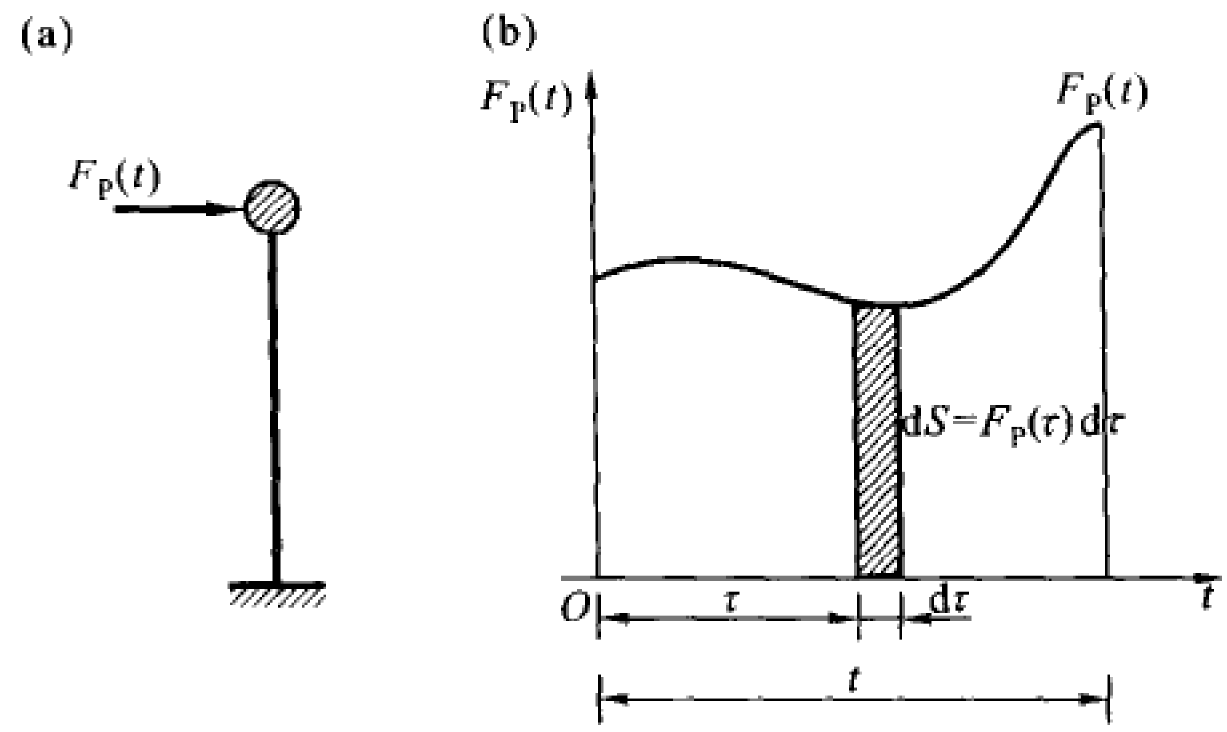


图　10－18

(1) 突加荷载

设体系原处于静止状态。在 $t=0$ 时，突然加上荷载 F_{P0}，并一直作用在结构上。这种荷载称为突加荷载，其表示式为

$$F_P(t)=\begin{cases}0, & 当\ t<0\\ F_{P0}, & 当\ t>0\end{cases} \tag{c}$$

$F_P(t)-t$ 曲线如图 10－19 所示。这是一个阶梯形曲线，在 $t=0$ 处，曲线有间断点。

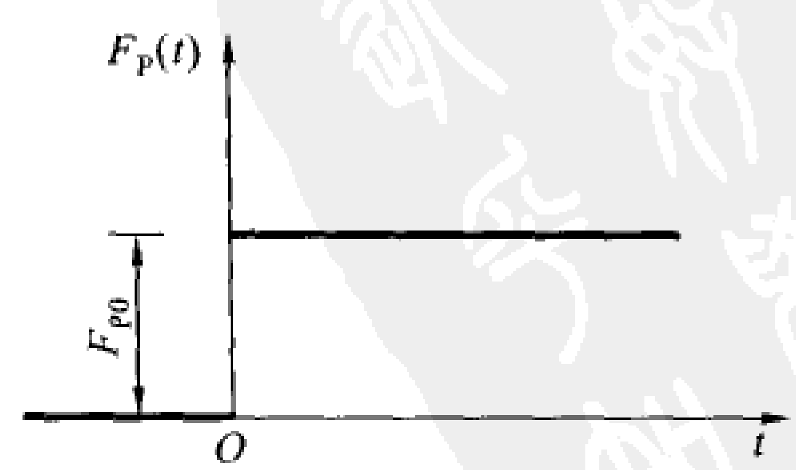


图　10－19

将式(c)中的荷载表示式代入式(10－15)，可得动力位移如下：

当 $t>0$ 时，

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{m\omega}\int_0^t F_{P0}\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{F_{P0}}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)\\ &= y_{st}(1-\cos\omega t)\end{aligned} \tag{10-17}$$

这里，$y_{st}=\dfrac{F_{P0}}{m\omega^2}=F_P\delta$，表示在静力荷载 F_P 作用下所产生的静位移。

根据式(10-17)可作出动力位移图如图 10-20 所示。由图看出，当 $t>0$ 时，质点是围绕其静力平衡位置 $y=y_{st}$ 作简谐运动，动力系数为

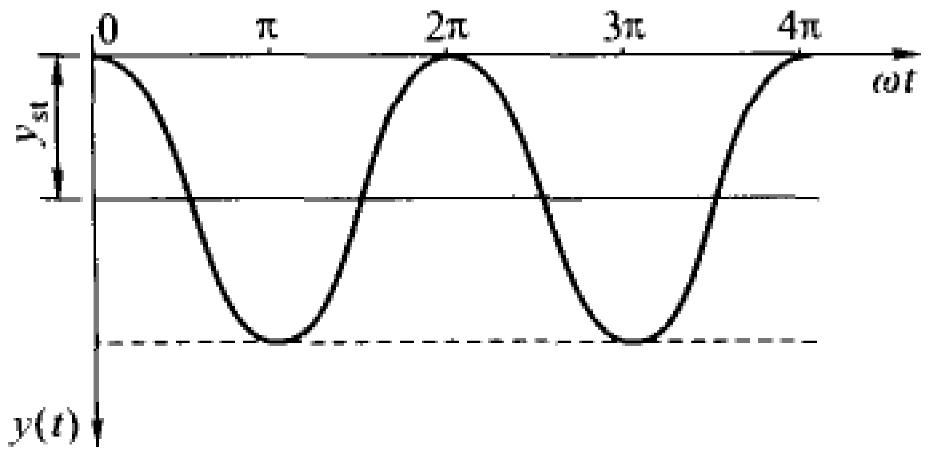


图　10-20

$$\beta=\frac{[y(t)]_{max}}{y_{st}}=2 \tag{10-18}$$

由此看出，突加荷载所引起的最大位移比相应的静位移增大 1 倍。

(2) 短时荷载

荷载 F_{P0} 在时刻 $t=0$ 突然加上，在 $0<t<u$ 时段内，荷载数值保持不变，在时刻 $t=u$ 以后荷载又突然消失。这种荷载可表示为

$$F_P(t)=\begin{cases}0, & 当\ t<0\\ F_{P0}, & 当\ 0<t<u\\ 0, & 当\ t>u\end{cases} \tag{d}$$

$F_P(t)-t$ 曲线如图 10-21 所示。下面分两个阶段计算。

阶段Ⅰ($0\leqslant t\leqslant u$)　此阶段的荷载情况与突加荷载相同，故动力位移仍由式(10-17)给出：对于 $0\leqslant t\leqslant u$，

$$y(t)=y_{st}(1-\cos\omega t) \tag{e}$$

阶段Ⅱ($t\geqslant u$)　此阶段无荷载作用，因此体系为自由振动。以阶段Ⅰ终了时刻($t=u$)的位移 $y(u)$ 和速度 $v(u)$ 作起始位移和起始速度，即可得出动力位移公式。此外，动力位移也可直接由式(10-15)求得。将荷载表示式(d)代入后，即得

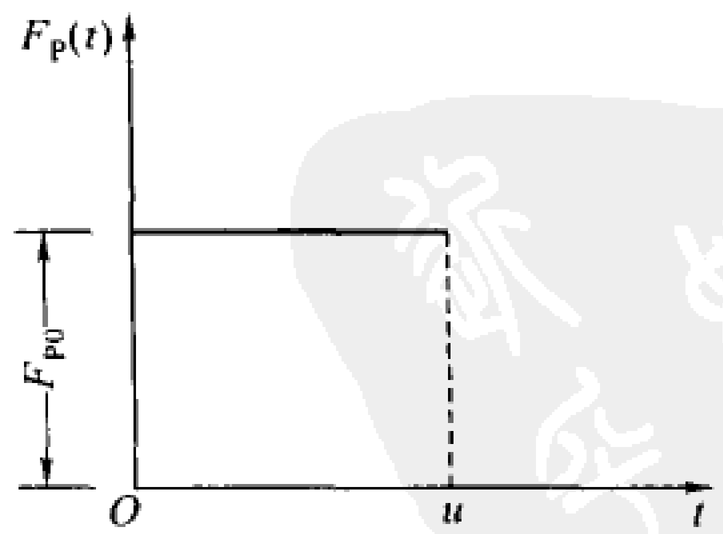


图　10-21

$$y(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^u F_{P0}\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{F_{P0}}{m\omega^2}[\cos\omega(t-u)-\cos\omega t]$$
$$=y_{st}\times 2\sin\frac{\omega u}{2}\sin\omega\left(t-\frac{u}{2}\right) \qquad (10-19)$$

下面讨论体系的最大反应。为此，需分两种情况来讨论。

第一种情况是 $u>\frac{T}{2}$(加载持续时间大于半个自振周期)。这时，最大反应发生在阶段Ⅰ，动力系数为[由式(10-18)]

$$\beta=2 \qquad (f)$$

第二种情况是 $u<\frac{T}{2}$。这时，最大反应发生在阶段Ⅱ，由式(10-19)得知动力位移的最大值为

$$y_{max}=y_{st}\times 2\sin\frac{\omega u}{2}$$

因此，动力系数为

$$\beta=2\sin\frac{\omega u}{2}=2\sin\frac{\pi u}{T} \qquad (g)$$

综合上述两种情况的结果[式(f)和(g)]得

$$\beta=\begin{cases}2\sin\frac{\pi u}{T}, & \frac{u}{T}<\frac{1}{2}\\ 2, & \frac{u}{T}>\frac{1}{2}\end{cases} \qquad (10-20)$$

由此看出，动力系数 β 的数值取决于参数 $\frac{u}{T}$，即短时荷载的动力效果取决于加载持续时间的长短(与自振周期相比)。根据式(10-20)，可画出 β 与 $\frac{u}{T}$ 间的关系曲线如图10-22。这种动力系数 β 与动荷时间比值 $\frac{u}{T}$ 之间的关系曲线，称为动力系数反应谱。

(3) 线性渐增荷载

在一定时间内($0\leqslant t\leqslant t_r$)，荷载由0增至 F_{P0}，然后荷载值保持不变(图10-23)。荷载表示式为

$$F_P(t)=\begin{cases}\frac{F_{P0}}{t_r}t, & 当\ 0\leqslant t\leqslant t_r,\\ F_{P0}, & 当\ t\geqslant t_r\end{cases}$$

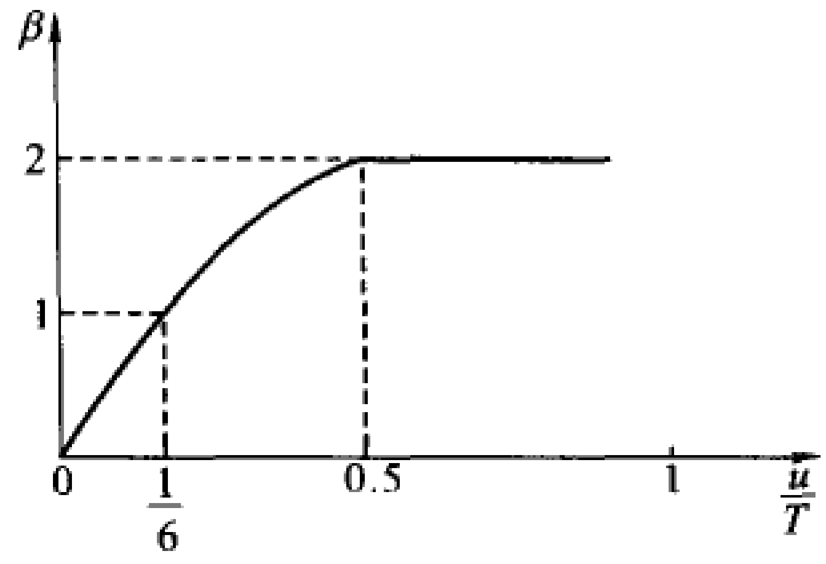


图 10-22

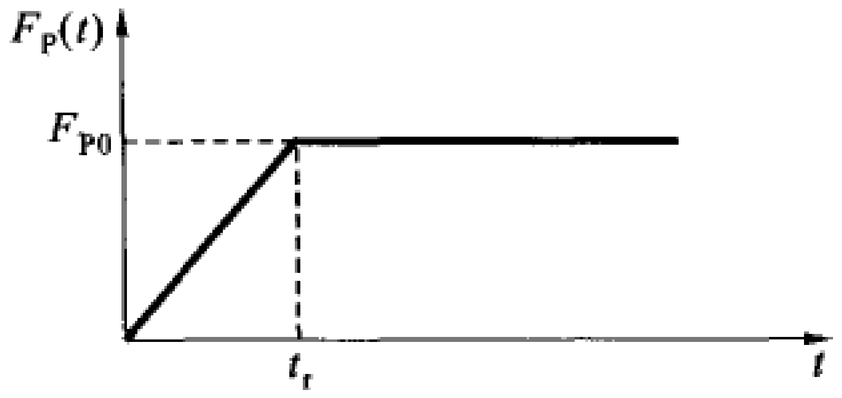


图 10-23

这种荷载引起的动力反应同样可利用杜哈梅公式求解，结果如下：

$$y(t)=\begin{cases} y_{st}\dfrac{1}{t_r}\left(t-\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right), & \text{当 } t\leqslant t_r \\ y_{st}\left\{1-\dfrac{1}{\omega t_r}[\sin\omega t-\sin\omega(t-t_r)]\right\}, & \text{当 } t\geqslant t_r \end{cases} \qquad (10-21)$$

对于这种线性渐增荷载，其动力反应与升载时间 t_r 的长短有很大关系。图 10-24 所示曲线表示动力系数 β 随升载时间比值$\frac{t_r}{T}$而变化的情形，即动力系数的反应谱曲线。

由图 10-24 看出，动力系数 β 介乎 1 与 2 之间。如果升载时间很短，例如 $t_r<\frac{T}{4}$，则动力系数 β 接近于 2.0，即相当于突加荷载的情况。如果升载时间很长，例如 $t_r>4T$，则动力系数 β 接近于 1.0，即相当于静力荷载的情况。在设计工作中，常以图 10-24 中所示外包虚线作为设计依据。

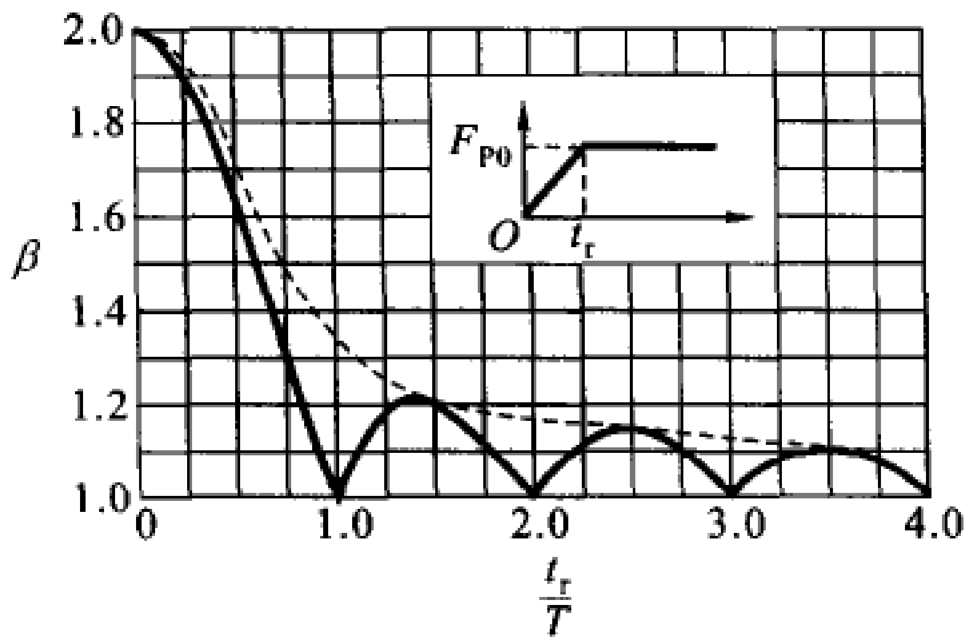


图 10-24

§10－4 阻尼对振动的影响

以上各节是在忽略阻尼影响的条件下研究体系的振动问题。所得的结果大体上反映实际结构的振动规律，例如结构的自振频率是结构本身一个固有值的结论，在简谐荷载作用下有可能出现共振现象的结论，等等。但是也有一些结果与实际振动情况不尽相符，例如自由振动时振幅永不衰减的结论，共振时振幅可趋于无限大的结论，等等。因此，为了进一步了解结构的振动规律，有必要对阻尼力这个因素加以考虑。

振动中的阻尼力有多种来源，例如振动过程中结构与支承之间的摩擦，材料之间的内摩擦，周围介质的阻力，等等。

阻尼力对质点运动起阻碍作用。从方向上看，它总是与质点的速度方向相反。从数值上看，它与质点速度的关系有如下不同情况：

(1) 阻尼力与质点速度成正比，这种阻尼力比较常用，称为粘滞阻尼力。

(2) 阻尼力与质点速度的平方成正比，固体在流体中运动受到的阻力属于这一类。

(3) 阻尼力的大小与质点速度无关，摩擦力属于这一类。

在上述几种阻尼力中，粘滞阻尼力的分析比较简便，其他类型的阻尼力也可化为等效粘滞阻尼力来分析。因此，下面只对粘滞阻尼力的情形加以讨论。

具有阻尼的单自由度体系的振动模型如图10－25a所示，体系的质量为m，承受动荷载$F_P(t)$的作用。体系的弹性性质用弹簧表示，弹簧的刚度系数为k。体系的阻尼性质用阻尼减震器表示，阻尼常数为c。取质量m为隔离体，如图10－25b所示，弹性力$-ky$、阻尼力$-c\dot{y}$、惯性力$-m\ddot{y}$和动力荷载$F_P(t)$之间

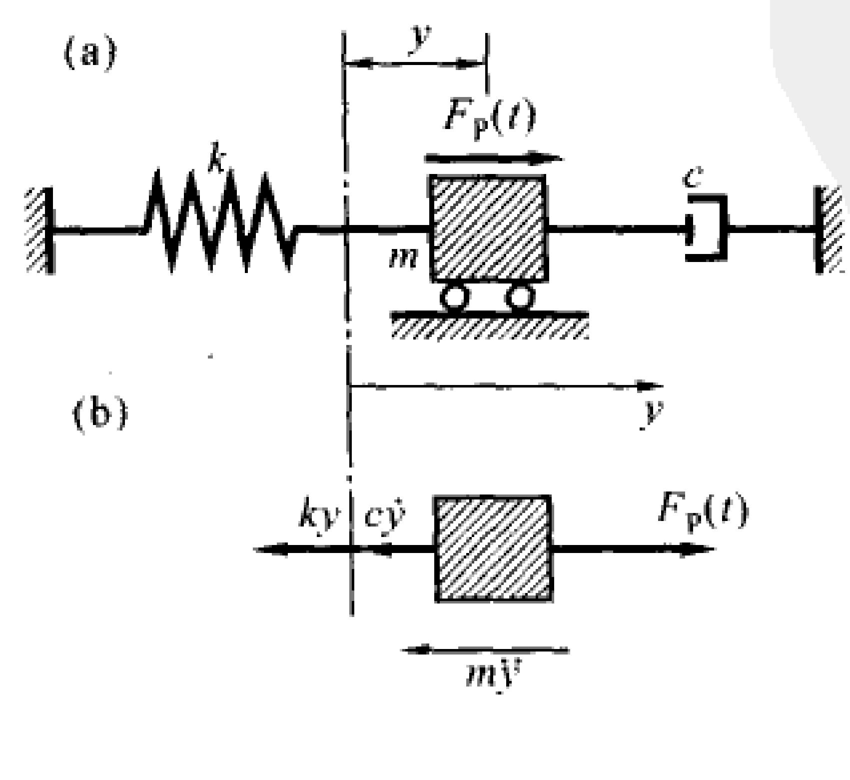


图 10－25

的平衡方程为

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_{\mathrm{P}}(t) \tag{10-22}$$

下面分别讨论自由振动和强迫振动。

1. 有阻尼的自由振动

在式(10－22)中令 $F_{\mathrm{P}}(t)=0$,即为自由振动的方程,它可改写为

$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2y=0 \tag{10-23}$$

其中

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \xi=\frac{c}{2m\omega} \tag{10-24}$$

设微分方程(10－23)的解为如下形式:

$$y(t)=Ce^{\lambda t}$$

则 λ 由下列特征方程所确定:

$$\lambda^2+2\xi\omega\lambda+\omega^2=0$$

其解为

$$\lambda=\omega(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}) \tag{10-25}$$

根据 $\xi<1$、$\xi=1$、$\xi>1$ 三种情况,可得出三种运动形态,现分述如下。

(1) 考虑 $\xi<1$ 的情况(即低阻尼情况)。令

$$\omega_{\mathrm{r}}=\omega\sqrt{1-\xi^2} \tag{10-26}$$

则

$$\lambda=-\xi\omega\pm i\omega_{\mathrm{r}}$$

此时,微分方程(10－23)的解为

$$y(t)=e^{-\xi\omega t}(C_1\cos\omega_{\mathrm{r}}t+C_2\sin\omega_{\mathrm{r}}t)$$

再引入初始条件,即得

$$y(t)=e^{-\xi\omega t}\left(y_0\cos\omega_{\mathrm{r}}t+\frac{v_0+\xi\omega y_0}{\omega_{\mathrm{r}}}\sin\omega_{\mathrm{r}}t\right) \tag{10-27}$$

上式也可写成

$$y(t)=e^{-\xi\omega t}a\sin(\omega_{\mathrm{r}}t+\alpha) \tag{10-28}$$

其中

$$a=\sqrt{y_0^2+\frac{(v_0+\xi\omega y_0)^2}{\omega_{\mathrm{r}}^2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{y_0\omega_{\mathrm{r}}}{v_0+\xi\omega y_0}$$

由式(10－28)或(10－27)可画出低阻尼体系自由振动时的 $y-t$ 曲线,如图10－26所示。这是一条逐渐衰减的波动曲线。

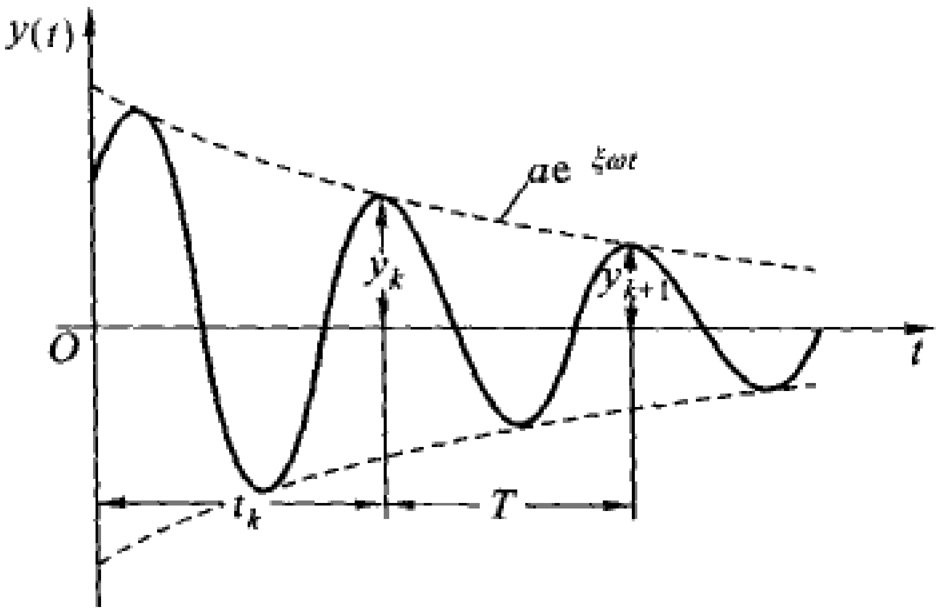


图　10－26

将图 10－26 与图 10－11c 相比，可看出在低阻尼体系中阻尼对自振频率和振幅的影响。

首先，看阻尼对自振频率的影响。在式(10－28)中，ω_r 是低阻尼体系的自振圆频率。有阻尼与无阻尼的自振圆频率 ω_r 和 ω 之间的关系由式(10－26)给出。由此可知，在 $\xi<1$ 的低阻尼情况下，ω_r 恒小于 ω，而且 ω_r 随 ξ 值的增大而减小。此外，在通常情况下，ξ 是一个小数。如果 $\xi<0.2$，则 $0.979\,8<\frac{\omega_r}{\omega}<1$，即 ω_r 与 ω 的值很相近。因此，在 $\xi<0.2$ 的情况下，阻尼对自振频率的影响不大，可以忽略。

其次，看阻尼对振幅的影响。在式(10－28)中，振幅为 $ae^{-\xi\omega t}$。由此看出，由于阻尼的影响，振幅随时间而逐渐衰减。还可看出，经过一个周期 T 后($T=\frac{2\pi}{\omega_r}$)，相邻两个振幅 y_{k+1} 与 y_k 的比值为

$$\frac{y_{k+1}}{y_k}=\frac{e^{-\xi\omega(t_k+T)}}{e^{-\xi\omega t_k}}=e^{-\xi\omega T}$$

由此可见，ξ 值愈大，则衰减速度愈快。

由此可得

$$\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}=\xi\omega T=\xi\omega\frac{2\pi}{\omega_r}$$

因此

$$\xi=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega_r}{\omega}\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}$$

如果 $\xi<0.2$，则 $\frac{\omega_r}{\omega}\approx1$，而

$$\xi\approx\frac{1}{2\pi}\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}$$

这里，$\ln\frac{y_k}{y_{k+1}}$称为振幅的对数递减率。同样，用 y_k 和 y_{k+n} 表示两个相隔 n 个周期的振幅，可得

$$\xi=\frac{1}{2\pi n}\frac{\omega_r}{\omega}\ln\frac{y_k}{y_{k+n}}$$

当$\frac{\omega_r}{\omega}\approx1$时，

$$\xi\approx\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{y_k}{y_{k+n}} \qquad (10-29)$$

(2) 考虑 $\xi=1$ 的情形。此时由式(10－25)得

$$\lambda=-\omega$$

因此，微分方程(10－23)的解为

$$y=(C_1+C_2t)e^{-\omega t}$$

再引入起始条件，得

$$y=[y_0(1+\omega t)+v_0t]e^{-\omega t}$$

其 $y-t$ 曲线如图 10－27 所示。这条曲线仍然具有衰减性质，但不具有图 10－26那样的波动性质。

综合以上的讨论可知：当 $\xi<1$ 时，体系在自由反应中是会引起振动的；而当阻尼增大到 $\xi=1$ 时，体系在自由反应中即不再引起振动，这时的阻尼常数称为临界阻尼常数，用 c_r 表示。在式(10－24)中令 $\xi=1$，即知临界阻尼常数为

$$c_r=2m\omega=2\sqrt{mk} \qquad (10-30)$$

由式(10－24)和(10－30)得

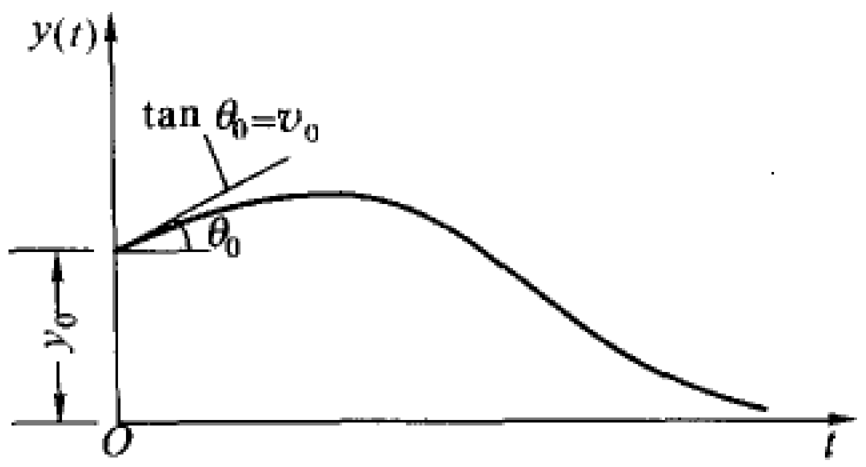


图　10－27

$$\xi=\frac{c}{c_r}$$

参数 ξ 表示阻尼常数 c 与临界阻尼常数 c_r 的比值，称为阻尼比。阻尼比 ξ 是反映阻尼情况的基本参数，它的数值可以通过实测得到。例如，在低阻尼体系中，

如果我们测得了两个振幅值 y_k 和 y_{k+n}，则由式(10－29)即可推算出 ξ 值，由式(10－24)可确定阻尼常数。

至于 $\xi>1$ 的情形。体系在自由反应中仍不出现振动现象。由于在实际问题中很少遇到这种情况，故不作进一步讨论。

2．有阻尼的强迫振动

有阻尼体系(设 $\xi<1$)承受一般动力荷载 $F_P(t)$ 时，它的反应也可表示为杜哈梅积分，与无阻尼体系的式(10－15)相似，推导方法也相似。

首先，由式(10－27)可知，单独由初始速度 v_0(初始位移 y_0 为零)所引起的振动为

$$y(t)=e^{-\xi\omega t}\frac{v_0}{\omega_r}\sin\omega_r t \tag{a}$$

由于冲量 $S=mv_0$，故在初始时刻由冲量 S 引起的振动为

$$y(t)=e^{-\xi\omega t}\frac{S}{m\omega_r}\sin\omega_r t \tag{b}$$

其次，任意荷载 $F_P(t)$ 的加载过程可看作由一系列瞬时冲量所组成。在由 $t=\tau$ 到 $t=\tau+d\tau$ 的时段内荷载的微分冲量为 $dS=F_P(\tau)d\tau$，此微分冲量引起如下的动力反应：对于 $t>\tau$，

$$dy=\frac{F_P(\tau)d\tau}{m\omega_r}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_r(t-\tau) \tag{c}$$

然后对式(c)进行积分，即得总反应如下：

$$y(t)=\int_0^t\frac{F_P(\tau)}{m\omega_r}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_r(t-\tau)d\tau \tag{10-31}$$

这就是开始处于静止状态的单自由度体系在任意荷载 $F_P(t)$ 作用下所引起的有阻尼的强迫振动的位移公式。

如果还有初始位移 y_0 和初始速度 v_0，则总位移为

$$y(t)=e^{-\xi\omega t}\left(y_0\cos\omega_r t+\frac{v_0+\xi\omega y_0}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)+\int_0^t\frac{F_P(\tau)}{m\omega_r}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_r(t-\tau)d\tau \tag{10-32}$$

下面讨论突加荷载和简谐荷载两种情形。

(1) 突加荷载 F_{P0}

此时，由式(10－31)可得动力位移如下：当 $t>0$ 时，

$$y(t)=\frac{F_{P0}}{m\omega^2}\left[1-e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_r t-\frac{\xi\omega}{\omega_r}\sin\omega_r t\right)\right] \tag{10-33}$$

此式与无阻尼体系的式(10－17)相对应。

根据式(10－33)可作出动力位移图如图 10－28 所示(此图可与无阻尼体系的图 10－20 相对应)。由图看出,具有阻尼的体系在突加荷载作用下,最初所引起的最大位移可能接近静力位移 $y_{st}=\dfrac{F_{P0}}{m\omega^2}$ 的 2 倍,然后经过衰减振动,最后停留在静力平衡位置上。

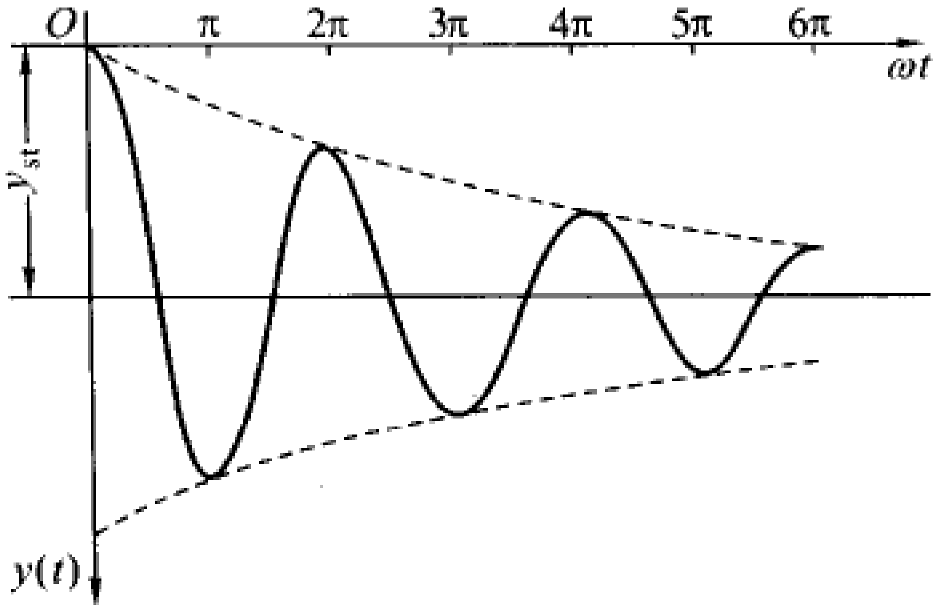


图　10－28

(2) 简谐荷载 $F_P(t)=F\sin\theta t$

在式(10－22)中令 $F_P(t)=F\sin\theta t$,即得简谐荷载作用下有阻尼体系的振动微分方程:

$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2y=\frac{F}{m}\sin\theta t \tag{10-34}$$

首先,求方程的特解。设特解为

$$y=A\sin\theta t+B\cos\theta t$$

代入式(10－34),可得

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{F}{m}\frac{\omega^2-\theta^2}{(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2}\\B&=\frac{F}{m}\frac{-2\xi\omega\theta}{(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2}\end{aligned}\right\}$$

其次,叠加方程的齐次解,即得方程的全解如下:

$$y(t)=\{e^{-\xi\omega t}(C_1\cos\omega_r t+C_2\sin\omega_r t)\}+\{A\sin\theta t+B\cos\theta t\}$$

其中两个常数 C_1 和 C_2 由初始条件确定。

上式的右边分为两部分(各用大括号标出),表明体系的振动系由两个具有不同频率(ω_r 和 θ)的振动所组成。由于阻尼作用,频率为 ω_r 的第一部分含有因子 $e^{-\xi\omega t}$,因此将逐渐衰减而最后消失。频率为 θ 的第二部分由于受到荷载的周期影响而不衰减,这部分振动称为平稳振动。

下面讨论平稳振动。任一时刻的动力位移可改用下式来表示：

$$y(t)=y_p\sin(\theta t-\alpha) \tag{10-35a}$$

其中

$$y_p=y_{st}\left[\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\theta^2}{\omega^2}\right]^{-1/2}$$

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{2\xi\left(\dfrac{\theta}{\omega}\right)}{1-\left(\dfrac{\theta}{\omega}\right)^2} \tag{10-35b}$$

这里，y_p 表示振幅，y_{st} 表示荷载最大值 F 作用下的静力位移。由此可求得动力系数如下：

$$\beta=\frac{y_p}{y_{st}}=\left[\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\theta^2}{\omega^2}\right]^{-1/2} \tag{10-36}$$

上式表明，动力系数 β 不仅与频率比值 $\frac{\theta}{\omega}$ 有关，而且与阻尼比 ξ 有关。对于不同的 ξ 值，可画出相应的 β 与 $\frac{\theta}{\omega}$ 之间的关系曲线，如图 10－29 所示。

由图 10－29 和以上的讨论，可得以下几点：

第一，随着阻尼比 ξ 值的增大（在 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 的范围内），在图 10－29 中相应的曲线渐趋平缓，由险峻的高山下降为平缓的小丘，特别是在 $\frac{\theta}{\omega}=1$ 附近，β 的峰值下降得最为显著。

第二，在 $\frac{\theta}{\omega}=1$ 的共振情况下，动力系数可由式（10－36）求得

$$\beta\Big|_{\frac{\theta}{\omega}=1}=\frac{1}{2\xi} \tag{10-37}$$

如果忽略阻尼的影响，在式（10－37）中令 $\xi\to0$，则得出无阻尼体系共振时动力系数趋于无穷大的结论。但是如果考虑阻尼的影响，则式（10－37）中的 ξ 不为零，因而得出共振时动力系数总是一个有限值的结论。因此，为了研究共振时的动力反应，阻尼的影响是不容忽略的。

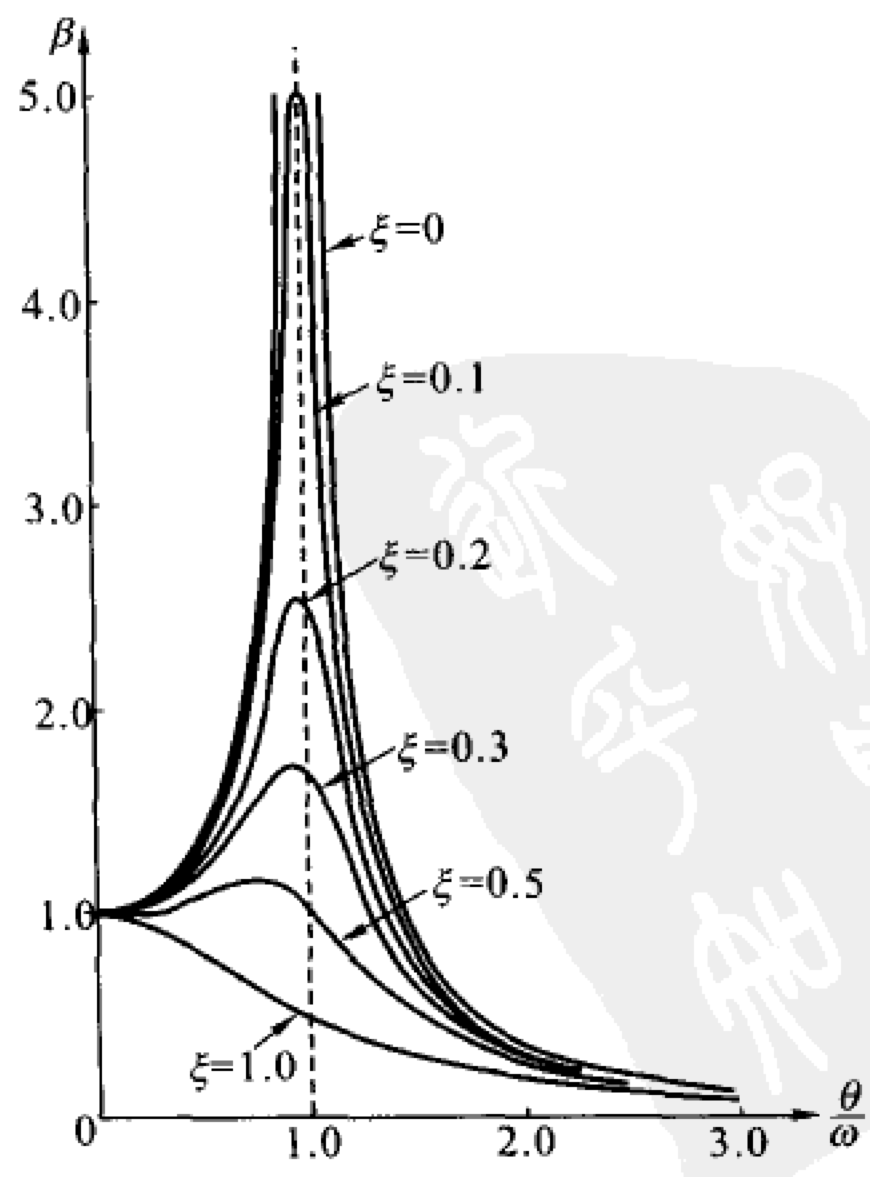


图　10－29

第三，在阻尼体系中，$\frac{\theta}{\omega}=1$ 共振

时的动力系数并不等于最大的动力系数 β_{max}，但二者的数值比较接近。利用式(10-36)，求 β 对参数 $\frac{\theta}{\omega}$ 的导数，并令导数为零，可求出 β 为峰值时相应的频率比 $\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$。对于 $\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的实际结构，可得

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)=\sqrt{1-2\xi^2}$$

代入式(10-36)，即得

$$\beta_{max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

由此可见，对于 $\xi\neq0$ 的阻尼体系，

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)\neq1,\quad \beta_{max}\neq\beta\Big|_{\frac{\theta}{\omega}=1}$$

但是由于通常情况下的 ξ 值很小，因此可近似地认为

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)\approx1,\quad \beta_{max}\approx\beta\Big|_{\frac{\theta}{\omega}=1}$$

第四，由式(10-35a)看出，阻尼体系的位移比荷载滞后一个相位角 α. α 值可由式(10-35b)求出。下面是三个典型情况的相位角：

当 $\frac{\theta}{\omega}\to0$ 时，$(\theta\ll\omega)$，$\alpha\to0°$（$y(t)$ 与 $F_P(t)$ 同步）；

当 $\frac{\theta}{\omega}\to1$ 时，$(\theta\approx\omega)$，$\alpha\to90°$；

当 $\frac{\theta}{\omega}\to\infty$ 时，$(\theta\gg\omega)$，$\alpha\to180°$（$y(t)$ 与 $F_P(t)$ 方向相反）。

上述三种典型情况的结果可结合各自的受力特点来说明。

当荷载频率很小时 $(\theta\ll\omega)$，体系振动很慢，因此惯性力和阻尼力都很小，动荷载主要与弹性力平衡。由于弹性力与位移成正比，但方向相反，故荷载与位移基本上是同步的。

当荷载频率很大时 $(\theta\gg\omega)$，体系振动很快，因此惯性力很大，弹性力和阻尼力相对说来比较小，动荷载主要与惯性力平衡。由于惯性力与位移是同相位的，因此荷载与位移的相位角相差 180°，即方向彼此相反。

当荷载频率接近自振频率时 $(\theta\approx\omega)$，$y(t)$ 与 $F_P(t)$ 相差的相位角接近 90°。因此，当荷载值为最大时，位移和加速度接近于零，因而弹性力和惯性力都接近于零，这时动力荷载主要由阻尼力相平衡。由此可见，在共振情况下，阻尼力起重要作用，它的影响是不容忽略的。

§10－5 两个自由度体系的自由振动

在工程实际中，很多问题可以简化成单自由度体系进行计算，但也有一些问题不能这样处理。例如，多层房屋的侧向振动、不等高排架的振动等都要当成多自由度体系进行计算。按建立运动方程的方法，多自由度体系自由振动的求解的方法有两种：刚度法和柔度法。刚度法是从平衡方程出发建立基本微分方程，柔度法从位移协调方程出发建立基本微分方程。本节只讨论两个自由度体系的自由振动问题。

1. 刚度法

图 10－30a 所示为一具有两个集中质量的体系，具有两个自由度。现按刚度法推导无阻尼自由振动的微分方程。

取质量 m_1 和 m_2 作隔离体，如图 10－30b 所示。隔离体 m_1 和 m_2 所受的力有下列两种：

1）惯性力 $-m_1\ddot{y}_1$ 和 $-m_2\ddot{y}_2$，分别与加速度 $\ddot{y}_1$ 和 $\ddot{y}_2$ 的方向相反。

2）弹性力 r_1 和 r_2 分别与位移 y_1 和 y_2 的方向相反。

根据达朗伯原理，可列出平衡方程如下：

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + r_1 = 0 \\ m_2\ddot{y}_2 + r_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

弹性力 r_1、r_2 是质量 m_1、m_2 与结构之间的相互作用力。图 10－30b 中的 r_1、r_2 是质点受到的力，图 10－30c 中的 r_1、r_2 是结构所受的力，二者的方向彼此相反。在图 10－30c 中，结构所受的力 r_1、r_2 与结构的位移 y_1、y_2 之间应满足刚度方程：

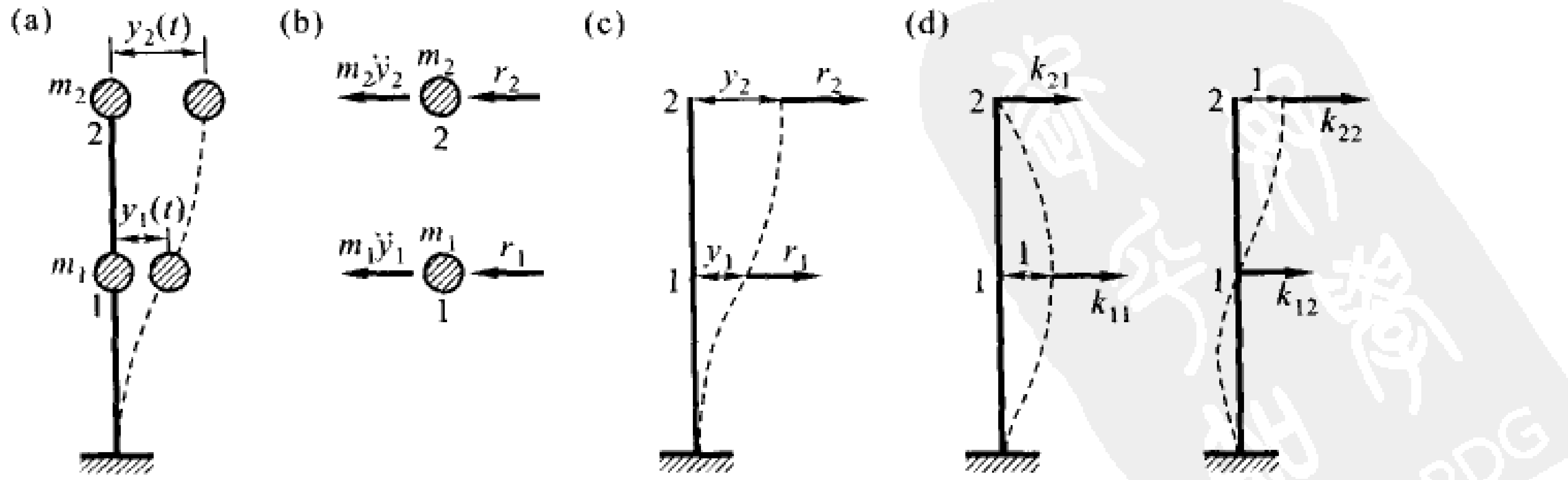


图 10－30

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= k_{11}y_1 + k_{12}y_2 \\ r_2 &= k_{21}y_1 + k_{22}y_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

这里，k_{ij} 是结构的刚度系数（图 10-30d）。例如，k_{12} 是使点 2 沿运动方向产生单位位移（点 1 位移保持为零）时在点 1 需施加的力。

将式(b)代入式(a)，可得

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1(t) + k_{11}y_1(t) + k_{12}y_2(t) = 0 \\ m_2\ddot{y}_2(t) + k_{21}y_1(t) + k_{22}y_2(t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10-38)$$

这就是按刚度法建立的两个自由度无阻尼体系的自由振动微分方程。

下面求微分方程(10-38)的解。与单自由度体系自由振动的情况一样，这里也假设两个质点为简谐振动，式(10-38)的解设为如下形式：

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) = Y_1\sin(\omega t + \alpha) \\ y_2(t) = Y_2\sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

上式所表示的运动具有以下特点：

1）在振动过程中，两个质点具有相同的频率 ω 和相同的相位角 α，Y_1 和 Y_2 是位移幅值。

2）在振动过程中，两个质点的位移在数值上随时间而变化，但二者的比值始终保持不变，即

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \frac{Y_1}{Y_2} = \text{常数}$$

这种结构位移形状保持不变的振动形式可称为主振型或振型。

将式(c)代入式(10-38)，消去公因子 $\sin(\omega t + \alpha)$ 后，得

$$\left.\begin{aligned} (k_{11} - \omega^2 m_1)Y_1 + k_{12}Y_2 = 0 \\ k_{21}Y_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2)Y_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10-39)$$

上式为 Y_1、Y_2 的齐次方程，$Y_1 = Y_2 = 0$ 虽然是方程的解，但它相应于没有发生振动的静止状态。为了要得到 Y_1、Y_2 不全为零的解答，应使其系数行列式为零，即

$$D = \begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10-40a)$$

上式称为频率方程或特征方程，用它可以求出频率 ω。

将上式展开：

$$(k_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - k_{12}k_{21} = 0 \quad (10-40b)$$

整理后，得

$$(\omega^2)^2 - \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{m_1 m_2} = 0$$

上式是 ω^2 的二次方程，由此可解出 ω^2 的两个根：

$$\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right)\pm\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right)\right]^2-\frac{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}{m_1m_2}} \tag{10-41}$$

可以证明这两个根都是正的。由此可见，具有两个自由度的体系共有两个自振频率。用 ω_1 表示其中最小的圆频率，称为第一圆频率或基本圆频率。另一个圆频率 ω_2 称为第二圆频率。

求出自振圆频率 ω_1 和 ω_2 之后，再来确定它们各自相应的振型。

将第一圆频率 ω_1 代入式(10－39)。由于行列式 $D=0$，方程组中的两个方程是线性相关的，实际上只有一个独立的方程。由式(10－39)的任一个方程可求出比值 Y_1/Y_2，这个比值所确定的振动形式就是与第一圆频率 ω_1 相对应的振型，称为第一振型或基本振型。例如，由式(10－39)的第一式可得

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}}=-\frac{k_{12}}{k_{11}-\omega_1^2m_1} \tag{10-42a}$$

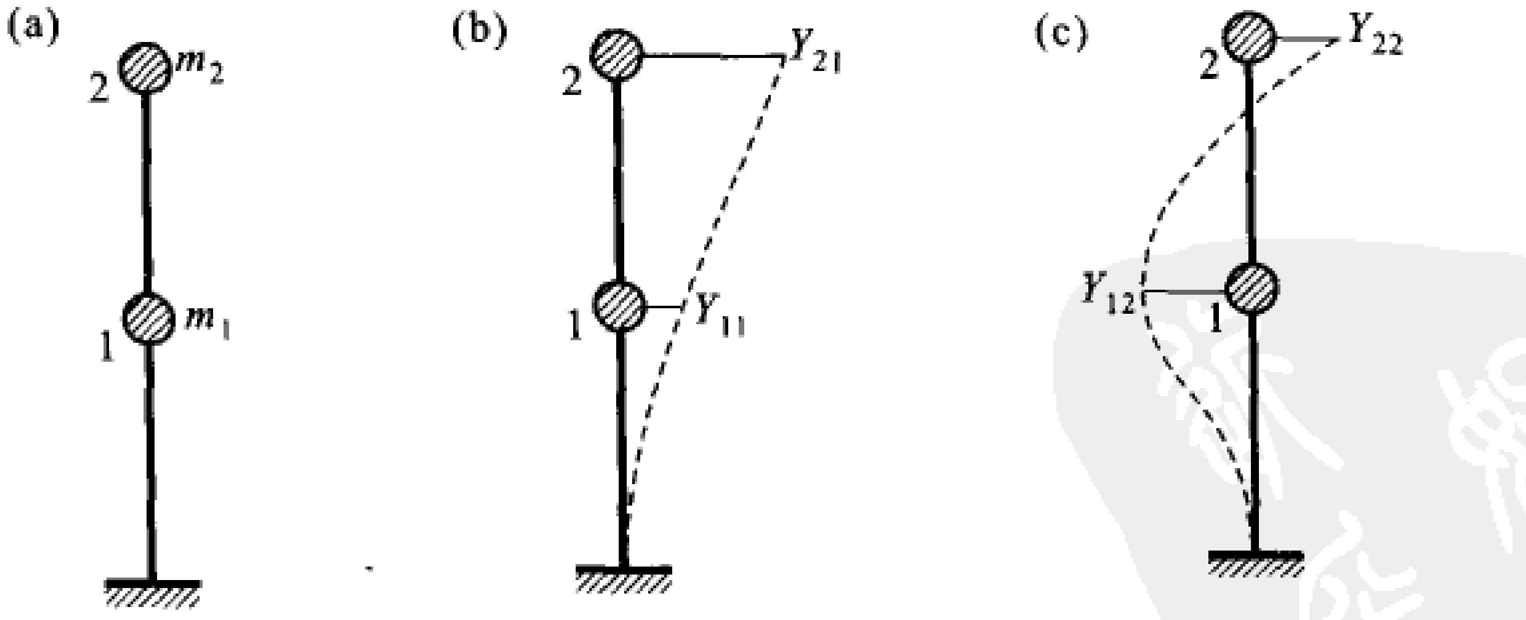
这里，Y_{11} 和 Y_{21} 分别表示第一振型中质点 1 和 2 的振幅。

同样，将 ω_2 代入式(10－39)，可以求出 Y_1/Y_2 的另一个比值。这个比值所确定的另一个振动形式称为第二振型。例如，仍由式(10－39)的第一式可得

$$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}=-\frac{k_{12}}{k_{11}-\omega_2^2m_1} \tag{10-42b}$$

这里，Y_{12} 和 Y_{22} 分别表示第二振型中质点 1 和 2 的振幅。

上面求出的两个振型分别如图 10－31b、c 所示。



第一主振型，基本频率 ω_1　　第二主振型，第二频率 ω_2

图 10－31

两个自由度体系如果按某个主振型自由振动时，由于它的振动形式保持不

变，因此这个两个自由度体系实际上是像一个单自由度体系那样在振动。两个自由度体系能够按某个主振型自由振动的条件是：初始位移和初始速度应当与此主振型相对应。

在一般情形下，两个自由度体系的自由振动可看作是两种频率及其主振型的组合振动，即

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)&=A_1Y_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+A_2Y_{12}\sin(\omega_2t+\alpha_2)\\ y_2(t)&=A_1Y_{21}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+A_2Y_{22}\sin(\omega_2t+\alpha_2)\end{aligned}\right\}$$

这就是微分方程(10－38)的全解。其中两对待定常数 A_1、α_1 和 A_2、α_2 可由初始条件来确定。

从上面的讨论中可归纳出几点：

第一，在两个(或多个)自由度体系自由振动问题中，主要问题是确定体系的全部自振频率及其相应的主振型。

第二，两个(或多个)自由度体系的自振频率不止一个，其个数与自由度的个数相等。自振频率可由特征方程求出。

第三，每个自振频率有自己相应的主振型。主振型就是多自由度体系能够按单自由度振动时所具有的特定形式。

第四，与单自由度体系相同，多自由度体系的自振频率和主振型也是体系本身的固有性质。由式(10－41)看出，自振频率只与体系本身的刚度系数及其质量的分布情形有关，而与外部荷载无关。

例 10－4　图10－32a 所示两层刚架，其横梁为无限刚性。设质量集中在楼层上，第一、二层的质量分别为 m_1、m_2。层间侧移刚度分别为 k_1、k_2，即层间产生单位相对侧移时所需施加的力，如图 10－32b 所示。试求刚架水平振动时的自振频率和主振型。

解　由图 10－32c 和 d 可求出结构的刚度系数如下：

$$k_{11}=k_1+k_2,\quad k_{21}=-k_2$$

$$k_{12}=-k_2,\quad k_{22}=k_2$$

将刚度系数代入式(10－40b)，得

$$(k_1+k_2-\omega^2m_1)(k_2-\omega^2m_2)-k_2^2=0 \tag{a}$$

分两种情况讨论：

① 当 $m_1=m_2=m$，$k_1=k_2=k$ 时，

此时式(a)变为

$$(2k-\omega^2m)(k-\omega^2m)-k^2=0$$

由此求得

$$\omega_1^2=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m}=0.381\ 97\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m} = 2.618\,03\,\frac{k}{m}$$

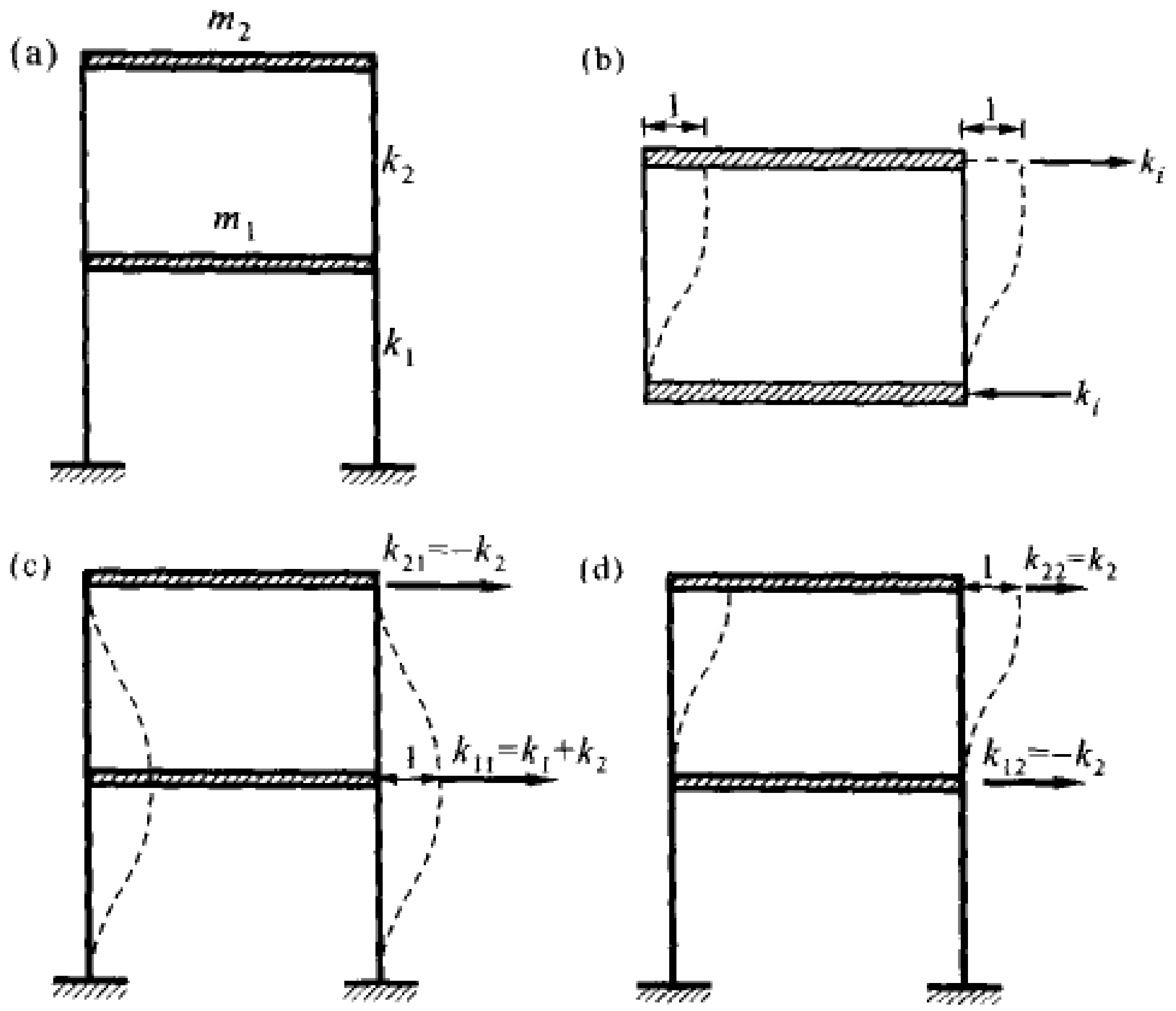


图　10－32

两个频率为

$$\omega_1 = 0.618\,03\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = 1.618\,03\sqrt{\frac{k}{m}}$$

求主振型时，可由式(10－42a)和(10－42b)求出振幅比值，从而画出振型图。

第一主振型：　$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{k}{2k-0.381\,97k} = \frac{1}{1.618}$$

第二主振型：　$$\frac{Y_{12}}{Y_{22}} = \frac{k}{2k-2.618\,03k} = -\frac{1}{0.618}$$

两个主振型如图 10－33 所示。

② 当 $m_1 = nm_2, k_1 = nk_2$ 时，

此时式(a)变为

$$[(n+1)k_2 - \omega^2 nm_2](k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2 = 0$$

由此求得

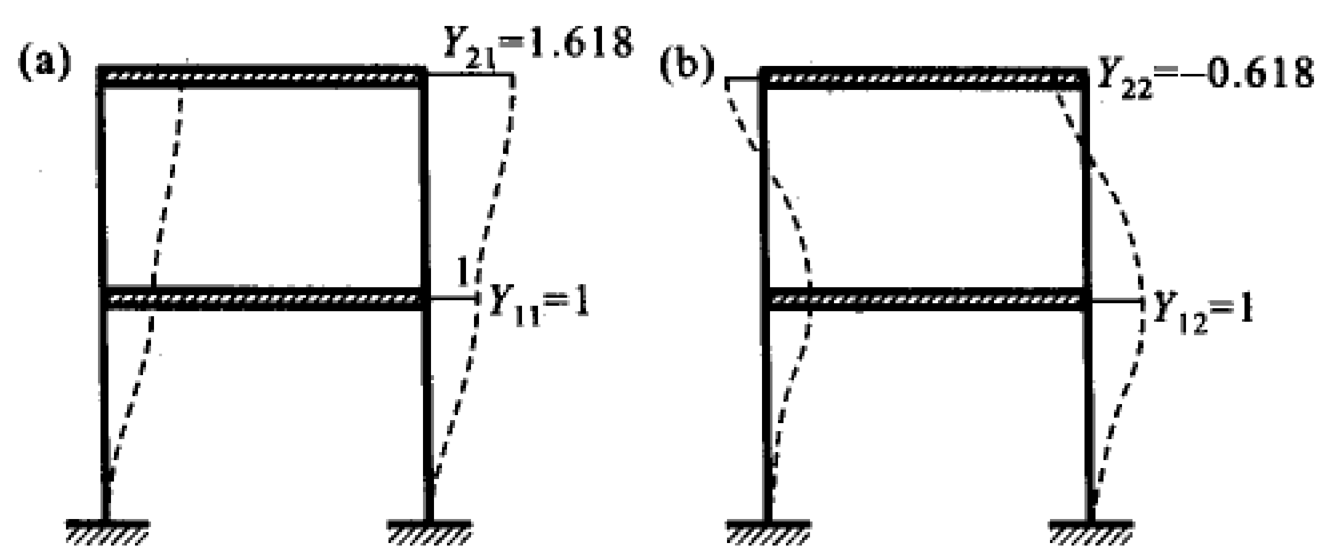


图　10－33

$$\omega_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{1}{2}\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)\mp\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^{2}}}\right]\frac{k_2}{m_2}$$

代入式(10－42a)和(10－42b),可求出主振型：

$$\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{n+\frac{1}{4}} \tag{b}$$

如 $n=90$ 时

$$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}=\frac{10}{1},\quad \frac{Y_{22}}{Y_{12}}=-\frac{9}{1}$$

由上可见,当顶部质量和刚度突然变小时,顶部位移比下部位移要大很多。建筑结构中,这种因顶部质量和刚度突然变小,在振动中引起巨大反响的现象,有时称为鞭梢效应。地震灾害调查中发现,屋顶的小阁楼,女儿墙等附属结构物破坏严重,就是因为顶部质量和刚度的突变,由鞭梢效应引起的结果。

2．柔度法

现在改用柔度法来讨论两个自由度体系的自由振动问题。仍以图10－34a所示两个自由度的体系为例进行讨论。

按柔度法建立自由振动微分方程时的思路是:在自由振动过程中的任一时刻 t,质量 m_1、m_2 的位移 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 应当等于体系在当时惯性力 $-m_1\ddot{y}_1(t)$、$-m_2\ddot{y}_2(t)$作用下所产生的静力位移。据此可列出方程如下：

$$\left.\begin{aligned}y_1(t)&=-m_1\ddot{y}_1(t)\delta_{11}-m_2\ddot{y}_2(t)\delta_{12}\\y_2(t)&=-m_1\ddot{y}_1(t)\delta_{21}-m_2\ddot{y}_2(t)\delta_{22}\end{aligned}\right\} \tag{10-43}$$

这里,δ_{ij}是体系的柔度系数,如图 10－34b 所示。这个按柔度法建立的方程可与按刚度法建立的方程(10－38)加以对照。

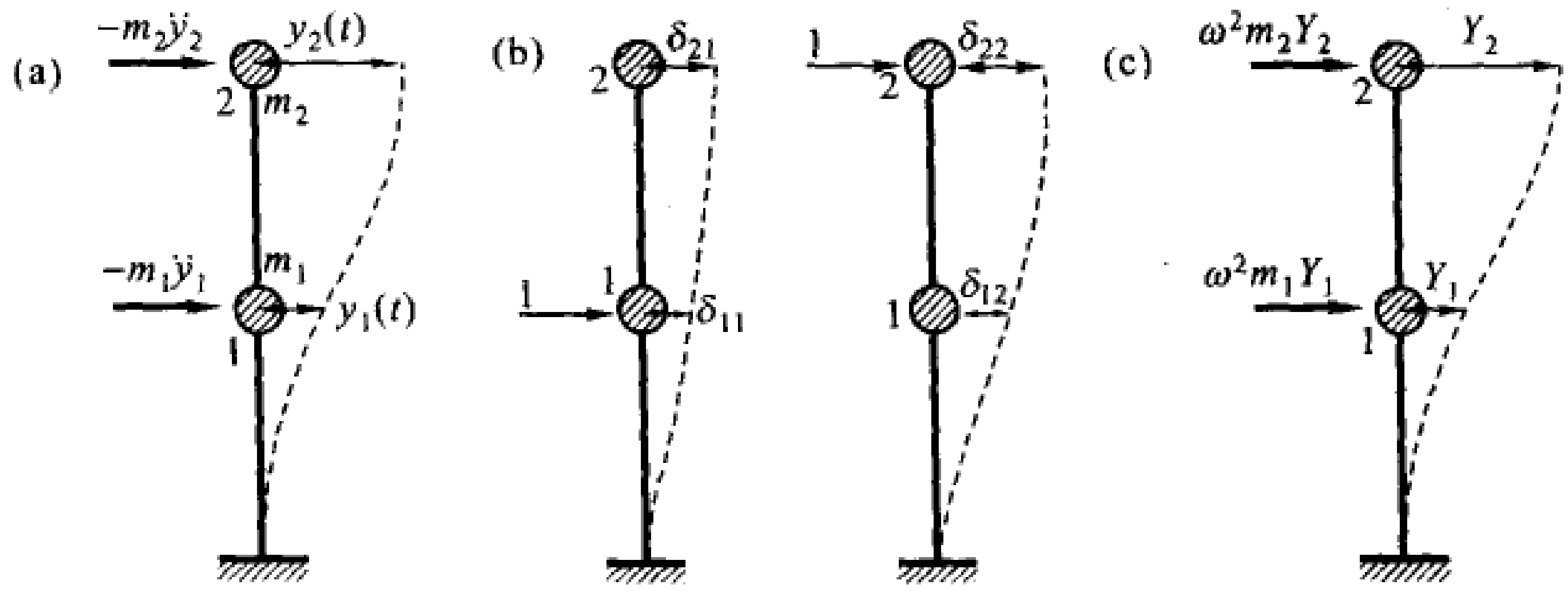


图 10－34

下面求微分方程(10－43)的解。仍设解为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}y_1(t)=Y_1\sin(\omega t+\alpha)\\y_2(t)=Y_2\sin(\omega t+\alpha)\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

这里,假设多自由度体系按某一主振型像单自由度体系那样作自由振动,Y_1 和 Y_2 是两质点的振幅(图 10－34c)。由式(a)可知两个质点的惯性力为

$$\left.\begin{aligned}-m_1\ddot{y}_1(t)=m_1\omega^2Y_1\sin(\omega t+\alpha)\\-m_2\ddot{y}_2(t)=m_2\omega^2Y_2\sin(\omega t+\alpha)\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

因此两个质点惯性力的幅值为

$$\omega^2m_1Y_1,\quad \omega^2m_2Y_2$$

将式(a)和(b)代入式(10－43),消去公因子 $\sin(\omega t+\alpha)$后,得

$$\left.\begin{aligned}Y_1=(\omega^2m_1Y_1)\delta_{11}+(\omega^2m_2Y_2)\delta_{12}\\Y_2=(\omega^2m_1Y_1)\delta_{21}+(\omega^2m_2Y_2)\delta_{22}\end{aligned}\right\}\tag{10-44}$$

上式表明,主振型的位移幅值(Y_1、Y_2)就是体系在此主振型惯性力幅值($\omega^2m_1Y_1$、$\omega^2m_2Y_2$)作用下所引起的静力位移,如图 10－34c 所示。

式(10－44)还可写成

$$\left.\begin{aligned}\left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right)Y_1+\delta_{12}m_2Y_2=0\\\delta_{21}m_1Y_1+\left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right)Y_2=0\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

为了得到 Y_1、Y_2 不全为零的解,应使系数行列式等于零,即

$$D=\begin{vmatrix}\delta_{11}m_1-\dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2\\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\dfrac{1}{\omega^2}\end{vmatrix}=0$$

这就是用柔度系数表示的频率方程或特征方程，由它可以求出两个频率 ω_1 和 ω_2。

将上式展开：

$$\left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right)\left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right)-\delta_{12}m_2\delta_{21}m_1=0$$

设

$$\lambda=\frac{1}{\omega^2}$$

则上式化为一个关于 λ 的二次方程：

$$\lambda^2-(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)\lambda+(\delta_{11}\delta_{22}m_1m_2-\delta_{12}\delta_{21}m_1m_2)=0$$

由此可以解出 λ 的两个根：

$$\lambda_{\frac{1}{2}}=\frac{(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)\pm\sqrt{(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)^2-4(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})m_1m_2}}{2} \tag{10-45}$$

于是求得圆频率的两个值为

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\quad \omega_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

下面求体系的主振型。将 $\omega=\omega_1$ 代入式(c)，由其中第一式得

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}}=-\frac{\delta_{12}m_2}{\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega_1^2}} \tag{10-46a}$$

同样，将 $\omega=\omega_2$ 代入，可求出另一比值

$$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}=-\frac{\delta_{12}m_2}{\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega_2^2}} \tag{10-46b}$$

例 10-5　试求图 10-35a 所示等截面简支梁的自振频率和主振型。设梁在三分点 1 和 2 处有两个相等的集中质量 m。

解　先求柔度系数。为此，作 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 图如图 10-35b、c 所示。由图乘法求得

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{4l^3}{243EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{7l^3}{486EI}$$

然后代入式(10-45)，得

$$\lambda_1=(\delta_{11}+\delta_{12})m=\frac{15}{486}\frac{ml^3}{EI}$$

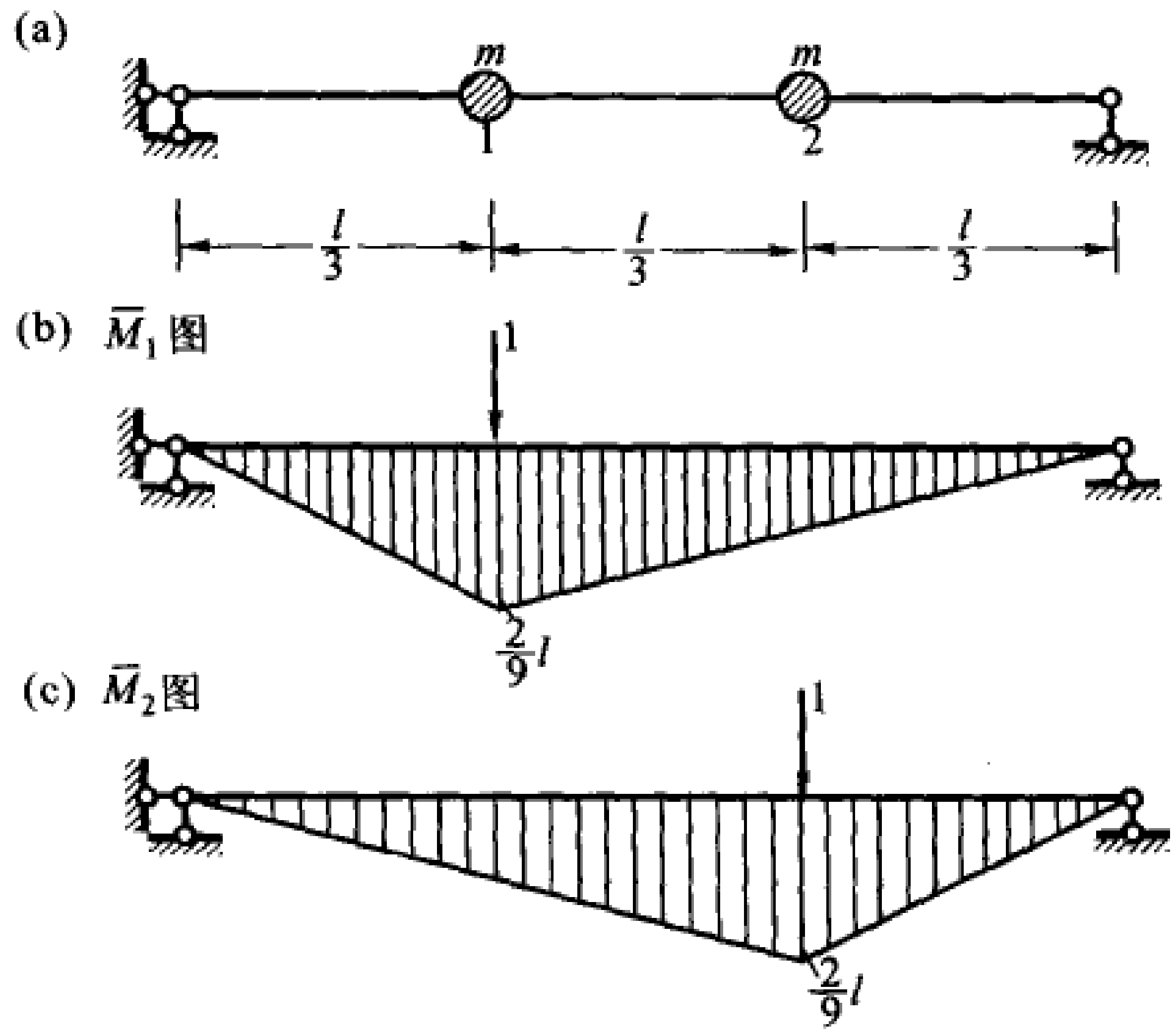


图 10-35

$$\lambda_2 = (\delta_{11} - \delta_{12})m = \frac{1}{486}\frac{ml^3}{EI}$$

从而求得两个自振圆频率如下：

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = 5.69\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 22\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

最后求主振型。由式(10-46a、b)，得

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{1}{1}, \qquad \frac{Y_{12}}{Y_{22}} = \frac{1}{-1}$$

第一个主振型是对称的(图 10-36a)，第二个主振型是反对称的(图10-36b)。主振型是对称的和反对称的，这是对称体系振动的一般规律。

3. 主振型的正交性

现在说明主振型之间的一些重要特性(正交性质或正交关系)。这些特性在动力分析中是非常有用的。现以图 10-37 所示体系的两个主振型为例来说明。

图 10-37a 为第一主振型，频率为 ω_1，振幅为(Y_{11}、Y_{21})，其值正好等于相应惯性力($\omega_1^2 m_1 Y_{11}$、$\omega_1^2 m_2 Y_{21}$)所产生的静位移。

图 10-37b 为第二主振型，频率为 ω_2，振幅为(Y_{12}、Y_{22})，其值正好等于相应惯性力($\omega_2^2 m_1 Y_{12}$、$\omega_2^2 m_2 Y_{22}$)所产生的静位移。

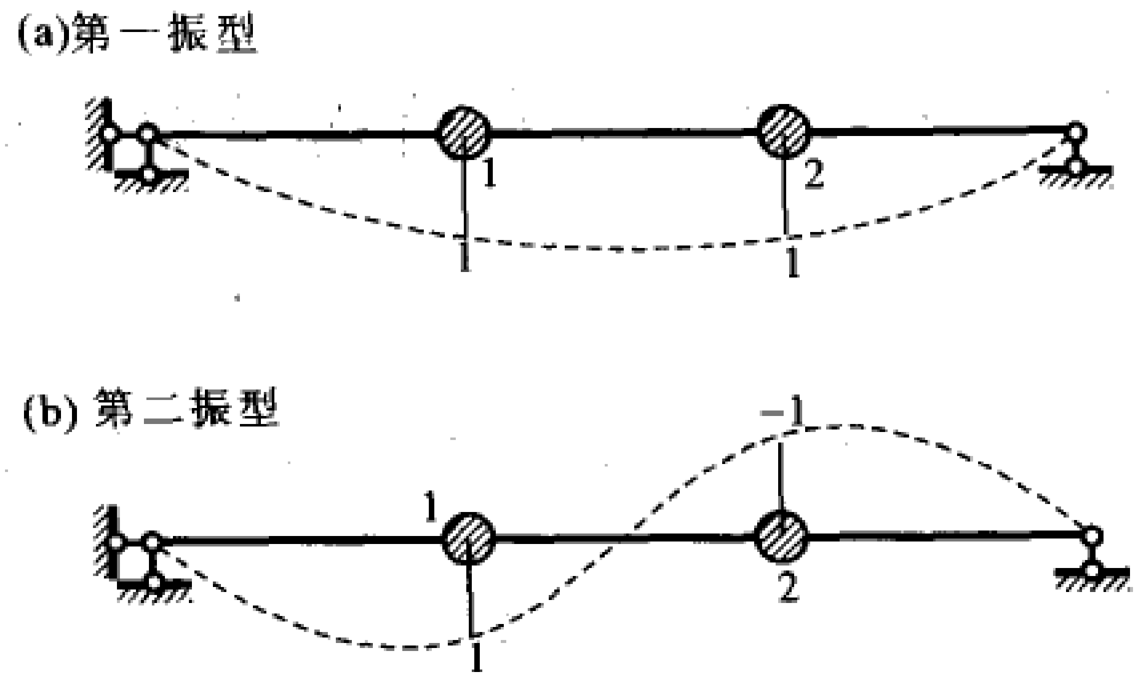


图　10 - 36

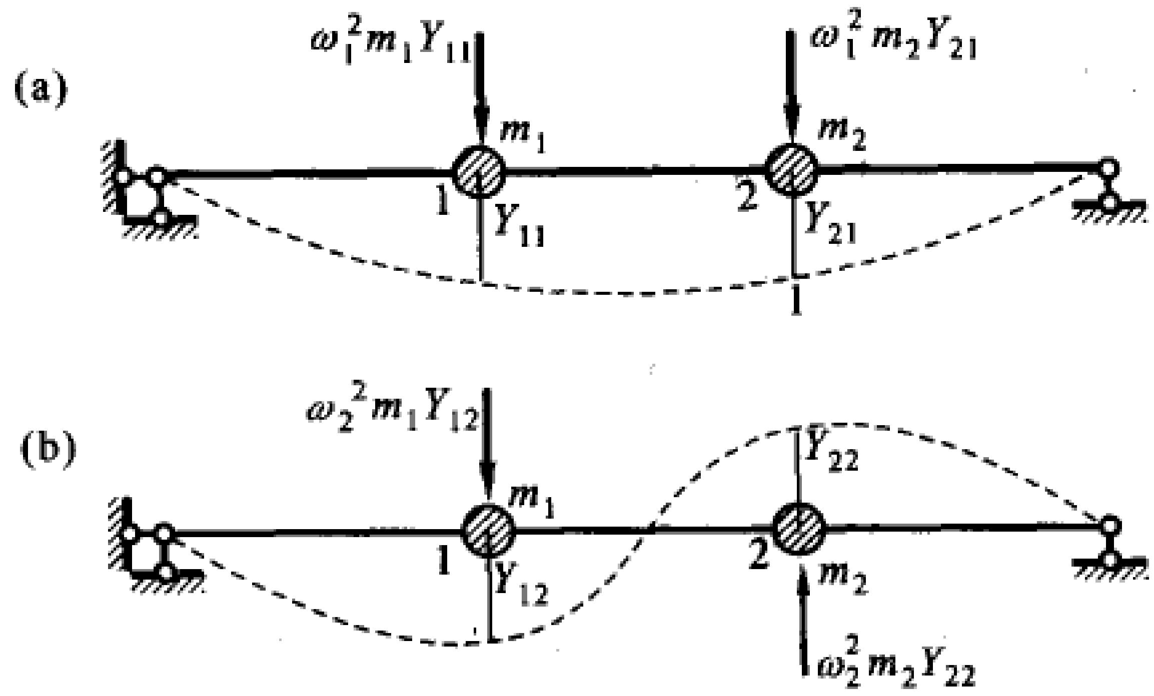


图　10 - 37

对上述两种静力平衡状态应用功的互等定理,可得

$$(\omega_1^2 m_1 Y_{11}) Y_{12} + (\omega_1^2 m_2 Y_{21}) Y_{22} = (\omega_2^2 m_1 Y_{12}) Y_{11} + (\omega_2^2 m_2 Y_{22}) Y_{21}$$

移项后,可得

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)(m_1 Y_{11} Y_{12} + m_2 Y_{21} Y_{22}) = 0$$

如果 $\omega_1 \neq \omega_2$,则有

$$m_1 Y_{11} Y_{12} + m_2 Y_{21} Y_{22} = 0 \qquad (a)$$

上式就是两个主振型之间存在的第一个正交关系。

§10－6 两个自由度体系在简谐荷载下的强迫振动

1. 刚度法

仍以图 10－38 所示两个自由度的体系为例，在动力荷载作用下的振动方程为

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1(t)+k_{11}y_1(t)+k_{12}y_2(t)=F_{P1}(t)\\ m_2\ddot{y}_2(t)+k_{21}y_1(t)+k_{22}y_2(t)=F_{P2}(t)\end{aligned}\right\} \tag{10-47}$$

与自由振动的方程(10－38)相比，这里只多了荷载项 $F_{P1}(t)$、$F_{P2}(t)$。

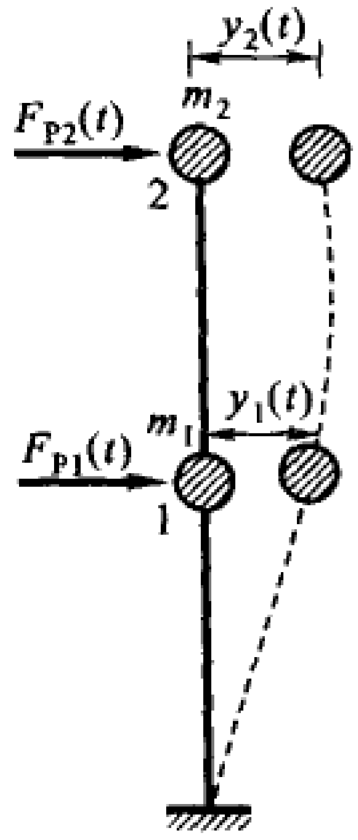


图 10－38

如果荷载是简谐荷载，即

$$\left.\begin{aligned} F_{P1}(t)=F_{P1}\sin\theta t\\ F_{P2}(t)=F_{P2}\sin\theta t\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

则在平稳振动阶段，各质点也作简谐振动：

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)=Y_1\sin\theta t\\ y_2(t)=Y_2\sin\theta t\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(a)和(b)代入式(10－47)，消去公因子 $\sin\theta t$ 后，得

$$\left.\begin{aligned} (k_{11}-\theta^2 m_1)Y_1+k_{12}Y_2=F_{P1}\\ k_{21}Y_1+(k_{22}-\theta^2 m_2)Y_2=F_{P2}\end{aligned}\right\}$$

由此可解得位移的幅值为

$$Y_1=\frac{D_1}{D_0},\quad Y_2=\frac{D_2}{D_0} \tag{10-48}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D_0&=(k_{11}-\theta^2 m_1)(k_{22}-\theta^2 m_2)-k_{12}k_{21}\\ D_1&=(k_{22}-\theta^2 m_2)F_{P1}-k_{12}F_{P2}\\ D_2&=-k_{21}F_{P1}+(k_{11}-\theta^2 m_1)F_{P2}\end{aligned}\right\} \tag{10-49}$$

将式(10－48)的位移幅值代回式(b)，即得任意时刻 t 的位移。

式(10－49)中的 D_0 与式(10－40a)中的行列式 D 具有相同的形式，只是 D 中的 ω 换成了 D_0 中的 θ。因此，如果荷载频率 θ 与任一个自振频率 ω_1、ω_2 重合，则

$$D_0=0$$

当 D_1、D_2 不全为零时，则位移幅值即为无限大，这时即出现共振现象。

例 10-6 设例 10-4 中的图 10-32a 所示刚架在底层横梁上作用简谐荷载 $F_{P1}(t)=F_P\sin\theta t$（图 10-39）。试画出第一、二层横梁的振幅 Y_1、Y_2 与荷载频率 θ 之间的关系曲线。设 $m_1=m_2=m$，$k_1=k_2=k$。

解 刚度系数为

$$k_{11}=k_1+k_2,\quad k_{12}=k_{21}=-k_2,\quad k_{22}=k_2$$

荷载幅值为

$$F_{P1}=F_P,\quad F_{P2}=0$$

代入式(10-49)和(10-48)，即得

$$\left.\begin{aligned}Y_1&=\frac{(k_2-\theta^2 m_2)F_P}{D_0}\\Y_2&=\frac{k_2F_P}{D_0}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

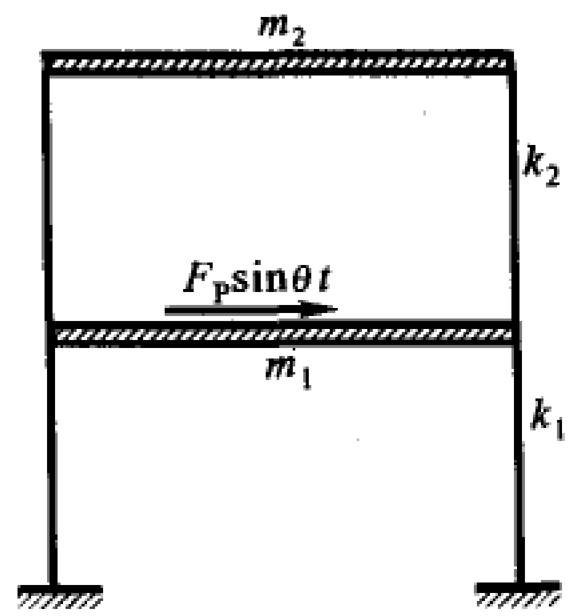


图 10-39

其中

$$D_0=(k_1+k_2-\theta^2 m_1)(k_2-\theta^2 m_2)-k_2^2\qquad\text{(b)}$$

再令 $m_1=m_2=m$，$k_1=k_2=k$，则得

$$\left.\begin{aligned}Y_1&=\frac{(k-m\theta^2)F_P}{D_0}\\Y_2&=\frac{kF_P}{D_0}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(c)}$$

其中

$$D_0=(2k-\theta^2 m)(k-\theta^2 m)-k^2\qquad\text{(d)}$$

将式(d)与例 10-4 中的特征方程相比，可知（这里，主要是为了下面讨论共振现象的方便而引入此相比关系的）：

$$D_0=m^2\theta^4-3km\theta^2+k^2=m^2(\theta^2-\omega_1^2)(\theta^2-\omega_2^2)$$

其中两个频率 ω_1 和 ω_2 已由例 10-4 中求出：

$$\omega_1^2=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m},\quad \omega_2^2=\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{k}{m}$$

因此式(c)可写成：

$$\left.\begin{aligned}Y_1&=\frac{F_P}{k}\frac{\left(1-\frac{m}{k}\theta^2\right)}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right)}\\Y_2&=\frac{F_P}{k}\frac{1}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right)}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(e)}$$

图10－40所示为振幅参数 $Y_1\Big/\frac{F_P}{k}$、$Y_2\Big/\frac{F_P}{k}$与荷载频率参数 $\theta\Big/\sqrt{\frac{k}{m}}$之间的关系曲线。

由图看出，当 $\theta=0.618\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega_1$ 和 $\theta=1.618\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega_2$ 时，Y_1 和 Y_2 趋于无穷大。可见，在两个自由度的体系中，在两种情况下($\theta=\omega_1$ 和 $\theta=\omega_2$)可能出现共振现象。

讨论：本题当$\frac{k_2}{m_2}=\theta^2$ 时，由式(a)和(b)可知：

$$Y_1=0,\quad Y_2=-\frac{F_P}{k_2}$$

这说明，在图10－41a的结构上，附加以适当的 m_2、k_2 系统(图10－41b)，可以消除 m_1 的振动，这就是动力吸振器的原理，设计吸振器时，可先根据 m_2 的许可振幅 $Y_2=\frac{F_P}{k_2}$选定 k_2，再由 $m_2=\frac{k_2}{\theta^2}$确定 m_2 的值。

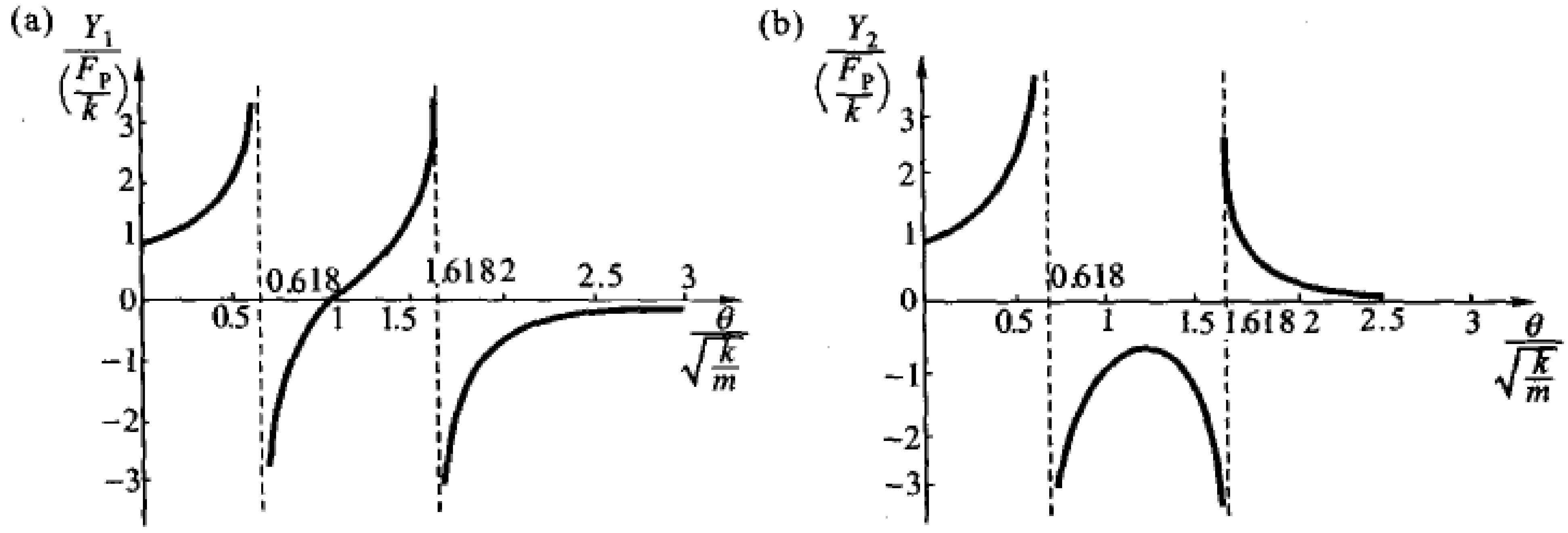


图 10－40

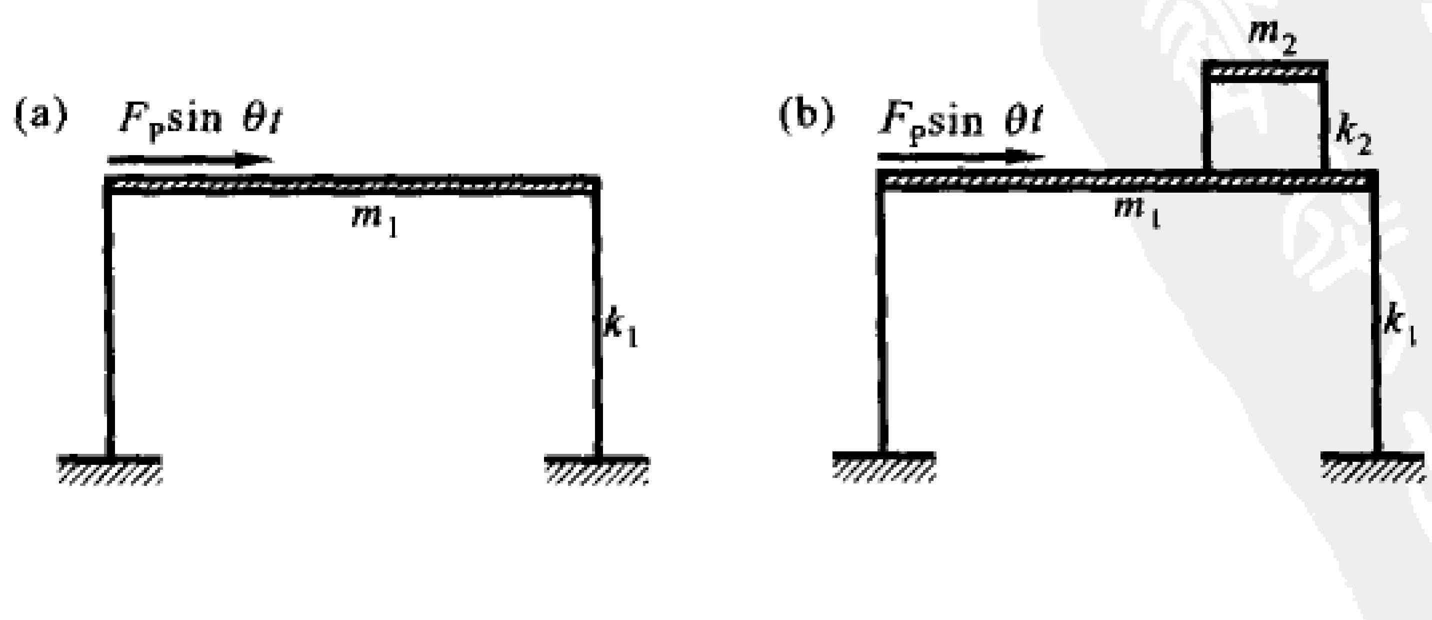


图 10－41

2. 柔度法

图 10－42a 所示两个自由度的体系，受简谐荷载作用，在任一时刻 t，质点 1、2 的位移 y_1 和 y_2，可以由体系在惯性力 $-m_1\ddot{y}_1$、$-m_2\ddot{y}_2$ 和动力荷载共同作用下的位移，通过叠加写出(图 10－42b)

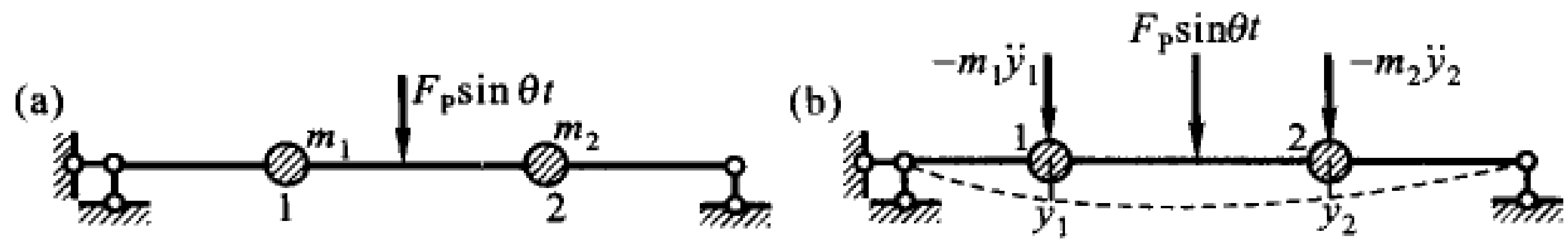


图　10－42

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (-m_1\ddot{y}_1)\delta_{11} + (-m_2\ddot{y}_2)\delta_{12} + \Delta_{1P}\sin\theta t \\ y_2 &= (-m_1\ddot{y}_1)\delta_{21} + (-m_2\ddot{y}_2)\delta_{22} + \Delta_{2P}\sin\theta t \end{aligned}\right\}$$

式中 Δ_{1P}、Δ_{2P} 为荷载幅值在质点 1、2 产生的静力位移。

也可以写为

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1\delta_{11} + m_2\ddot{y}_2\delta_{12} + y_1 &= \Delta_{1P}\sin\theta t \\ m_1\ddot{y}_1\delta_{21} + m_2\ddot{y}_2\delta_{22} + y_2 &= \Delta_{2P}\sin\theta t \end{aligned}\right\} \tag{10－50}$$

设平稳振动阶段的解为

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= Y_1\sin\theta t \\ y_2(t) &= Y_2\sin\theta t \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

将式(a)代入式(10－50)，消去公因子 $\sin\theta t$ 后，得

$$\left.\begin{aligned} (m_1\theta^2\delta_{11}-1)Y_1 + m_2\theta^2\delta_{12}Y_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ m_1\theta^2\delta_{21}Y_1 + (m_2\theta^2\delta_{22}-1)Y_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10－51}$$

由此可解得位移的幅值为

$$Y_1 = \frac{D_1}{D_0},\quad Y_2 = \frac{D_2}{D_0} \tag{10－52}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \begin{vmatrix} (m_1\theta^2\delta_{11}-1) & m_2\theta^2\delta_{12} \\ m_1\theta^2\delta_{21} & (m_2\theta^2\delta_{22}-1) \end{vmatrix} \\ D_1 &= \begin{vmatrix} -\Delta_{1P} & m_2\theta^2\delta_{12} \\ -\Delta_{2P} & (m_2\theta^2\delta_{22}-1) \end{vmatrix} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} (m_1\theta^2\delta_{11}-1) & (-\Delta_{1P}) \\ m_2\theta^2\delta_{21} & (-\Delta_{2P}) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{10－53}$$

式(10－53)中的 D_0 与自由振动中的行列式 D 具有相同的形式，只是 D 中

的 ω 换成了 D_0 中的 θ。因此，当荷载频率 θ 与任一个自振频率 ω_1、ω_2 相等时，则 $D_0=0$。当 D_1、D_2 不全为零时，位移幅值将趋于无限大，即出现共振。

在求得位移幅值 Y_1、Y_2 后，可得到各质点的位移和惯性力。

位移：

$$y_1(t)=Y_1\sin\theta t$$

$$y_2(t)=Y_2\sin\theta t$$

惯性力：

$$-m_1\ddot{y}_1(t)=m_1\theta^2Y_1\sin\theta t$$

$$-m_2\ddot{y}_2(t)=m_2\theta^2Y_2\sin\theta t$$

因为位移、惯性力和动力荷载同时到达幅值，动内力也在振幅位置到达幅值。动内力幅值可以在各质点的惯性力幅值和动力荷载幅值共同作用下按静力分析方法求得。如任一截面的弯矩幅值，可由下式求出：

$$M(t)_{\max}=\overline{M}_1I_1+\overline{M}_2I_2+M_P$$

式中 I_1、I_2 分别为质点 1、2 的惯性力幅值；

$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 分别为单位惯性力 $I_1=1$、$I_2=1$ 作用时，任一截面的弯矩值；

M_P 为动力荷载幅值静力作用下同一截面的弯矩值。

例 10－7　试求图 10－43a 所示体系的动位移和动弯矩的幅值图。已知：$m_1=m_2=m$，EI＝常数，$\theta=0.6\ \omega_1$。

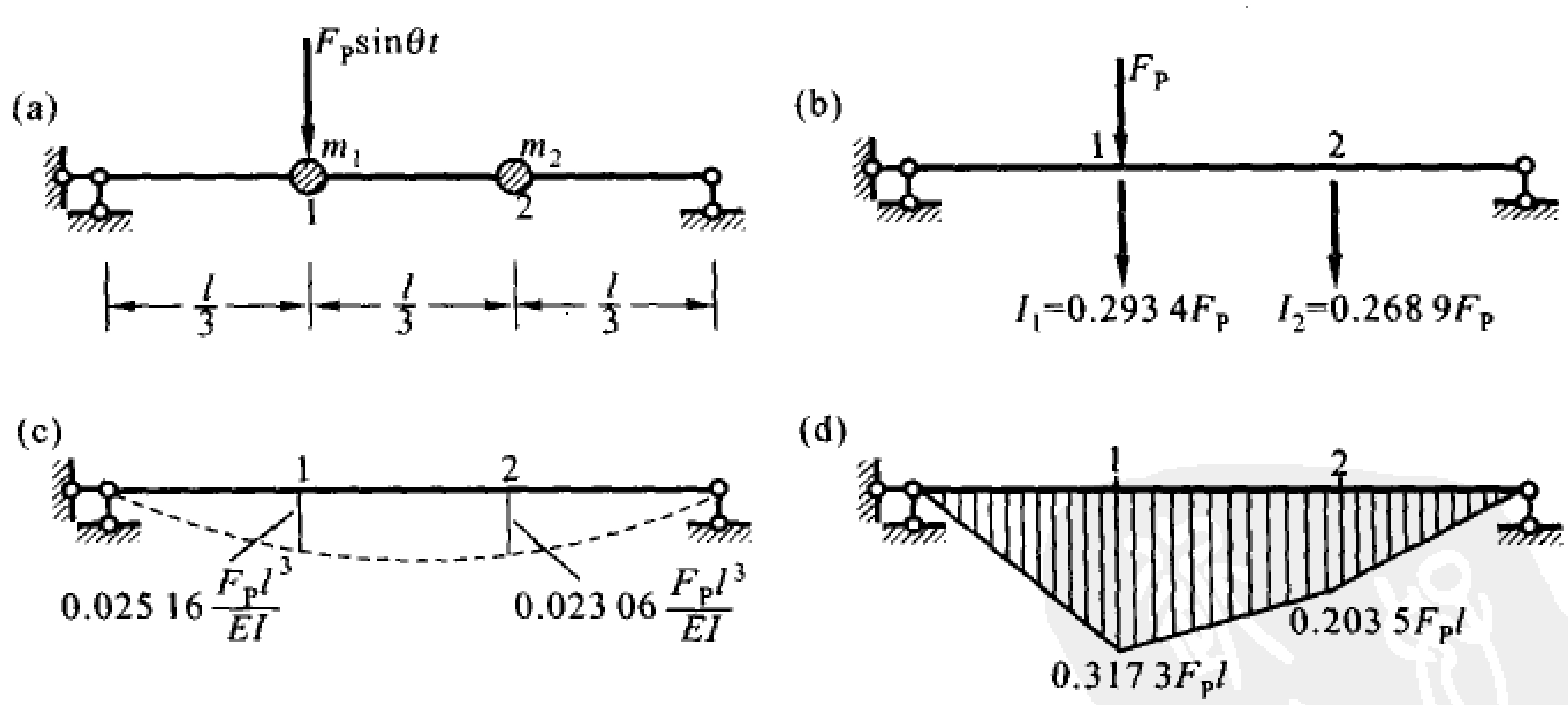


图　10－43

解　(1) 例 10－5 中已求出柔度系数和基本频率

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{4l^3}{243EI},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{7l^3}{486EI},\quad \omega_1=5.692\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

所以

$$\theta=0.6\ \omega_1=3.415\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

（2）作 M_P 图，与例 10-5 中的 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 图乘，得

$$\Delta_{1P}=\frac{4F_P l^3}{243EI},\quad \Delta_{2P}=\frac{7F_P l^3}{486EI}$$

（3）计算 D_0、D_1 和 D_2

$$m_1\theta^2=m_2\theta^2=11.66\,\frac{EI}{l^3}$$

$$D_0=\begin{vmatrix}(m_1\theta^2\delta_{11}-1) & m_2\theta^2\delta_{12}\\ m_1\theta^2\delta_{21} & (m_2\theta^2\delta_{22}-1)\end{vmatrix}=0.624\ 7$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-\Delta_{1P} & m_2\theta^2\delta_{12}\\ -\Delta_{2P} & (m_2\theta^2\delta_{22}-1)\end{vmatrix}=0.015\ 72\,\frac{F_P l^3}{EI}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}(m_1\theta^2\delta_{11}-1) & (-\Delta_{1P})\\ m_1\theta^2\delta_{21} & (-\Delta_{2P})\end{vmatrix}=0.014\ 40\,\frac{F_P l^3}{EI}$$

（4）计算位移幅值

$$Y_1=\frac{D_1}{D_0}=\frac{0.015\ 72\ F_P l^3}{0.624\ 7EI}=0.025\ 16\,\frac{F_P l^3}{EI}$$

$$Y_2=\frac{D_2}{D_0}=\frac{0.014\ 40\ F_P l^3}{0.624\ 7\ EI}=0.023\ 06\,\frac{F_P l^3}{EI}$$

位移幅值图如图 10-43c 所示。

（5）计算惯性力幅值

$$I_1=m_1\theta^2 Y_1=11.66\,\frac{EI}{l^3}\times 0.025\ 16\,\frac{F_P l^3}{EI}=0.293\ 4\ F_P$$

$$I_2=m_2\theta^2 Y_2=11.66\,\frac{EI}{l^3}\times 0.023\ 06\,\frac{F_P l^3}{EI}=0.268\ 9\ F_P$$

（6）计算质点 1、2 的动弯矩幅值

体系所受动力荷载及惯性力的幅值，如图 10-43b 所示。据此可求出反力及弯矩幅值。

弯矩幅值图，如图 10-43d 所示。

（7）计算质点 1 的位移、弯矩动力系数

$$y_{1st}=\Delta_{1P}=\frac{4F_P l^3}{243EI}=0.016\ 46\,\frac{F_P l^3}{EI}$$

$$\beta_{y1}=\frac{Y_1}{y_{1st}}=\frac{0.025\ 16\,\dfrac{F_P l^3}{EI}}{0.016\ 46\,\dfrac{F_P l^3}{EI}}=1.529$$

$$M_{1st}=\frac{2F_P l}{9}=0.222\ 2\ F_P l$$

$$\beta_{M1}=\frac{M_{1\max}}{M_{1\mathrm{st}}}=\frac{0.3173\,F_{\mathrm{P}}l}{0.2222\,F_{\mathrm{P}}l}=1.428$$

由此可见,在两个自由度体系中,同一点的位移和弯矩的动力系数是不同的,即没有统一的动力系数,这是与单自由度体系不同的。

§10－7　小　　结

本章是结构力学课程教学基本要求的必修内容。

首先,讨论单自由度体系的振动问题。在自由振动中,强调了自振周期的不同表现形式和它的一些重要性质。在强迫振动中,先讨论简谐荷载,后讨论一般荷载。一般动力荷载的影响是按照自由振动、冲量的影响、强迫振动的顺序,主要利用力学概念进行推导,从而更清楚地了解它们之间的相互关系。同时,结合几种重要的动力荷载,讨论了结构的动力反应的一些特点,与静力荷载进行了比较。例如,通过对突加荷载和线性渐增荷载的讨论,总结出静力荷载与动力荷载的划分标准等。单自由度体系的计算是本章的基础。因为实际结构的动力计算很多是简化为单自由度体系进行计算的。此外,多自由度体系的动力计算问题也可归结为单自由度体系的计算问题。因而,对这一部分仍应进行一定的练习,以求切实掌握。

其次,讨论两个自由度体系的自由振动。先说明了两个自由度体系按单自由度振动的可能性,并由此在自由振动中引出了主振型的概念。在强迫振动中,只讨论了简谐荷载作用的情况。在这一部分中,同时介绍了刚度法和柔度法,二者各有其特点,殊途同归。讲授和学习时,可以一种方法为主。

在学习时,可以进行一些对比以加深了解。例如,动力计算与静力计算的比较,结构静力特性与动力特性的比较,单自由度体系与两个自由度体系在计算和性能方面的异同,结构动力计算与稳定计算(见本书卷Ⅱ第 15 章)的相似性(特征方程和特征值,主振型与失稳形式,能量解法)等。

可以使用一些简易的模型表演,以加深学生对结构动力影响的理解与认识。

§10－8　思考与讨论

§10－1　思考题

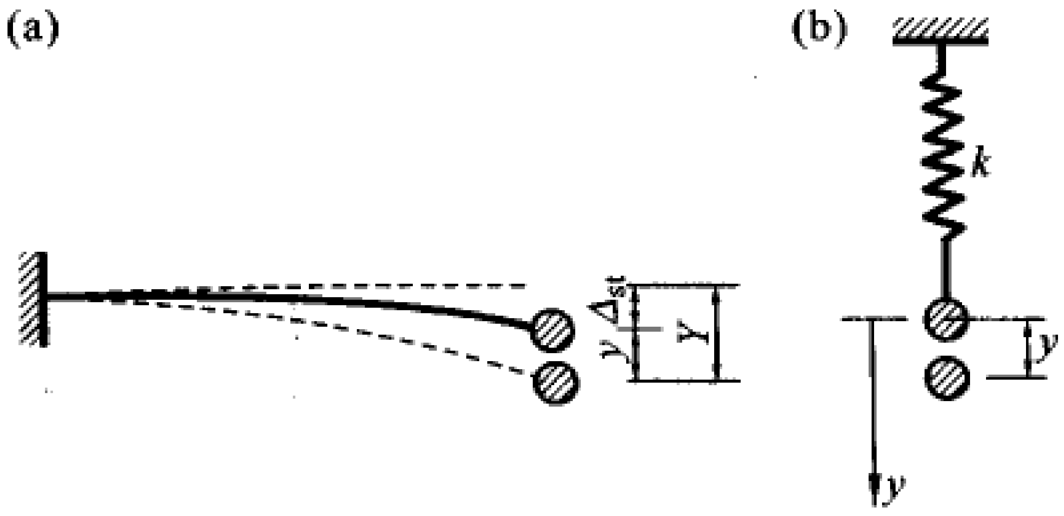
10－1　结构动力计算与静力计算的主要区别是什么?

10－2　本章§10－1 中自由度概念与第 2 章中的自由度概念有何异同?

10-3 采用集中质量法、广义坐标法和有限元法都可使无限自由度体系简化为有限自由度体系,它们所采用的手法有何不同?

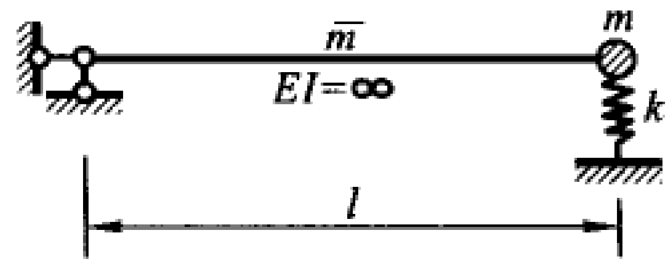
§ 10-2 思考题

10-4 在建立图示振动微分方程时,如考虑重力的影响,动力位移的方程有无改变?



思考题 10-4 图

10-5 计算图示体系的自振频率时,可否直接应用式(10-10),得到 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\bar{m}l}}$?这样计算对不对?为什么?



思考题 10-5 图

讨论:因为梁 $EI=\infty$,这是一个单自由度体系,除了梁端集中质量 m 外还有杆的均布质量 $\bar{m}$,质量的运动形态是怎样的?建议读者根据此体系的运动形态写出振动方程,从而求出自振频率。

10-6 为什么说自振周期是结构的固有性质?它与结构哪些固有量有关?

10-7 为了计算自由振动时质点在任意时刻的位移,除了要知道质点的初始位移和初始速度之外,还需要知道些什么?

§ 10-3 思考题

10-8 什么称为动力系数?动力系数的大小与哪些因素有关?单自由度体系位移的动力系数与内力的动力系数是否一样?

10-9 在杜哈梅积分中时间变量 τ 与 t 有什么区别?怎样应用杜哈梅积分求解任意动力荷载作用下的动力位移问题?简谐荷载下的动位移可以用杜哈梅积分求吗?

10-10 如何结合杜哈梅积分这个具体实例进一步理解"叠加法"和"由特殊到一般"的分析方法?

10-11 在图 10-15 和图 10-24 中,何时出现 $\beta\to1$ 的情况?由此如何理解下述结论:"随时间变化很慢的动力荷载实际上可看作静力荷载"。这里"很慢"的标准是什么?

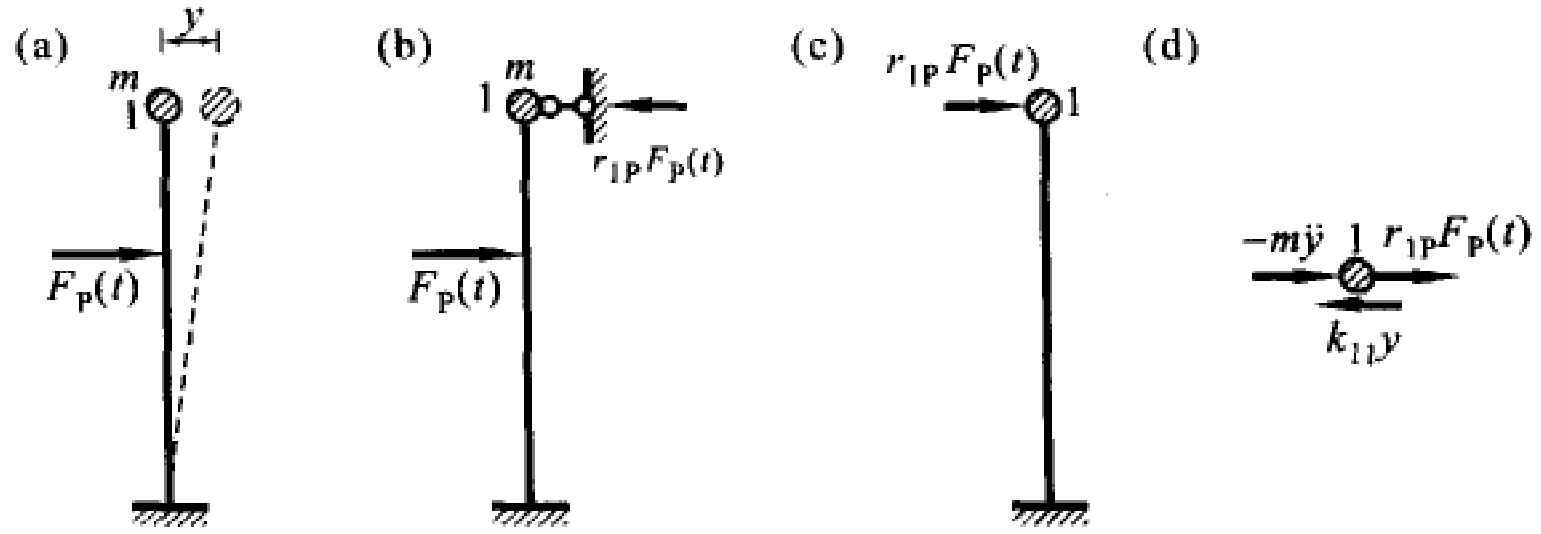
10-12 单自由度体系动力荷载作用点不在体系的集中质量上时,动力计算如何进行?此时,体系中各量的动力系数是否仍是一样的?

讨论:动力荷载 $F_P(t)$ 作用点不在体系质量上,动力分析仍可利用刚度法或柔度法进行。

(a) 刚度法

研究图 a 所示单自由度体系，动力荷载的作用点不在质量上。如在质点 1 处加水平支杆，约束点 1 的位移，此时质量不产生运动、无惯性力作用，可按静力方法求得支杆 1 中的反力 $r_{1P}F_P(t)$，如图 b 所示。将图 b 中的 $r_{1P}F_P(t)$ 反方向作用，即为动力荷载 $F_P(t)$ 对质点 1 的作用力，如图 c 所示。取质量 m 为隔离体，如图 d 所示，写平衡方程有

$$-m\ddot{y}-k_{11}y+r_{1P}F_P(t)=0$$



思考题 10－12 图

即

$$m\ddot{y}+k_{11}y=r_{1P}F_P(t) \tag{a}$$

式(a)就是动力荷载作用点不在质量上作用时的强迫振动的运动方程。式中 r_{1P} 为单位力 $F_P(t)=1$作用(保持 $y=0$)时，给质量 m 的沿运动方向的力，$r_{1P}F_P(t)$为动力荷载$F_P(t)$给质量 m 的等效作用力。

设 $\omega^2=\dfrac{k_{11}}{m}$，式(a)变为

$$\ddot{y}+\omega^2y=\frac{r_{1P}}{m}F_P(t) \tag{b}$$

由杜哈梅积分，平稳阶段的解为

$$y(t)=\frac{r_{1P}}{m\omega}\int_0^t F_P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

当动力荷载 $F_P(t)=F\sin\theta t$ 时，亦可由式(b)直接求解。

(b) 柔度法

取图 a 整体为研究对象，质点位移 y 由惯性力 $-m\ddot{y}$ 和动力荷载 $F_P(t)$共同产生，即

$$y(t)=-m\ddot{y}\delta_{11}+\delta_{1P}F_P(t) \tag{c}$$

式中 δ_{1P} 为 $F_P(t)=1$ 作用时沿质量 1 运动方向产生的位移，$\delta_{1P}F_P(t)$为动力荷载$F_P(t)$引起的质量 1 处的位移。

设 $\omega^2=\dfrac{1}{m\delta_{11}}$，式(c)变为

$$\ddot{y}+\omega^2y=\frac{\delta_{1P}}{m\delta_{11}}F_P(t) \tag{d}$$

式中 $\dfrac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}F_P(t)$为动力荷载 $F_P(t)$给质量 m 的等效作用力。

由杜哈梅积分，平稳阶段的解为

$$y(t)=\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}\frac{1}{m\omega}\int_0^t F_P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

当动力荷载为简谐荷载时，$F_P(t)=F\sin\theta t$，亦可由式(d)直接求解。

(c) 建议读者自选一个动力荷载不作用在体系的质量上的小题，自己分析一下，看此时位移的动力系数与内力的动力系数是否一样，各截面内力的动力系数是否一样？

§ 10－4　思考题

10－13　在振动过程中产生阻尼的原因有哪些？

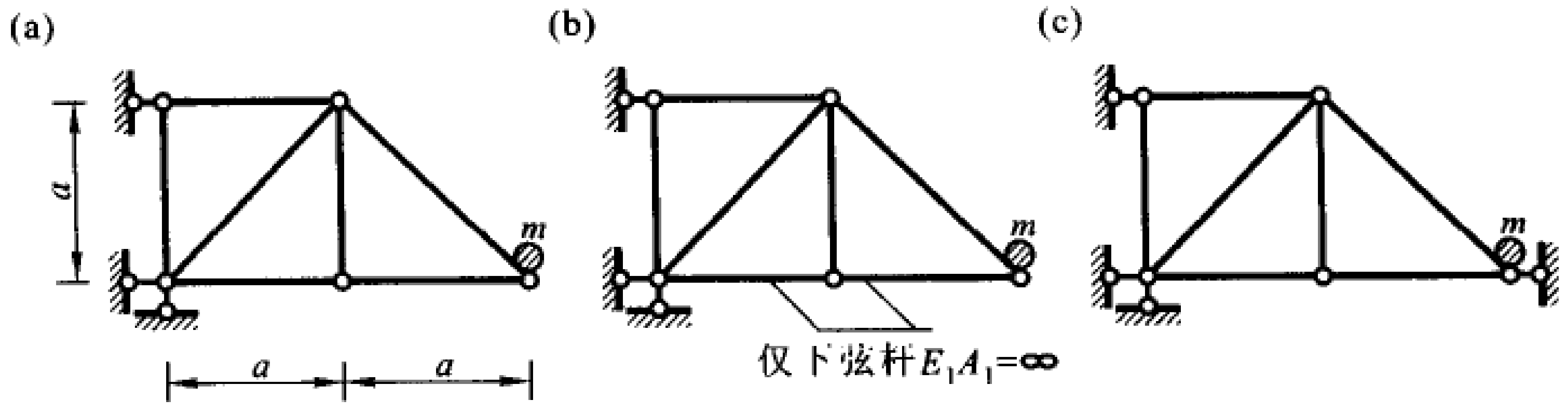
10－14　什么称为临界阻尼？什么称为阻尼比？怎样量测体系振动过程中的阻尼比？

10－15　如果阻尼数值变大，振动的周期将如何变化？

§ 10－5　思考题

10－16　对比刚度法和柔度法求频率的原理和计算步骤。在什么情况下用刚度法较好？在什么情况下用柔度法较好？

10－17　图 a 所示为一桁架，各杆 EA 为常数，桁架杆分布质量不计。此体系的动力自由度是几个？试求其自振频率与主振型。本问题中，当给定质点 m 的竖向位移 y_0 为初始条件时，质量是否是只沿竖向振动？为什么？求图 a 所示体系竖向振动的自振频率的提法，对吗？行吗？



思考题 10－17 图

讨论：图 a 是一个两个自由度的体系，不是一个单自由度体系。其两个自振频率和主振型分别为

$$\omega_1=0.288\sqrt{\frac{EA}{ma}},\quad \boldsymbol{Y}^{(1)\mathrm{T}}=(1\quad -0.198\,9)$$

$$\omega_2=0.790\sqrt{\frac{EA}{ma}},\quad \boldsymbol{Y}^{(2)\mathrm{T}}=(1\quad 5.027\,4)$$

当给质点 m 竖向位移 y_0 时，质点也不会只按竖向振动，因为这不是其主振型的振动方向。

求图 a 所示体系竖向振动的自振频率的提法是不对的，不能这样提问题。因为本体系没有竖向振动的振动形式。除非对此体系，另外增加约束条件限制质点的水平运动，使其只能竖向振动；如图 b 所示，下弦杆 $E_1A_1=\infty$，其他各杆 EA 不变；或者图 c 所示，增加一个水平

支杆。但这时已不是图 a 所示的两个自由度体系，而是图 b 和图 c 所示的单自由度体系。

建议读者自己对本问题进行详细一些的分析。

§ 10－6　思考题

10－18　两个自由度体系各质点的位移动力系数是否都是一样的？它们与内力动力系数是否相同？与单自由度体系有些什么不同？

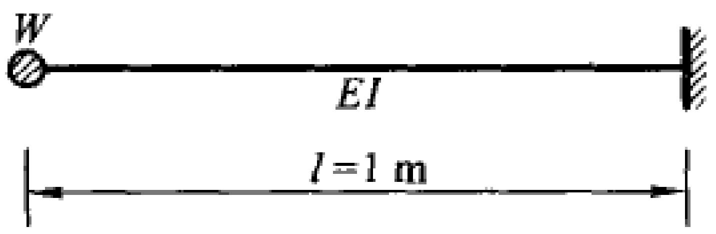
10－19　两个自由度的体系有多少个发生共振的可能性？为什么？

习　　题

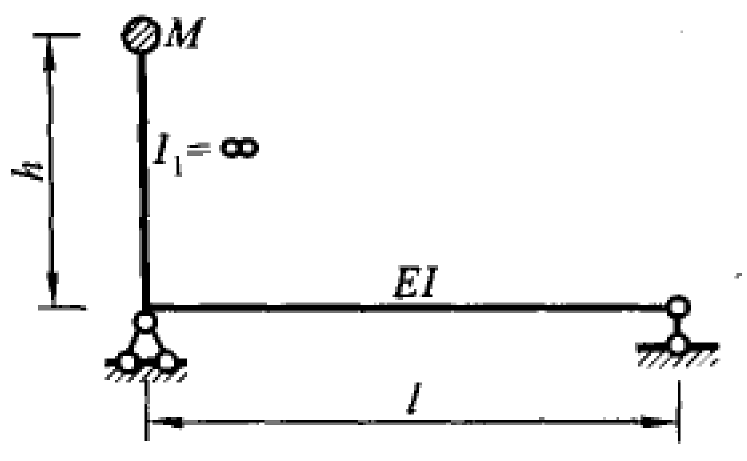
10－1　试求图示梁的自振周期和圆频率。设梁端有重物 $W=1.23$ kN；梁重不计，$E=21\times10^4$ MPa，$I=78$ cm^4。

10－2　一块形基础，底面积 $A=18$ m^2，重量 $W=2\ 352$ kN，土壤的弹性压力系数为 3 000 kN/m^3。试求基础竖向振动时的自振频率。

10－3　试求图示体系的自振频率。



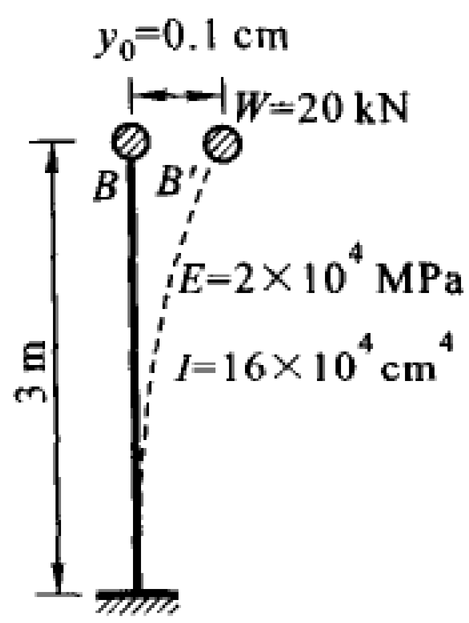
题 10－1 图



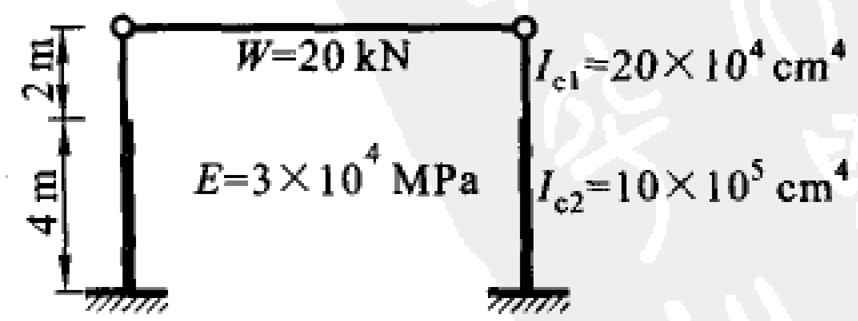
题 10－3 图

10－4　设图示竖杆顶端在振动开始时的初位移为 0.1 cm（被拉到位置 B' 后放松引起振动）。试求顶端 B 的位移振幅、最大速度和加速度。

10－5　试求图示排架的水平自振周期。柱的重量已简化到顶部，与屋盖重合在一起。



题 10－4 图

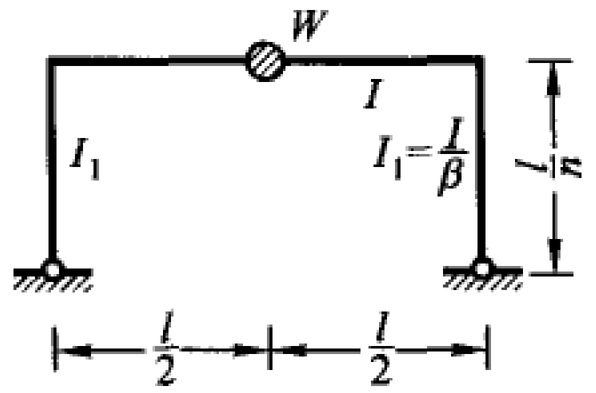


题 10－5 图

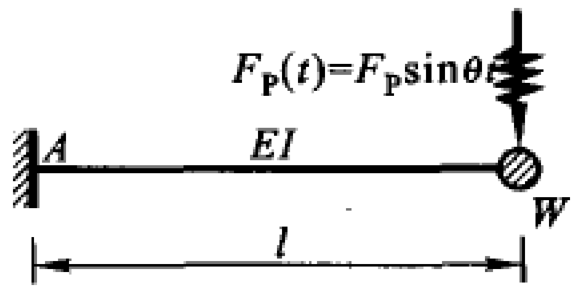
10－6 图示刚架跨中有集中重量 W，刚架自重不计，弹性模量为 E。试求竖向振动时的自振频率。

10－7 试求上题图示刚架水平振动时的自振周期。

10－8 试求图示梁的最大竖向位移和梁端弯矩幅值。已知 $W=10$ kN，$F_P=2.5$ kN，$E=2\times10^5$ MPa，$I=1\ 130\ \text{cm}^4$，$\theta=57.6\ \text{s}^{-1}$，$l=150$ cm。



题 10－6 图



题 10－8 图

10－9 设有一个单自由度的体系，其自振周期为 T，所受荷载为

$$F_P(t)=F_{P0}\sin\frac{\pi t}{T},\quad 当\ 0\leqslant t\leqslant T$$

$$F_P(t)=0,\qquad 当\ t>T$$

试求质点的最大位移及其出现的时间(结果用 F_{P0}、T 和弹簧刚度 k 表示)。

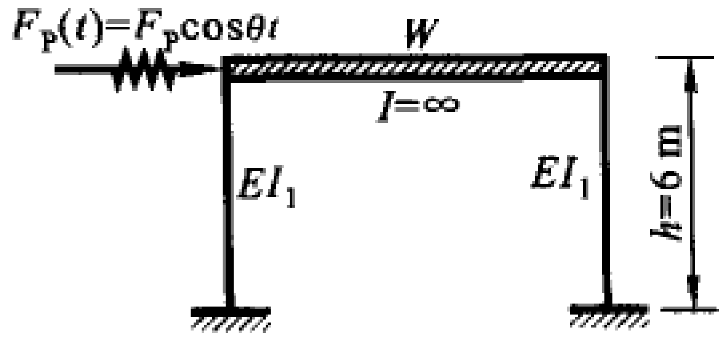
10－10 图示结构在柱顶有电动机，试求电动机转动时的最大水平位移和柱端弯矩的幅值。已知电动机和结构的重量集中于柱顶，$W=20$ kN，电动机水平离心力的幅值 $F_P=250$ N，电动机转速 $n=550$ r/min，柱的线刚度 $i=\dfrac{EI_1}{h}=5.88\times10^8\ \text{N·cm}$。

10－11 设有一个自振周期为 T 的单自由度体系，承受图示直线渐增荷载 $F_P(t)=F_P\dfrac{t}{\tau}$ 作用。试：

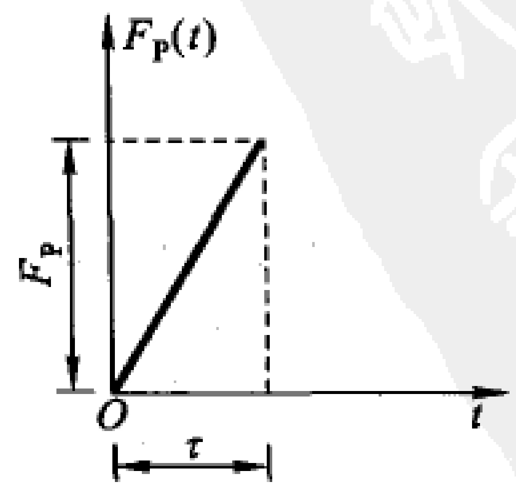
(a) 求 $t=\tau$ 时的振动位移值 $y(\tau)$。

(b) 当 $\tau=\frac{3}{4}T$、$\tau=T$、$\tau=1\frac{1}{4}T$、$\tau=4\frac{3}{4}T$、$\tau=5T$、$\tau=5\frac{1}{4}T$、$\tau=9\frac{3}{4}T$、$\tau=10T$、$\tau=10\frac{1}{4}T$ 时，分别计算动位移和静位移的比值 $\dfrac{y(\tau)}{y_{st}}$。静位移 $y_{st}=\dfrac{F_P}{k}$，k 为体系的刚度系数。

(c) 从以上的计算结果，可以得到怎样的结论？



题 10－10 图



题 10－11 图

10-12　设有一个自振周期为 T 的单自由度体系，承受图示突加荷载作用。试：

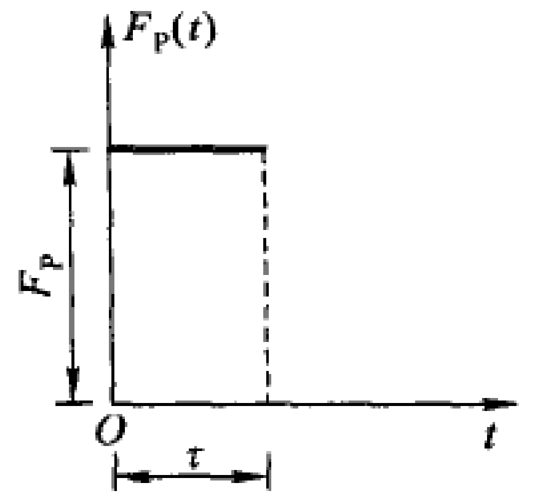
(a) 求任意时刻 t 的位移 $y(t)$。

(b) 证明：当 $\tau<0.5T$ 时，最大位移发生在时刻 $t>\tau$（即卸载后）；当 $\tau>0.5T$ 时，最大位移发生在 $t<\tau$（即卸载前）。

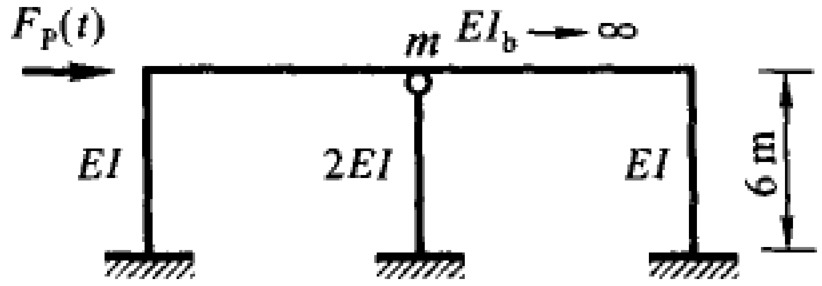
(c) 当 $\tau=0.1T,\tau=0.2T,\tau=0.3T,\tau=0.5T$ 时，求最大位移 y_{max} 与静位移 $y_{st}=\dfrac{F_P}{k}$ 的比值。

(d) 证明：$\dfrac{y_{max}}{y_{st}}$ 的最大值为 2；当 $\tau<0.1T$ 时，可按瞬时冲量计算，误差不大。

10-13　图示结构中柱的质量集中在刚性横梁上，$m=5$ t，$EI=7.2\times10^4$ kN·m²，突加荷载 $F_P(t)=10$ kN。试求柱顶最大位移及所发生的时间，并画动弯矩图。



题 10-12 图



题 10-13 图

10-14　某结构自由振动经过 10 个周期后，振幅降为原来的 10%。试求结构的阻尼比 ξ 和在简谐荷载作用下共振时的动力系数。

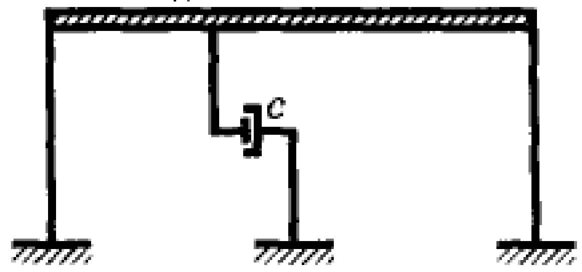
10-15　通过图示结构做自由振动实验。用油压千斤顶使横梁产生侧向位移，当梁侧移 0.49 cm 时，需加侧向力 90.698 kN。在此初位移状态下放松横梁，经过一个周期（$T=1.40$ s）后，横梁最大位移仅为 0.392 cm。试求：

(a) 结构的重量 W（假设重量集中于横梁上）。

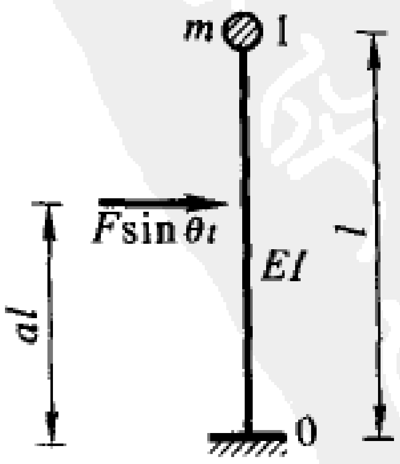
(b) 阻尼比。

(c) 振动 6 周后的位移振幅。

10-16　试求图示体系 1 点的位移动力系数和 0 点的弯矩动力系数；它们与动力荷载通过质点作用时的动力系数是否相同？不同在何处？



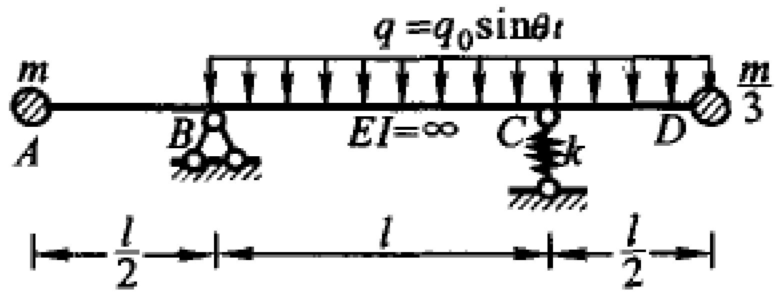
题 10-15 图



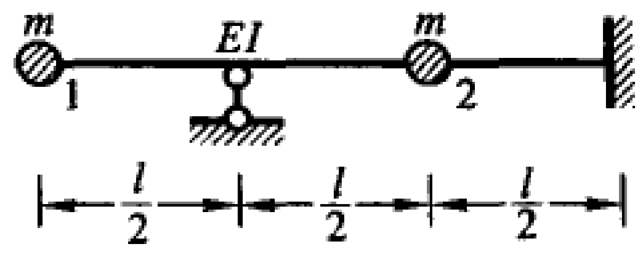
题 10-16 图

10 - 17 试求图示体系中弹簧支座的最大动反力。已知 q_0、$\theta(\neq\omega)$、m 和弹簧系数 k，$EI=\infty$。

10 - 18 试求图示梁的自振频率和主振型。

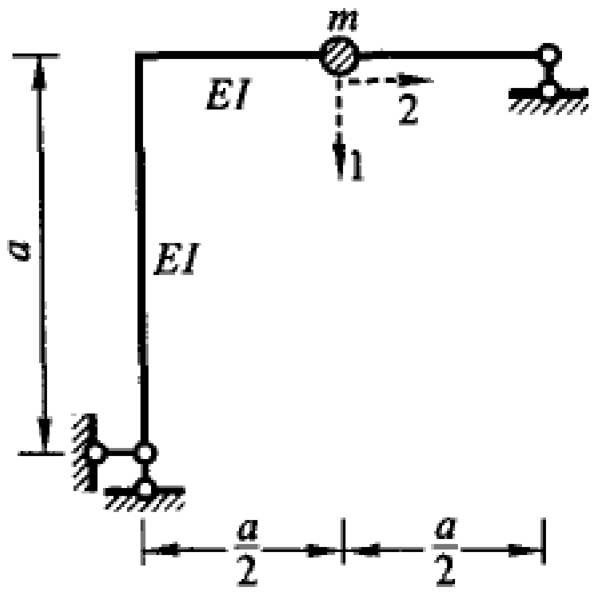


题 10 - 17 图



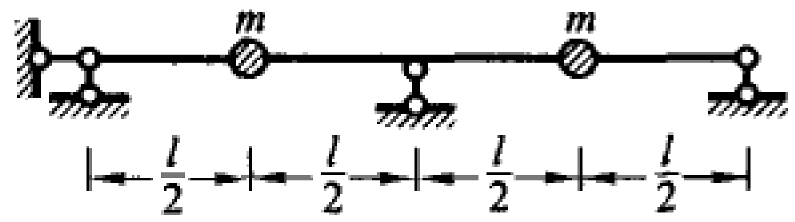
题 10 - 18 图

10 - 19 试求图示刚架的自振频率和主振型。



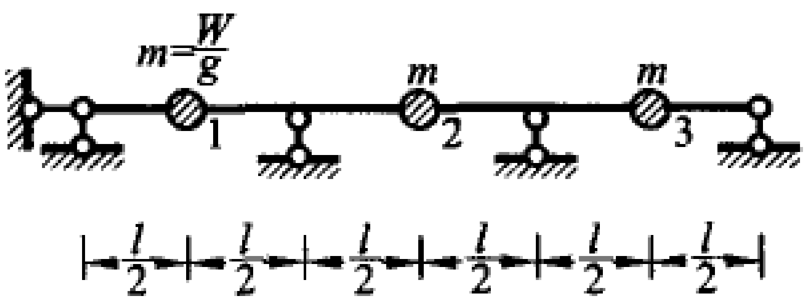
题 10 - 19 图

10 - 20 试求图示双跨梁的自振频率。已知 $l=100$ cm，$mg=1\ 000$ N，$I=68.82$ cm^4，$E=2\times10^5$ MPa。



题 10 - 20 图

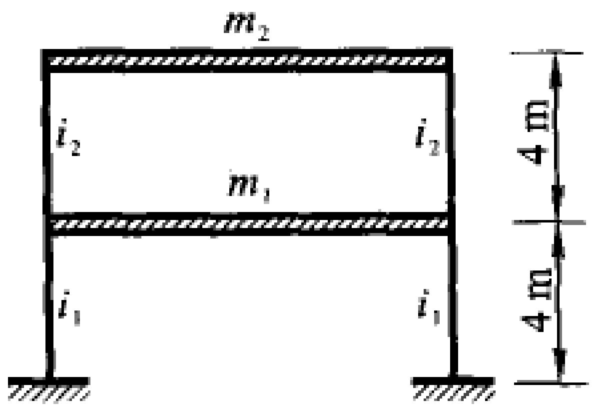
10 - 21 试求图示三跨梁的自振频率和主振型。已知 $l=100$ cm，$W=1\ 000$ N，$I=68.82$ cm^4，$E=2\times10^5$ MPa。（提示：利用对称性。）



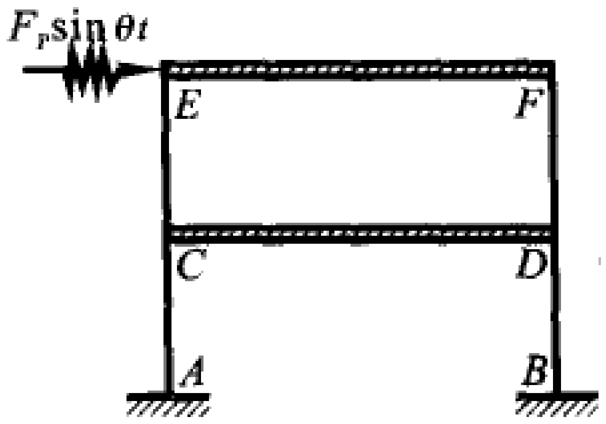
题 10 - 21 图

10－22 试求图示两层刚架的自振频率和主振型。设楼面质量分别为 $m_1 = 120$ t 和 $m_2 = 100$ t，柱的质量已集中于楼面，柱的线刚度分别为 $i_1 = 20$ MN·m 和 $i_2 = 14$ MN·m，横梁刚度为无限大。

10－23 设在题 10－22 的两层刚架的二层楼面处沿水平方向作用一简谐干扰力 $F_P \sin \theta t$，其幅值 $F_P = 5$ kN，机器转速 $n = 150$ r/min。试求图示第一、二层楼面处的振幅值和柱端弯矩的幅值。



题 10－22 图



题 10－23 图

附录 A 《结构力学求解器》

本书(卷Ⅰ)附有《结构力学求解器》光盘 1 张作为本附录。光盘上的内容是本书的组成部分,含有与求解器相关章节的教学内容。另外,光盘上还附有本附录中的 A-1 和 A-2 的内容。

A-1 结构力学求解器使用说明

本节附录对结构力学求解器的使用作了较为具体的说明,包括:求解功能、技术性能、装机运行,以及命令指南等。

详细内容见所附光盘相应章节。

A-2 平面刚架程序的框图设计和源程序

本节附录共有三部分内容。第一部分为平面刚架程序的框图设计,此项框图设计主要是针对 FORTRAN77 语言而编写的,对于 Fortran 90 语言亦可以作为参考。第二部分为平面刚架源程序(FORTRAN77 语言)。第三部分为平面刚架源程序(Fortran 90 语言)。

详细内容见所附光盘相应章节。

附录B 习题答案

第 2 章

2-1 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 几何可变。
(c) 几何不变,无多余约束。

2-2 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 几何不变,无多余约束。
(c) 瞬变。

2-3 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 内部不变,无多余约束。
(c) 几何不变,有多余约束。
(d) 瞬变。

2-4 (a) 内部不变,无多余约束(如三铰共线,则为瞬变)。
(b) 内部不变,无多余约束。
(c) 内部不变,无多余约束。
(d) 内部不变,无多余约束。
(e) 瞬变。

2-5 (a) 几何不变,有多余约束。
(b) 几何不变,无多余约束。
(c) 几何不变,无多余约束。

2-6 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 几何不变,无多余约束。
(c) 瞬变。

2-7 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 几何不变,无多余约束。

2-8 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 瞬变。

2-9 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 瞬变。
(c) 几何不变,无多余约束。

2-10 (a) 几何不变,无多余约束。
(b) 瞬变。

2－11 习题2－5(b)～2－10中各体系的计算自由度均为 $W=0$，
题2－5(a)，$W=-2$。

2－12 (a) $W=-12$。
(b) $W=-3$。

第 3 章

3－1 (a) $M_C=\dfrac{ql^2}{4}$。

(b) $M_C=\dfrac{ql^2}{8}$。

(c) $M_C=\dfrac{F_P l}{2}$。

(d) $M_C=\dfrac{F_P l}{4}$。

(e) $M_C=2\ \text{kN·m}$。

(f) $M_C=10\ \text{kN·m}$。

(g) $M_C=12\ \text{kN·m}$。

(h) $M_C=-10\ \text{kN·m}$。

3－5 (a) $M_B=-6.09\ \text{kN·m}$，$F^{L}_{QB}=-11\ \text{kN}$。
(b) $M_A=4.5\ \text{kN·m}$(下边受拉)，$M_B=1\ \text{kN·m}$(上边受拉)，$M_C=1.87\ \text{kN·m}$(上边受拉)。

3－6 $x=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)l=0.146\ 5l$。

3－7 (a) $M_B=qa^2$(里边受拉)。
(b) $M_A=M_B=1.125\ \text{kN·m}$(里边受拉)，$M_C=12.38\ \text{kN·m}$(下边受拉)。
(c) $M_A=M_B=\dfrac{5}{8}qa^2$(外边受拉)。

3－8 (a) $M_D=12.5\ \text{kN·m}$(外边受拉)。
(b) $M_D=3\ \text{m}\cdot F_P$(里边受拉)。
(c) $M_D=\dfrac{2}{3}qa^2$(里边受拉)。
(d) $M_{DC}=12.5\ \text{m}^2\cdot q$(上边受拉)，$M_{DA}=9.37\ \text{m}^2\cdot q$(外边受拉)，$F_{QDC}=5\ \text{m}\cdot q$。

3－9 (a) $M_D=25.5\ \text{kN·m}$(外面受拉)。
(b) $M_D=2.32\ \text{kN·m}$(里边受拉)。
(c) $M_D=3.95\ \text{kN·m}$(里边受拉)。
(d) $M_D=0.98\ \text{kN·m}$(外面受拉)。

3－10 $M_D=21.6\ \text{kN·m}$(外边受拉)，$M_E=14.4\ \text{kN·m}$(外边受拉)。

3－11 $M_C=F_P l$(上边受拉)。

3－12 $F_{VA}=qa(\downarrow)$，$F_{HA}=3qa(\leftarrow)$，$F_{VB}=qa(\uparrow)$，$F_{HB}=qa(\rightarrow)$。

3－16 (a) 不变。

(b) 可变。

(c) 不变。

(d) 不变。

(e) 不变。

(f) 可变。

3-17 (a) $F_{NAB}=-4\ kN$。

(b) $F_{xA}=0.25F_P(\leftarrow)$，$F_{NAB}=1.35F_P$。

(c) $F_{NAC}=-F_P$，$F_{NBC}=\sqrt{2}F_P$。

(d) $F_{NAB}=-F_{P2}$，$F_{NCD}=F_{P1}$。

3-18 (a) $F_{N1}=-0.25F_P$，$F_{N2}=-2.67F_P$，$F_{N3}=-0.417F_P$。

(b) $F_{N1}=52.5\ kN$，$F_{N2}=18\ kN$，$F_{N3}=-18\ kN$。

(c) $F_{N1}=0$，$F_{N2}=\dfrac{F_P}{3}$，$F_{N3}=-\dfrac{F_P}{3}$，$F_{N4}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}F_P$。

(d) $F_{N1}=11.17\ kN$，$F_{N2}=-10.37\ kN$，$F_{N3}=-7.33\ kN$。

(e) $F_{N1}=-8.0\ kN$，$F_{N2}=1.94\ kN$，$F_{N3}=-11.0\ kN$，$F_{N4}=-1\ kN$。

(f) $F_{N1}=-2.83\ kN$，$F_{N2}=-3.3\ kN$，$F_{N3}=1.21\ kN$，$F_{N4}=5\ kN$。

3-19 (a) $M_F=2\ kN\cdot m$(上拉)，$F_{NDE}=4\ kN$。

(b) $F_{NAD}=-12\ kN$，$F_{QAC}=3\ kN$。

3-20 $F_{Na}=0$，$F_{Nb}=30\ kN$，$F_{Nc}=0$，$F_{Nd}=28.84\ kN$。

3-21 (a) $F_{yA}=\dfrac{3}{4}F_P$，$F_{yB}=\dfrac{1}{4}F_P$，$F_H=\dfrac{F_P}{2}$。

(b) $M_E=-0.5\ m\cdot F_P$。

(c) $F_{ND}^L=-0.78F_P$，$F_{QD}^L=0.45F_P$。

3-22 $F_{NAB}=9.82\ kN$，$M_D=-1.96\ kN\cdot m$(外边受拉)，$F_{QD(上面)}=3.73\ kN$，$F_{ND(上面)}=-11.59\ kN$。

3-23 (a) $F_{yA}=9.5\ kN$，$F_{yB}=10.5\ kN$，$F_H=11.25\ kN$。

(b) $M_D=-15\ kN\cdot m$(上拉)，$M_E=-3\ kN\cdot m$(上拉)。

3-24 (a) F_{yA}，F_{yB}不变，F_H减小1倍。M不变。

(b) 反力不变，拱高和跨度增大1倍，M也增大1倍。

3-26 $F_{Na}=-\dfrac{F_P}{2}$

$F_{Nb}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}F_P$

3-27 (a) $F_{RC}=16.25\ kN(\uparrow)$，$F_{RF}=5\ kN(\uparrow)$，$M_B=17.5\ kN\cdot m$，$M_C=-5\ kN\cdot m$。

(b) $F_H=\dfrac{3}{2}F_P$，$F_V=\dfrac{F_P}{2}$，$F_N=\dfrac{\sqrt{10}}{2}F_P$。

(c) $F_{RC}=0.72ql$，$M_{BC}=0.72ql^2$(下边受拉)，$M_{BA}=0.7ql^2$(右边受拉)。

(d) $F_{N1}=-2F_P, F_{N2}=\frac{1}{2}F_P, F_{N3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_P$。

第 4 章①

4-1 (a) $\bar{F}_{yA}=1, \bar{M}_A=-x$,

$$\bar{M}_C=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a)\\ -(x-a) & (a\leqslant x\leqslant l),\end{cases}$$

$$\bar{F}_{QC}=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a)\\ 1 & (a\leqslant x\leqslant l)。\end{cases}$$

(b) $\bar{F}_{yA}=\bar{F}^0_{yA}, \bar{M}_C=\bar{M}^0_C, \bar{F}_{QC}=\bar{F}^0_{QC}\cos\alpha, \bar{F}_{NC}=-\bar{F}^0_{QC}\sin\alpha$。

其中上标加"0"者为平梁有关量的影响线。

4-2 $\bar{R}_A=1$(A 点的值),$\bar{F}_{RA}=0$(B 点以右的值),$\bar{F}_{RC}=\frac{l+c}{l}$($B$ 点的值),$\bar{F}_{RD}=-\frac{c}{l}$($B$ 点的值),$\bar{F}_{QB}=-1$($B_{左}$ 点的值),$\bar{F}_{QB}=0$(B 点以右的值),$\bar{M}_E=\frac{ab}{l}$(E 点的值),$\bar{M}_F=-\frac{ce}{l}$(B 点的值),$\bar{F}_{QE}=-\frac{a}{l}$($E_{左}$ 点的值),$\bar{F}_{QF}=\frac{c}{l}$(B 点的值)。

4-3 $\bar{F}_{yA}=1$(BC 段),$\bar{M}_A=-l$(C 点的值),$\bar{M}_K=-a$(C 点的值),$\bar{F}_{QK}=1$(C^R 点的值)。

4-4 $\bar{M}_E=-0.667$ m(C 点的值),$F^L_{QB}=-0.667$(C 点的值),$F^R_{QB}=1$(C 点的值)。

4-5 (a) $\bar{M}_C=\frac{2}{3}$ m(D 点值),$\bar{F}_{QC}=\frac{2}{3}$(D 点值)。

(b) $\bar{F}_{RA}=-\frac{1}{l}, \bar{F}_{RB}=\frac{1}{l}, \bar{F}_{QC}=-\frac{1}{l}$,

$$\bar{M}_C=\begin{cases}\frac{b}{l} & (AC\ 段)\\ -\frac{a}{l} & (CB\ 段)。\end{cases}$$

(c) $\bar{F}_{xA}=1$, $\bar{F}_{yA}=-\frac{\tan\alpha}{l}x$, $\bar{M}_C=\frac{ab}{l}\tan\alpha$($C$ 点的值),$\bar{F}_{QC}=-\frac{a}{l}\sin\alpha$($C^R$ 点的值)。

4-7 $\bar{F}_{RA}=-\frac{1}{4}$($H$ 点),$\bar{F}_{RC}=\frac{5}{4}$(I 点),$\bar{F}^L_{QB}=-\frac{1}{4}$($H$ 点),$\bar{F}^R_{QB}=1$(H 点),$\bar{M}_F=-\frac{1}{2}$ m(H 点),$\bar{F}_{QF}=-\frac{1}{4}$($H$ 点),$\bar{M}_G=\frac{1}{2}$ m(G 点),$\bar{F}_{QG}=\frac{1}{2}$(G 点右边)。

4-8 $\bar{F}_{RA}=-1, \bar{F}_{RB}=2, \bar{M}_A=2$ m(均为 F 点值)。

4-9 上承荷载:$\bar{F}_{N1}=-2$(C 点),$\bar{F}_{N2}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$($D$ 点),$\bar{F}_{N3}=\frac{12}{5}$($C$ 点),

① 第 4 章中有关答案中符号上面加一横线者,表示其相应的影响系数值。

下承荷载：$\bar{F}_{N1}=-\frac{5}{2}$（$I$ 点），$\bar{F}_{N2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$（$I$ 点），$\bar{F}_{N3}=\frac{9}{5}$（H 点）。

4－10 $\bar{F}_{N1}=\frac{3}{2}$，$\bar{F}_{N2}=1$，$\bar{F}_{N3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\bar{F}_{N4}=\sqrt{2}$（均为 C 点值）。

4－11 $\bar{F}_{N1}=2.7$（C 点），$\bar{F}_{N2}=2.5$（C 点），$\bar{F}_{NDA}=-2.5$（C 点），$\bar{M}_D=-1.5$ m（C 点），$\bar{F}_{QD}^{L}=0.25(D^{L})$，$F_{QD}^{R}=0.75(D^{R})$。

4－12 $\bar{M}_D=-2.08$ m，$\bar{F}_{QDA}=-0.462$，$\bar{F}_{QDC}=0.329$（均为 C 点值）。

4－13 $\bar{M}_C=\frac{h}{2}$，$\bar{F}_{QC}=-\frac{h}{l}$（均为 D 点值）。

4－15 $F_{RA}=5$ kN，$F_{RB}=55$ kN，$F_{QC}=-5$ kN，$M_C=0$。

4－16 $Z_{max}=-1\ 555$ kN。

4－17 $M_{C\max}=314$ kN·m，$F_{QC\max}=104.5$ kN，$F_{QC\min}=-27.3$ kN。

4－18 $F_{RB\max}=237$ kN。

第 5 章

5－1 (a) $\Delta=1$ cm(←)。

(b) $\Delta=0.25$ cm(←)。

(c) $\Delta=0.25$ cm(→)。

5－2 $\Delta_V=\Delta_y-3a\Delta_\varphi$(↓)，$\Delta_H=\Delta_x+a\Delta_\varphi$(←)，$\theta=\Delta_\varphi$(↶)。

5－3 $\Delta_1=\frac{l}{4f}$(↓)，$\Delta_2=\frac{1}{2}$(→)，$\Delta_3=\frac{1}{f}$(↻↺)。

5－4 $\Delta=\frac{l\lambda}{4f}$(↑)。

5－5 $\Delta=4\varepsilon_1 a$(←)。

5－6 $\Delta=1.1$ mm(↓)。

5－7 (a) $\Delta_A=\frac{ql^4}{8EI}$(↓)，$\theta_A=\frac{ql^3}{6EI}$(↶)。

(b) $\Delta_A=\frac{5F_Pl^3}{48EI}$(↓)，$\theta_A=\frac{F_Pl^2}{8EI}$(↶)。

5－8 (a) $\Delta=\frac{5ql^4}{384EI}$(↓)。

(b) $\Delta=\frac{1}{48}\frac{F_Pl^3}{EI}$(↓)。

5－9 $\Delta_M=\frac{5ql^4}{384EI}$，$\Delta_Q=\frac{ql^2h^2}{30EI}$；当$\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$时，$\frac{\Delta_Q}{\Delta_M}=2.56\%$。

5－10 $\Delta_C=6.828\frac{F_Pd}{EA}$(↓)。

5－11 $\Delta_C=3.828\frac{F_Pa}{EA}$(→)。

5－12 $\Delta_C=23.6\frac{F_Pa}{EA}$(→)。

5－13 $\Delta_V=\dfrac{\pi}{4}\dfrac{F_PR^3}{EI}(\downarrow),\Delta_H=\dfrac{1}{2}\dfrac{F_PR^3}{EI}(\rightarrow)$。

5－14 $\Delta_B=\dfrac{qfl^3}{15EI}(\rightarrow)$。

5－17 $f_{max}=\dfrac{23}{648}\dfrac{F_Pl^3}{EI}(\downarrow)$。

5－18 $\Delta_C=1.58\ \text{cm}(\downarrow)$，$\Delta_E=2.06\ \text{cm}(\downarrow)$。

5－19 $\Delta_C=0.32\ \text{cm}(\downarrow)$。

5－20 $\Delta_C=1.00\ \text{cm}(\downarrow)$。

5－21 $\Delta_B=\dfrac{F_P(l^3-a^3)}{3EI_1}+\dfrac{F_Pa^3}{3EI_2}(\downarrow)$。

5－22 $\Delta_A=\dfrac{112}{EI}q(\downarrow),\Delta_D=\dfrac{53.67}{EI}q(\downarrow)$。

5－23 $\Delta_E=\dfrac{243}{EI}q(\rightarrow),\theta_B=\dfrac{49.5}{EI}q(\curvearrowright)$。

5－24 $\Delta_B=\dfrac{432}{EI_1}q(\rightarrow)$。

5－25 (a) $\Delta_H=\dfrac{F_Plh^2}{2EI}$，$\Delta_V=\dfrac{F_Pl^2(l+3h)}{3EI},\theta=\dfrac{F_Pl(l+2h)}{2EI}$。

(b) $\Delta_H=\dfrac{F_Plh^2}{2EI}$，$\Delta_V=\dfrac{F_Pl^2(l+3h)}{3EI}+\dfrac{F_Ph}{EA},\theta=\dfrac{F_Pl(l+2h)}{2EI}$。

5－26 (a) $\Delta=\dfrac{ql^3}{12EI}(\circlearrowleft\circlearrowright)$，

(b) $\Delta=\dfrac{F_Pl^2}{8EI}(\circlearrowleft\circlearrowright)$。

5－27 $\Delta_1=0,\Delta_2=0.917\dfrac{ql^4}{EI}(\rightarrow\leftarrow),\Delta_3=1.17\dfrac{ql^3}{EI}(\circlearrowright\circlearrowleft)$。

5－28 $\Delta=9.81\dfrac{F_Pa^3}{EI}\left(\begin{matrix}\uparrow\\ \downarrow\end{matrix}\right)$。

5－29 $\Delta_C=180\alpha+\dfrac{1\ 080\ \alpha}{h}(\uparrow)$。

5－30 $\theta=\dfrac{\alpha t_1l}{h}-\dfrac{Ml}{2EI}(\curvearrowright)$，如 $\theta=0$，则 $M=\dfrac{2\alpha t_1EI}{h}$。

5－31 $\Delta_1=\alpha t_0\left(f+\dfrac{l^2}{4f}\right)(\uparrow),\Delta_2=\dfrac{\alpha t_0l}{f}(\circlearrowright\circlearrowleft)$。

5－32 $\Delta_C=2\alpha d(\downarrow)$。

第 6 章

6－1 (a) 2 次。

(b) 7 次。

(c) 3 次。

(d) 3 次。

(e) 4 次。

(f) 2 次。

(g) 7 次。

(h) 10 次。

6-2 (a) $F_{yA}=\dfrac{5}{16}F_P$。

(b) $F_{yB}=\dfrac{F_P}{2}\dfrac{2l^3-3l^2a+a^3}{l^3-(1-k)a^3}$。

(c) $M_{BA}=\dfrac{1}{8}F_Pl$(上边受拉)。

6-3 (a) $F_{xA}=F_{xB}=6q(\leftarrow)$。

(b) $F_{yC}=\dfrac{5}{8}F_P$。

(c) $F_{xA}=2.19\text{m}\cdot q(\rightarrow)$。

(d) $M_{CA}=\dfrac{1}{14}qa^2$(左边受拉)。

6-4 (a) $M_A=225\ \text{kN}\cdot\text{m}$(左边受拉)。

(b) $M_C=2.94\ \text{m}\cdot F_P$, $M_D=4.06\ \text{m}\cdot F_P$(左边受拉)。

(c) 低跨链杆轴力为 $-0.725q$,高跨链杆轴力为 $-1.84\text{m}\cdot q$。

6-5 (a) $F_{RB}=1.173F_P(\uparrow)$。

(b) $F_{NBC}=0.896F_P$。

6-6 $F_{NCD}=10.98\ \text{kN}$。

6-7 中间吊杆拉力 7.66 kN,中间吊点处梁弯矩 5 kN·m(上边受拉)。

6-8 (a) 各柱底部弯矩为$\dfrac{F_Ph}{4}$(左边受拉)。

(b) 角点弯矩$\dfrac{qa^2}{24}$(外面受拉)。

(c) $M_{AB}=\dfrac{1}{6}qa^2$(上边受拉)。

(d) $M_{EC}=1.8F_P$(内部受拉),$M_{CE}=1.2F_P$(外部受拉),$M_{CA}=3F_P$(内部受拉),
$M_{CD}=4.2F_P$(下部受拉)。

6-9 (a) $M_{AB}=\dfrac{5}{16}ql^2$(上边受拉)。

(b) $M_{AB}=M_{BA}=\dfrac{1}{56}ql^2$(外部受拉)。

6-10 $k=\dfrac{24EI}{l^3}$,$\Delta_B=\dfrac{ql^4}{24EI}$。

6-11 $F_H=\dfrac{ql^2}{8f}\dfrac{1}{1+\dfrac{15}{8}\dfrac{EI}{E_1A_1f^2}}$。

6－12

f/l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$F_H\Big/\left(\frac{ql^2}{8f}\right)$	0.994 4	0.977 6	0.948 0	0.895 6	0.848 0

6－13 (a) $M_A=M_B=\frac{1}{\pi}F_PR$(内部受拉)。

(b) $M_A=M_B=\frac{1}{4}qR^2$(内部受拉)。

6－14 $F_H=0.46F_P,M_A=M_B=0.11F_PR$。

6－15 拱顶 $M=76.65$ kN·m,拱脚 $M=-206.79$ kN·m。

6－16 水平推力 $F_H=13.05\text{m}\cdot q$。

6－17 (a) $M_{AB}=\frac{3EI}{l}\alpha$(下边受拉),$y(x)=\frac{\alpha}{2l^2}(2l^2x+3lx^2-x^3)$,

$y_{max}=0.385\alpha l$。

(b) $M_{AB}=\frac{4EI}{l}\alpha$(下边受拉),$y(x)=\frac{\alpha}{l^2}(l^2x-2lx^2+x^3)$,$y_{max}=0.148\alpha l$。

6－18 $M_{AB}=\frac{6EI}{l^2}c$(上边受拉)。

6－19 $M=\frac{EI\alpha}{h}t$(外部受拉)。

6－20 $M_{AB}=\frac{3EI}{2h}\alpha(t_2-t_1),y(x)=\frac{\alpha(t_2-t_1)}{4h}\left(x^2-\frac{x^3}{l}\right)$

6－21 $l_{AB}=l-\frac{11}{12}\Delta$。

第 7 章

7－1 (a) (1) 3;(2) 6。

(b) (1) 10;(2) 10。

(c) (1) 4;(2) 9。

(d) (1) 3;(2) 2。

7－2 (a) $M_{DB}=4i\theta_D,M_{DA}=3i\theta_D+\frac{3ql^2}{16},M_{DC}=i\theta_D-\frac{ql^2}{3},8i\theta_D-\frac{7}{48}ql^2=0$。

(b) $M_{DA}=3\cdot\frac{EI}{4}\theta_D+5,M_{DB}=EI\theta_D,M_{DC}=-40$ kN·m,$1.75EI\theta_D=35$。

(c) $M_{EA}=4\frac{E}{l}\theta_E,M_{ED}=24\frac{E}{l}\theta_E,M_{EC}=2\frac{E}{l}\theta_E,M_{EB}=0,\ 30\frac{E}{l}\theta_E=M_0$。

(d) $M_{AB}=4i\theta_A+2i\theta_B,M_{BA}=4i\theta_B+2i\theta_A,M_{BF}=i\theta_B+\frac{3ql^2}{8},M_{BE}=3i\theta_B-\frac{3ql^2}{16}$,

$8i\theta_A+2i\theta_B+\frac{ql^2}{2}=0,2i\theta_A+8i\theta_B+\frac{3ql^2}{16}=0$。

(e) $M_{AD}=4i\theta_A+2i\theta_B,M_{AB}=4i\theta_A,M_{AF}=3i\theta_A-\frac{3ql^2}{16},M_{BC}=i\theta_B+\frac{ql^2}{3},15i\theta_A+$

$2i\theta_B-\frac{3ql^2}{16}=0$, $2i\theta_A+5i\theta_B+\frac{ql^2}{3}=0$。

(f) $M_{BA}=4i\theta_B+2i\theta_A$, $M_{BC}=3i\theta_B-3\frac{i}{l}\Delta_C$, $M_{CD}=0$, $7i\theta_B+2i\theta_A-3\frac{i}{l}\Delta_C=0$。

7-3 (a) 3。

(b) 3。

(c) 3。

(d) 4。

(e) 4。

注:(d)、(e)可简化为2个基本未知量。

7-4 $F_{N1}=-50$ kN, $F_{N2}=-75$ kN, $F_{N3}=-100$ kN, $F_{N4}=-125$ kN, $F_{N5}=-150$ kN。

7-5 $M_{AB}=-\frac{41}{280}F_Pl$, $M_{BC}=-\frac{11}{280}F_Pl$

7-6 $M_{AB}=27.2$ kN·m, $M_{BC}=-54.3$ kN·m, $M_{CB}=70.3$ kN·m。

7-7 $M_{AC}=-150$ kN·m, $M_{CA}=-30$ kN·m, $M_{BD}=M_{DB}=-90$ kN·m。

7-8 $M_{AC}=-225$ kN·m, $M_{BD}=-135$ kN·m, $F_{QAC}=97.5$ kN。

7-9 $M_{AD}=-84.2$ kN·m, $M_{EB}=-70.0$ kN·m, $M_{ED}=35.1$ kN·m。

7-10 $M_{AC}=-34.4$ kN·m, $M_{CA}=14.7$ kN·m, $M_{BD}=-20.1$ kN·m。

7-11 $M_{AC}=-8.43$ kN·m, $M_{CD}=2.07$ kN·m, $M_{DC}=3.07$ kN·m, $F_{QAC}=4.75$ kN, $F_{QCA}=-1.25$ kN, $F_{QCD}=-0.43$ kN, $F_{NAC}=0.43$ kN, $F_{NBD}=-0.43$ kN, $F_{NCD}=-1.25$ kN。

7-12 $M_{AD}=\frac{1}{48}ql^2$, $M_{DE}=-\frac{1}{24}ql^2$。

7-13 $M_{AC}=M_{BD}=-171.4$ kN·m, $M_{CA}=M_{DB}=-128.6$ kN·m。

7-14 $M_{AB}=-1.388\text{m}^2\cdot q$, $M_{AC}=0.607\,4\text{m}^2\cdot q$。

7-15 $M_{AB}=59.14$ kN·m, $M_{BA}=-60.86$ kN·m,

$M_{CA}=59.14$ kN·m, $M_{DB}=-60.86$ kN·m。

7-16 $M_{CB}=-47.37$ kN·m。

7-17 $M_B=-93.7$ kN·m, $M_C=140.1$ kN·m。

7-18 $M_{AB}=0$, $M_{BA}=\frac{1}{4}ql^2$, $M_{BC}=-\frac{5}{12}ql^2$。

7-19 (a) $M=\frac{EI\alpha t}{\delta}$(外部受拉)。

(b) 同上。

(c) 同上。

7-20 (a) $M_{AB}=2.27$ kN·m, $M_{DA}=-6.37$ kN·m,

$M_{BA}=6.77$ kN·m, $M_{BE}=-1.41$ kN·m,

$M_{EB}=-1.08$ kN·m。

(b) $M_{AD}=-2.23\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{DA}=-1.87\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BA}=2.27\ \mathrm{kN\cdot m}$。

第 8 章

8-2 (a) 否。

(b) 否。

(c) 可。

(d) 可。

(e) 可。

(f) 可。

8-4 $M_{BA}=38.2\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BC}=-48.4\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-5 $M_{AB}=45.5\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{CD}=-308.3\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-6 $M_{CB}=0.100\ 5ql^2, M_{ED}=0.085\ 7ql^2$。

8-7 $M_{AB}=-61.3\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-8 $M_{BA}=27.3\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-9 $M_{BC}=-192\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-10 $M_{CB}=12.78\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BA}=15.65\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-11 $M_{AB}=450\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-12 $M_{AB}=-3.5\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-13 (a) $M_{BA}=-25.7\ \mathrm{kN\cdot m}$。

(b) $M_{BC}=-4\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-14 (a) $M_{BA}=-12.34\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{CB}=20.06\ \mathrm{kN\cdot m}$。

(b) $M_{BA}-19.2\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{CB}=16.8\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-15 $M_{CB}=-21.2\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{AB}=58.9\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-16 $M_{AC}=-56.7\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{CD}=-45.3\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-17 $M_{DA}=46.4\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{AD}=19.1\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-18 (a) $M_{BA}=18.94\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BC}=71.65\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BD}=-90.59\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{CE}=-107.79\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{EC}=-25.11\ \mathrm{kN\cdot m}$。

(b) $M_{CE}=-121.96\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{HE}=37.15\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BC}=61.03\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BA}=0.056\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{CB}=121.96\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BD}=-61.09\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-19 $M_{AB}=-13.4\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{BA}=-16.5\ \mathrm{kN\cdot m}$。

8-20 $M_{DG}=1.78\ \mathrm{m^2}\cdot q, M_{DB}=-1.62\ \mathrm{m^2}\cdot q, M_{AB}=1.5\ \mathrm{m^2}\cdot q, M_{AC}=0.5\ \mathrm{m^2}\cdot q$。

8-22 $\bar{M}_A=-\dfrac{x(l-x)^2}{l^2}$；当 $x=\dfrac{l}{3}$时，M_A 达极大值 $-\dfrac{4l}{27}$。

8-23 $F_{RB}=\dfrac{1}{2l^3}x(3l^2-x^2)(AB$ 段$)$，$F_{RB}=\dfrac{1}{2l^3}(2l-x)[3l^2-(2l-x)^2](BC$ 段$)$，$F_{RB}=0.687\ 5(D$ 点值$)$，$\bar{M}_D=\dfrac{1}{8l^2}x(3l^2+x^2)(AD$ 段$)$，$\bar{M}_D=\dfrac{1}{8l^2}(l-x)(4l^2-lx-x^2)(DB$ 段$)$，$\bar{M}_D=-\dfrac{1}{8l^2}(x-l)(2l-x)(3l-x)(BC$ 段$)\bar{M}_D=$

0.203 1l(D 点值)。$\bar{F}_{QD}=-\frac{1}{4l^3}x(5l^2-x^2)$($AD$ 段)。$\bar{F}_{QD}=\frac{1}{4l^3}(l-x)(4l^2-lx-x^2)$($DB$ 段),$\bar{F}_{QD}=-\frac{1}{4l^3}(x-l)(2l-x)(3l-x)$($BC$ 段),$\bar{F}_{QD}=$ 0.406 3(D 右点的值)。

第 9 章

9-1

结点转角:$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{50}{7i_1}\\ -\frac{25}{7i_1}\end{pmatrix}$,

杆端弯矩:

$\begin{pmatrix}\bar{M}_1\\ \bar{M}_2\end{pmatrix}^{①}=\begin{pmatrix}14.29\\ 28.57\end{pmatrix}$kN·m,

$\begin{pmatrix}\bar{M}_1\\ \bar{M}_2\end{pmatrix}^{②}=\begin{pmatrix}21.43\\ 0\end{pmatrix}$kN·m。

9-2

结点转角:$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{45}{7i_1}\\ -\frac{75}{7i_1}\end{pmatrix}$,

杆端弯矩:$\begin{pmatrix}\bar{M}_1\\ \bar{M}_2\end{pmatrix}^{①}=\begin{pmatrix}12.86\\ 25.71\end{pmatrix}$kN·m,

$\begin{pmatrix}\bar{M}_1\\ \bar{M}_2\end{pmatrix}^{②}=\begin{pmatrix}-25.71\\ 0\end{pmatrix}$kN·m。

9-3 $M_{AB}=-8.89$ kN·m,$M_{BA}=2.22$ kN·m。

9-4 $M_{AB}=0.845\frac{1}{l}$,$M_{BA}=1.690\frac{1}{l}$,

$M_{CD}=2.161\frac{1}{l}$,$M_{DC}=1.914\frac{1}{l}$。

9-6

$$K=\frac{2EI}{l}\begin{pmatrix}\frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} & 0 & 0\\ & 6 & 2 & 0\\ \text{对} & & 6 & -\frac{3}{l}\\ & & \text{称} & \frac{6}{l^2}\end{pmatrix}。$$

9-7

$$K=10^4\begin{pmatrix}612 & 0 & -30\\ \text{对} & 324 & 0\\ & \text{称} & 300\end{pmatrix}。$$

9－8

$$\overline{\mathbf{F}}^{①}=\begin{pmatrix}0.493\\-13.45\\-12.79\\\cdots\cdots\\-0.493\\-10.55\\5.54\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{F}}^{②}=\begin{pmatrix}-0.492\\-0.561\\-2.240\\\cdots\cdots\\0.492\\0.561\\-0.564\end{pmatrix}。$$

9－9

$$\begin{pmatrix}0.977\dfrac{EA}{l}+0.492\dfrac{EI}{l^3} & -0.192\dfrac{EA}{l}+0.369\dfrac{EI}{l^3} & -0.768\dfrac{EI}{l^2}\\ \text{对} & 0.256\dfrac{EA}{l}+2.221\dfrac{EI}{l^3} & 0.257\dfrac{EI}{l^2}\\ & \text{称} & 4.933\dfrac{EI}{l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\\theta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.107F_P\\5.858F_P\\-\dfrac{5F_Pl}{6}\end{pmatrix}。$$

9－10 $M_{21}=-0.149\,1F_Pl$，$F_{Q21}=0.298\,2F_P$，

$M_{41}=-0.052\,7F_Pl$，$F_{Q41}=0.074\,6F_P$。

9－11 $M_{12}=-52.36\ \text{kN·m}$，$F_{Q12}=15\ \text{kN}$，

$M_{21}=-37.70\ \text{kN·m}$，$F_{Q21}=15\ \text{kN}$。

9－12 按单元顺序

(a) $\boldsymbol{F}_N^T=(0.5F_P\quad 0.433F_P\quad 0.25F_P)$。

(b) $\boldsymbol{F}_N^T=(-0.33F_P\quad 0.15F_P\quad 0.58F_P\quad 0.91F_P)$。

(c) $\boldsymbol{F}_N^T=(-0.235\,7F_P\quad 0.083\,3F_P\quad 0.353\,5F_P\quad 0.416\,7F_P\quad 0.235\,7F_P)$。

9－13 按单元顺序

$\boldsymbol{F}_N^T=(0.326F_P\quad 1.327F_P\quad 0\quad -0.673F_P\quad -0.462F_P\quad 0.952F_P)$，

撤去任一水平支杆，刚度矩阵变为奇异矩阵，无法求解。

9－14 (a) $\begin{pmatrix}\dfrac{12i}{l^2} & \dfrac{6i}{l}\\ \dfrac{6i}{l} & 4i\end{pmatrix}$。

(b) $\begin{pmatrix}4i & -\dfrac{6i}{l}\\ -\dfrac{6i}{l} & \dfrac{12i}{l^2}\end{pmatrix}$。

9－15

$$\begin{pmatrix}\dfrac{24i}{l^2}+k & 0 & -\dfrac{12i}{l^2}\\ 0 & 8i & -\dfrac{6i}{l}\\ -\dfrac{12i}{l^2} & -\dfrac{6i}{l} & \dfrac{12i}{l^2}\end{pmatrix}。$$

第 10 章

10-1 $T=0.100\,4\ \text{s}, \omega=62.58\ \text{s}^{-1}$。

10-2 $\omega=15\ \text{s}^{-1}$。

10-3 $\omega=\sqrt{\dfrac{3EI}{Mh^2 l}}$。

10-4 $y_{max}=0.1\ \text{cm}, v_{max}=4.175\ \text{cm/s}, a_{max}=174.3\ \text{cm/s}^2$。

10-5 $T=0.105\,3\ \text{s}$。

10-6 $\omega=\sqrt{\dfrac{192(2\beta+3n)EIg}{Wl^3(8\beta+3n)}}$。

10-7 $\omega=\sqrt{\dfrac{12gn^3 EI}{Wl^3(n+2\beta)}}$。

10-8 $y_{max}=0.697\ \text{cm}, M_A=20.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$。

10-9 $y_{max}=\dfrac{F_{P0}}{k}\sqrt{3}, t=\dfrac{2}{3}T$。

10-10 $y_{max}=-0.088\,4\ \text{cm}$(与 F_P 方向相反),$M_{max}=0.52\ \text{kN}\cdot\text{m}$。

10-11 (a) $y(\tau)=y_{st}\left(1-\dfrac{T\sin\dfrac{2\pi}{T}\tau}{2\pi\tau}\right)$。

(b)

τ	$\frac{3}{4}T$	T	$1\frac{1}{4}T$	$4\frac{3}{4}T$	$5T$	$5\frac{1}{4}T$	$9\frac{3}{4}T$	$10T$	$10\frac{1}{4}T$
$\frac{y(\tau)}{y_{st}}$	1.212	1	0.873	1.034	1	0.969 7	1.016 3	1	0.984 5

(c) 计算结果表明:

(1) 当 τ 为 T 的整数倍时,$\dfrac{y(\tau)}{y_{st}}=1$。

(2) 当 $\tau>5T$ 后,$\dfrac{y(\tau)}{y_{st}}\approx1$。

10-12 (a) $t\leqslant\tau$ 时,$y(t)=y_{st}(1-\cos\omega t)$。

(b) $t>\tau$ 时,$y(t)=2y_{st}\sin\dfrac{\omega\tau}{2}\sin\omega\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)$。

(c)

τ	$0.1T$	$0.2T$	$0.3T$	$0.5T$
$\frac{y_{max}}{y_{st}}$	0.618	1.175	1.618	2.00

10-13 $y_{max}=2\ \text{mm}, t=0.099\ \text{s}, M_{max}=24\ \text{kN}\cdot\text{m}$。

10－14 $\xi=0.0367$，$\beta=14$。

10－15 (a) $W=8\,817$ kN。

(b) $\xi=0.0355$。

(c) $y=0.1285$ cm。

10－16 1点位移动力系数为 $\beta_{\Delta 1}=\left|\dfrac{1}{1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}\right|$，

0点弯矩动力系数为 $\beta_{M0}=\left|1-\dfrac{\delta_{1P}}{a\delta_{11}}\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\theta^2}}\right|$。

10－17 $(F_{RC})_{max}=\dfrac{9}{8}q_0 l\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}\right)$。

10－18 $\omega_1=3.0618\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$，$\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}}=-\dfrac{1}{0.1602}$，

$\omega_2=12.298\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$，$\dfrac{Y_{12}}{Y_{22}}=\dfrac{0.1602}{1}$。

10－19 $\omega_1=1.2193\sqrt{\dfrac{EI}{ma^3}}$，$\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}}=\dfrac{1}{10.4293}$，

$\omega_2=8.213\sqrt{\dfrac{EI}{ma^3}}$，$\dfrac{Y_{12}}{Y_{22}}=-\dfrac{10.4028}{1}$。

10－20 $\omega_1=257.04\ s^{-1}$，$\omega_2=388.61\ s^{-1}$。

10－21 $\omega_1=254.45\ s^{-1}$，$Y_{11}:Y_{21}:Y_{31}=1:-1:1$，

$\omega_2=321.88\ s^{-1}$，$Y_{12}:Y_{22}:Y_{32}=1:0:-1$，

$\omega_3=446.34\ s^{-1}$，$Y_{13}:Y_{23}:Y_{33}=1:2:1$。

10－22 $\omega_1=9.88\ s^{-1}$，$\omega_2=23.18\ s^{-1}$。

10－23 楼面振幅：$A_1=-0.202$ mm，$A_2=-0.206$ mm，

柱端弯矩：$M_A=6.06$ kN·m。

索　　引

B

C

D

F

G

H

J

L

N

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

参 考 文 献

[1] 龙驭球,包世华,等.结构力学教程:(Ⅰ),(Ⅱ)[M].北京:高等教育出版社,2000,2001.

[2] 龙驭球,包世华,等,结构力学:上册,下册[M].2版.北京:高等教育出版社,1994,1996.

[3] 龙驭球,包世华.结构力学教程:上册,下册[M].北京:高等教育出版社,1988.

[4] 杨茀康,李家宝,等.结构力学:上册,下册[M].4版.北京:高等教育出版社,1998.

[5] 李廉锟,等.结构力学:上册,下册[M].3版.北京:高等教育出版社,1996.

[6] 包世华.结构动力学[M].武汉:武汉理工大学出版社,2005.

[7] 匡文起,张玉良,辛克贵.结构矩阵分析和程序设计[M].北京:高等教育出版社,1991.

[8] Ghali A,Nevilli A M.Structural analysis[M].3rd ed.London,New York:Chapman and Hall,1989.

[9] 雷钟和,江爱川,郝静明.结构力学解疑[M].北京:清华大学出版社,1996.

[10] 缪加玉.结构力学的若干问题[M].成都:成都科技大学出版社,1993.

[11] 包世华.《结构力学》学习指导及题解大全[M].武汉:武汉理工大学出版社,2003.

[12] 雷钟和,龙志飞.结构力学学习指导[M].北京:高等教育出版社,2005.

[13] Brainerd W S, Goldberg C H,Adams J C.Fortran 90 编程指南.袁驷,叶康生译.3版.北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2000

Synopsis

This book is the result of sore than 50 years spent in developing the program of instruction in Structural Mechanics at Tsinghua University.

This book has two volumes: Volume Ⅰ——Fundamental Course; Volume Ⅱ——Advanced Course.

Volume Ⅰ——Fundamental Course consists of 10 chapters including statically determinate structures, statically indeterminate structures, matrix displacement method and elementary theory of structural dynamics. Fundamental Course is written according to "The Fundamental Requirements for Structural Mechanics Course" which is worked out by the Mechanics Teaching Guiding Committee of The Minstry of Education and the recent years teaching practices done by most of the universities including Tsinghua University. In this volume we keep our eyes on laying the foundation of the Course and meeting The Fundamental Requirements of the Course.

A software named Structural Mechanics Solver developed by the teaching and research group, and a computer program for the analysis of plane framed structures are attached in the disk of Volume Ⅰ.

Volume Ⅱ——Advanced Course consists of 7 Chapters including general remarks on statically determinate structures, general remarks on statically indeterminate structures, energy principles, additional notes on structural dynmamics, stability analysis, ultimate load of structures, structural mechanics and methodology. Advanced Course is written in keeping eyes on enhancement and enlargement to meet the requirements for elective course for higher class students and postgraduate students.

This book can serve both as a textbook of Structural Mechanics in the area of civil engineering, hydraulic engineering, and mechanical engineering, etc., and a reference book for engineering technicians in relative fields.

Contents



主编简介

龙驭球　清华大学土木工程系教授，中国工程院院士。1926年生，湖南安化人。1948年毕业于清华大学。曾任中国土木工程学会第四届理事，教育部高等学校工科力学课程教学指导委员会主任委员兼结构力学课程教学指导组组长，中国力学学会《工程力学》主编，1999年国际结构工程会议主席。现任国际杂志《Advances in Structural Engineering》和《Structural Stability and Dynamics》国际编委，中国力学学会荣誉会员。

从事结构力学、有限元、能量原理、板壳结构的教学科研工作。发表学术论文240多篇。出版《结构力学》、《结构力学教程》、《壳体结构概论》、《有限元法概论》、《新型有限元论》、《有限元·变分原理·壳体分析》等教材和专著20种。参加制定《薄壳结构设计规程》。在科研方面，首创广义协调元、分区混合元、新型厚板厚壳元、四边形面积坐标理论、解析试函数法、分区能量原理、含可选参数能量原理等七项成果。

1988、1992、1996、2002年获全国普通高等学校优秀教材一等奖，1993年获高等学校优秀教学成果国家级二等奖，1986、1992年分别获国家教委科学技术进步一、二等奖，1998年度获教育部科学技术进步奖一等奖，1999年度获国家级科学技术进步奖二等奖，2000年获第三届中国工程科技奖，2001年获国家级教学成果一等奖，2002年获教育部提名国家自然科学奖一等奖，2004年清华大学结构力学课程被评为首批国家级精品课程。



主编简介

包世华 清华大学土木工程系教授,中国力学学会《工程力学》编委,中国建筑学会高层建筑结构委员会委员。1985—1986年为美国伊里诺伊大学土木工程系访问学者,1991—1993年为香港理工大学土木与结构系研究员。长期从事结构力学、弹性力学、能量原理及有限元、板壳结构、薄壁杆结构和高层建筑结构等领域的教学和研究工作。

出版教材和专著25种。所编教材有《高层建筑结构设计》、《结构力学》、《结构力学教程》等,分别于1987年获建设部优秀教材二等奖,1988、1992年获全国普通高等学校优秀教材一等奖,1998年度获教育部科学技术进步奖一等奖,1999年度获国家级科学技术进步奖二等奖,2002年获全国普通高等学校优秀教材一等奖。专著有《薄壁杆件结构力学》、《高层建筑结构计算》、《新编高层建筑结构》、《高层建筑结构设计和计算》(下册)等。

在国内外发表学术论文130多篇。壳体研究成果被收入国家行业标准《钢筋混凝土薄壳结构设计规程》。提出和创建了高层建筑结构解析和半解析常微分方程求解器解法系列。1983年获北京市科委技术成果奖,1986、1992、1994年分别获国家教委科学技术进步奖一、二、三等奖。



编著者简介

匡文起 清华大学土木工程系教授。历任清华大学结构力学教研组主任、清华大学结构工程研究所结构力学研究室主任、国家教委高等学校工科力学课程教学指导委员会委员。从事结构力学、弹性力学和有限元法的教学和科研工作。主要研究(含合作研究)工作有:“分区混合有限元法计算应力强度因子”、“正交异性钢桥面板的几何非线性分析”、“电视塔壳体组合结构分析中的拟弹性地基梁法”、“预应力混凝土水压机的温度场和温度应力”等。

出版教材与专著7本,研制并出版软件两种,发表学术论文40余篇。

1986年获国家教委科技进步二等奖,1988年获全国普通高等学校优秀教材一等奖,1989年获北京市高教局优秀教学成果奖,1992年获国家教委科学技术进步一等奖,1995年获国家教委优秀教材二等奖,1998年度获教育部科学技术进步奖一等奖,1999年度获国家级科学技术进步奖二等奖,2002年获全国普通高等学校优秀教材一等奖。



编著者简介

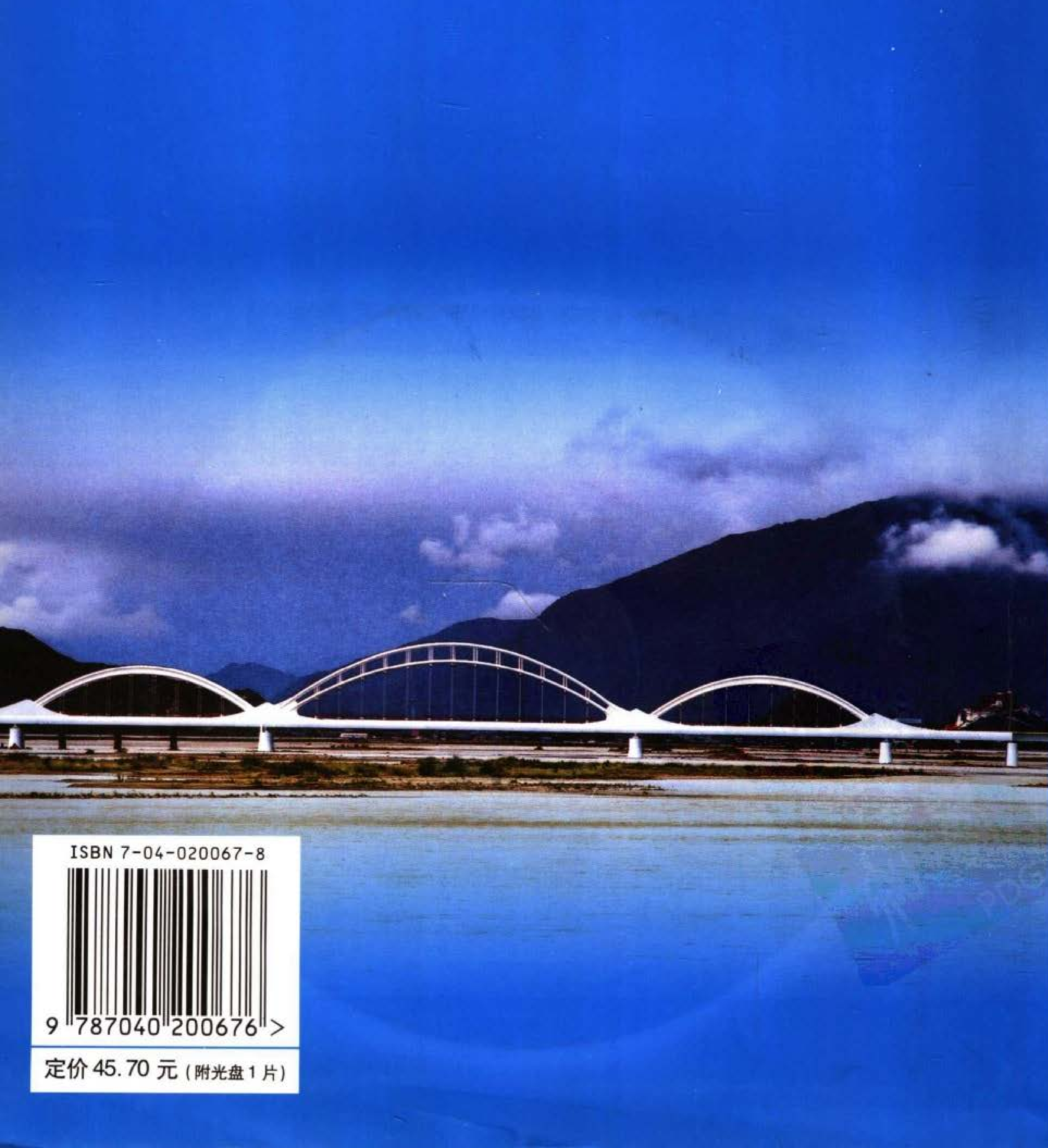
袁　驷　分别于1981年和1984年获清华大学土木系硕士学位和博士学位。曾先后在美国、英国作博士后和访问教授。现为清华大学土木水利学院院长、教授、博士生导师；全国人大常委、中国土木工程学会副理事长、国务院学位委员会学科评议组成员；兼《建筑结构学报》和《土木工程学报》编委会副主任及多部刊物编委，中国土木工程学会教育工作委员会主任，中国力学学会结构工程专业委员会主任，中国力学学会计算力学专业委员会委员，教育部高等学校工科力学教学指导委员会副主任等职。

1989年创立了有限元线法，并对其作了系统的开发与发展。1993年出版了独著的国内外首部有关该法的英文专著《The Finite Element Method of Lines》。发表学术论文160余篇。近年出版了多部面向21世纪的教材、著作和软件。

先后获国家教委科技进步一、二、三等奖（第二完成人）各一项，1991年获“作出突出贡献的中国博士”称号，1996年获国家杰出青年科学基金（1998年获延续资助），1997年获北京市优秀教师，2000年被聘为教育部长江学者特聘教授，2001年获北京市和国家级教学成果一等奖（第一完成人），2002年分别获全国普通高等学校优秀教材一等奖（第四完成人）和二等奖（第一完成人）各一项，2003年获教育部国家级教学名师奖，2004年所主讲的结构力学课程被评为首批国家级精品课程，同年获全国师德先进个人和全国模范教师称号。

Structural Mechanics I

本书第1版荣获2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖



ISBN 7-04-020067-8

9 787040 200676 >

定价 45.70 元（附光盘 1 片）